

**Przykład 15.9** (Estymator metody największej wiarygodności).

Dysponujemy próbą prostą  $x_1, x_2, \dots, x_n$  odległości losowo wybranych punktów wewnątrz okręgu o promieniu  $R$  od środka tego okręgu. Jaki jest estymator największej wiarygodności parametru  $R$

$$f(x; R) = \frac{2x}{R^2}$$

$$L(R) = \begin{cases} \prod_i^n (2x_i/R^2) = \frac{2^n \prod_i^n x_i}{R^{2n}} & \text{dla } R > x_i; \quad i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{dla } R < x_i; \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$L(R) = \begin{cases} \frac{2^n \prod_i^n x_i}{R^{2n}} & \text{dla } R > \text{Max}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0 & \text{dla } R < \text{Max}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$\hat{R} = \text{Max}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Przykład 15.10** (Estymator metody największej wiarygodności).

Dysponujemy próbą prostą pochodzącą z rozkładu wykładniczego o nieznannej wartości parametru  $\tau$ . Jaki jest estymator metody największej wiarygodności parametru  $\tau$ ? Jaka jest jego wariancja?

$$L(\tau) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\tau} e^{-x_i/\tau}$$

$$= \frac{1}{\tau^n} e^{-\sum_i x_i/\tau} \quad \tau > 0$$

W praktyce szukamy miejsca zerowego pochodnej nie funkcji wiarygodności ale jej logarytmu:

$$\frac{d}{d\Theta} \ln L(\Theta) = \frac{1}{L(\Theta)} \frac{d}{d\Theta} L(\Theta) = 0 \rightarrow \frac{d}{d\Theta} L(\Theta) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \ln L(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \left[ -n \ln \tau - \frac{\sum x_i}{\tau} \right] \\ &= \frac{-n}{\tau} + \frac{\sum x_i}{\tau^2} \\ &= \frac{-n\tau + \sum x_i}{\tau^2} = 0 \\ \hat{\tau} &= \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X} \end{aligned}$$

Jest to estymator nieobciążony. Oszacowanie jego wariancji wynosi:

$$\begin{aligned} \hat{\text{Var}}[\hat{\tau}] &= \frac{-1}{\frac{\partial^2 \ln L(\tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=\hat{\tau}}} \\ &= \frac{\hat{\tau}^2}{n} \end{aligned}$$

## 16 Niepewność pomiarowa

- W 1995 Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) przyjęła normy dotyczące obliczania i podawania w publikacjach niepewności pomiarów.
- Normy te określają również **nazewnictwo** jakie powinno być używane w analizie błędów pomiarowych.
- Każdy pomiar jest **estymatą**,  $\theta$ , wielkości prawdziwej,  $\Theta$

**Definicja 16.1** (Błąd pomiaru).

Błędem pomiaru nazywamy:

$$e = \Theta - \theta$$

**Definicja 16.2** (Błąd przypadkowy).

Błąd **przypadkowy** jest wynikiem:

- **nieprzewidywalnych**, przypadkowych zmian czynników wpływających na pomiar.

Rozkład błędu jest rozkładem normalnym:

$$f_E(e) = N(0, \sigma^2); \quad \text{Var}(E) = \sigma^2$$

- **statystycznego** charakteru metody pomiarowej.

Rozkład błędu zadany jest rozkładem estymatora

$$f_E(e) = f_{\hat{\Theta}}(\hat{\Theta} = \Theta - e); \quad \text{Var}(E) = \text{Var}(\hat{\Theta})$$

**Definicja 16.3** (Błąd systematyczny).

Błąd **systematyczny** jest wynikiem **potencjalnie przewidywalnych**, **stałych** zmian czynników wpływających na pomiar. Czynniki te potencjalnie można rozpoznać i wprowadzić poprawkę kompensującą (np. usunąć obciążenie estymatora)

Z reguły błąd pomiarowy nie jest znany, zamiast niego pomiarowi **musi** towarzyszyć **oszacowanie** błędu zwane **niepewnością pomiarową**.

