17 Przedziały ufności

- zapis wyniku pomiaru:
$$\theta \pm u(\theta)$$
sugeruje, że rozkład błędów jest symetryczny;
- interpretacja statystyczna przedziału $[\theta - u(\theta), \theta + u(\theta)]$ zależy od rozkładu błędów:
$$P(\Theta \in [\theta - u(\theta), \theta + u(\theta)]) = q$$
$q = 0.68$ dla rozkładu normalnego; $q = 0.58$ dla rozkładu jednostajnego;
- jeśli rozkład błędów jest istotnie różny od rozkładu normalnego to korzystniej jest określić przedział $[\theta_-, \theta_+]$ wiarygodnych wartości wielkości Θ zamiast niepewności standardowej, $\theta \pm u(\theta)$.

Definicja 17.1 (Przedział ufności)**.**
Niech $x_1, x_2, \ldots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \ldots X_n$ a Θ będzie nieznanym parameterm. Jeśli istnieją statystyki $\Theta_- = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ oraz $\Theta_+ = g(X_1, X_2, \ldots X_n)$ takie, że
$$P(\Theta_- < \Theta < \Theta_+) = \alpha$$
dla każdej wartości Θ. Wtedy przedział
$$[\theta_-, \theta_+]$$
gdzie $\theta_- = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ oraz $\theta_+ = g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nazywamy przedziałem ufności dla Θ na poziomie ufności α. Centralnym przedziałem ufności nazywamy przedział ufności dla którego
$$P(\Theta > \Theta_+) = P(\Theta < \Theta_-) = \frac{1-\alpha}{2}$$

Twierdzenie 17.1 (Przedział ufności dla dowolnego parametru rozkładu)**.**
Niech x będzie realizacją zm. losowej X o znanym rozkładzie $P(X = x; \Theta)$; $F_X(x; \Theta)$. Wtedy
$$\frac{1-\alpha}{2} = P(\Theta < \Theta_-(X)) = P(X \geqslant x; \Theta_-) = 1 - F_X(x; \Theta_-) + P(X = x; \Theta_-)$$
$$\Rightarrow F_X(x; \Theta_-) - P(X = x; \Theta_-) = \frac{1+\alpha}{2}$$
$$\frac{1-\alpha}{2} = P(\Theta > \Theta_+(X)) = P(X \leqslant x; \Theta_+) = F_X(x; \Theta_+)$$
$$\Rightarrow F_X(x; \Theta_+) = \frac{1-\alpha}{2}$$

Uwaga: Dla zmiennej ciągłej $P(X = x; \Theta_-) = 0$

Przykład 17.1 (Przedział ufności dla dowolnego parametru rozkładu)**.**
W przeciągu godziny sklep odwiedziło $k = 1$ klientów. Zakładając, że ilość klientów odwiedzających sklep podlega rozkładowi Poissona, skonstruuj centralny przedział ufności dla parametr μ na poziomie ofności $\alpha = 0,95$.

Rozwiązanie.
$$\sum_{n=0}^{k-1} e^{-\mu_-} \frac{\mu_-^n}{n!} = \frac{1+\alpha}{2} \Rightarrow e^{-\mu_-} = 0,975 \Rightarrow \mu_- = 0,03$$
$$\sum_{n=0}^{k} e^{-\mu_+} \frac{\mu_+^n}{n!} = \frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow (1+\mu_+)e^{-\mu_+} = 0,025 \Rightarrow \mu_+ = 