**Definicja 16.4** (Niepewność pomiarowa).

**Niepewnością pomiarową** nazywamy parametr charakteryzujący rozkład (rozrzut) możliwych wyników pomiaru.

**Definicja 16.5** (Niepewność standardowa).

**Niepewnością standardową**,  $u(\theta)$ , nazywamy **odchylenie standardowe** rozkładu możliwych wyników pomiaru.

**Przykład 16.1** (Niepewność standardowa).

Pomiar dokonujemy w idealnych warunkach (bez zaburzeń) za pomocą idealnego przyrządu pomiarowego.

$$u(\theta) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\Theta})}$$

Jesli nie znamy rozkładu estymatora  $\hat{\Theta}$  to używamy estymatora wariancji:

$$u(\theta) = \sqrt{\hat{\text{Var}}(\hat{\Theta})}$$

**Przykład 16.2** (Niepewność standardowa).

Dysponujemy wynikami  $n$  pomiarów,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , tej samej wielkości  $\Theta$  przeprowadzonych w idealnych warunkach (bez zaburzeń) za pomocą przyrządu pomiarowego o **znanej** wariancji rozkładu błędów,  $\sigma^2$

$$\hat{\Theta} = \bar{\Theta}$$

$$\text{Var} [\hat{\Theta}] = \text{Var} [\bar{\Theta}] = \frac{\text{Var} [\Theta]}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$u(\theta) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Jeśli nie znamy rozkładu błędów przyrządu pomiarowego lub poszczególne pomiary podlegają przypadkowym zaburzeniom to:

$$u(\theta) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}} = \sqrt{\frac{S_{\theta}^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta})^2} = \sqrt{S_{\theta}^2}$$

- $S_{\theta}^2$  nazywamy wariancją **średniej z próby losowej**. Wielkość ta jest najczęściej stosowanym sposobem określania niepewności standardowej;
- W nomenklaturze normy ISO metodę obliczania niepewności standardowej na podstawie rozrzutu wyników ( $S_{\theta}^2$ ) nazywamy metodą **typu A**;
- Wszystkie inne sposoby określania niepewności standardowej nazywamy metodami **typu B**.

**Przykład 16.3** (Niepewność standardowa typu B).

Wykonujemy **tylko jeden** pomiar a nie znamy rozkładu błędów urządzenia pomiarowego lub wyniki wielu pomiarów nie wykazują rozrzutu,  $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$ .

- niepewność oceniamy na podstawie wiedzy o przedziale, w którym wartość prawdziwa powinna się mieścić;
- jeśli producent urządzenia pomiarowego określił niepewność wzorcowania  $\Delta\theta$ , to możemy założyć, że przedział  $\theta \pm \Delta\theta$  na 100 % zawiera wielkość prawdziwą;
- jeśli nie znamy niepewności wzorcowania to można założyć, że jest ona równa "działce elementarnej" (np. 1 mm dla przyrządu milimetrowego);
- jeśli nie ma innych przesłanek to rozkład błędu pomiarowego jest rozkładem jednostajnym:

$$e \in [-\Delta\theta, \Delta\theta]; \quad f(e) = \frac{1}{2\Delta\theta}; \quad \text{Var} [E] = \frac{(2\Delta\theta)^2}{12}$$

- niepewność standardową szacujemy jako

$$u(\theta) = \sqrt{\text{Var} [E]} = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{3}}$$

**Przykład 16.4** (Niepewność standardowa całkowita).

- W przypadku gdy oba typy niepewności występują równocześnie tzn. pomiary wykazują rozrzut  $S_{\theta}^2 \neq 0$  i są dokonane za pomocą urządzenia o znanej niepewności wzorcowania ("działce elementarnej")  $\Delta\theta$  to powinno się obie niepewności standardowe zsumować w kwadracie:

$$u(\theta) = \sqrt{S_{\theta}^2 + \frac{(\Delta\theta)^2}{3}}$$

**tylko wtedy** gdy niepewność oszacowana metodą B ma charakter błędu **systematycznego** (popelniamy taki sam błąd oszacowany metodą typu B przy każdym pomiarze).

- W przypadku gdy niepewność oszacowana metodą B ma charakter błędu **przypadkowego** to jest ona już obecna w rozrzucie wyników i nie należy jej ponownie dodawać do niepewności.

Dodawac czy nie dodawac niepewności typu B ?

- Dokonujemy wielu pomiarów tej samej wielkości, jeśli pomiar za każdym razem dokonujemy za pomocą **tego samego** urządzenia to niepewność typu B ma charakter **systematyczny** jeśli za pomocą **różnych** urządzeń (nawet takich samych) to niepewność typu B ma charakter **przypadkowy**;
- w wielu eksperymentach korzystamy z urządzeń bardzo precyzyjnych ale wynik pomiaru zapisujemy ze skończoną precyzją (np. duża liczba pomiarów wymaga kompresji, konwersja sygnałów analogowych na cyfrowe, ...) wtedy niepewność typu B (precyzja zapisu danych) ma charakter **przypadkowy**.

Dotychczas omawialiśmy obliczanie niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio. Najczęściej jednak wykonujemy pomiary wielkości pośrednich  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a wielkość mierzona obliczamy ze związku funkcyjnego

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Twierdzenie 16.1** (Wariancja funkcji zmiennych losowych).

Niech zmienne losowe  $\vec{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$  podlegają dowolnym rozkładom o wartościach oczekiwanych  $\vec{\mu} = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  i niech  $Y = f(\vec{X})$ .

$$\text{Var}[Y] \approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) \right)^2 \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) \frac{\partial f}{\partial X_j}(\vec{\mu}) \text{Cov}[X_i, X_j]$$

*Dowód.*

$$\begin{aligned} Y &\approx f(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) (X_i - \mu_i) \\ E[Y] &\approx E[f(\vec{\mu})] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) E[X_i - \mu_i] \\ &\approx f(\vec{\mu}) \\ \text{Var}[Y] &\approx \text{Var}[f(\vec{\mu})] + \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) (X_i - \mu_i) \right] \\ &\approx \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) X_i \right] \\ &\approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) \right)^2 \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(\vec{\mu}) \frac{\partial f}{\partial X_j}(\vec{\mu}) \text{Cov}[X_i, X_j] \end{aligned}$$

□

Powyższe twierdzenie oznacza, że wartość oczekiwaną i wariancję funkcji zmiennej losowej możemy w przybliżeniu obliczyć nie znając jej rozkładu prawdopodobieństwa jedynie na podstawie wartości oczekiwanych, wariancji i kowariancji pierwotnych zmiennych losowych. Przybliżenie jest tym lepsze im

- rozkłady zmiennych  $X_i$  są bardziej symetryczne względem  $\mu_i$
- odstępstwa od nieliniowości funkcji  $f$  w granicach odchyłeń standardowych wokół wartości oczekiwanych  $\mu_i$  są mniejsze.

Twierdzenie 18.1 jest podstawą przybliżonego obliczania niepewności standardowych wielkości mierzonych pośrednio. Wystarczy wszystkie wartości oczekiwane, wariancje i kowariancje zastąpić ich estymatorami.

**Twierdzenie 16.2** (Prawo przenoszenia niepewności).

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oznaczają wielkości mierzone bezpośrednio o niepewnościach standardowych odpowiednio:  $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ . Wtedy, jeśli wielkości  $x_i$  są nieskorelowane

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$u^2(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2[x_i]$$

W przypadku pomiarów skolerowanych mamy

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2[x_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \hat{Cov}[X_i, X_j]$$

dysponując  $K$  pomiarami par  $x_{ik}, x_{jk}$  nieobciążonym estymatorem kowariancji jest

$$\hat{Cov}[X_i, X_j] = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j); \quad \bar{x}_l = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{lk}$$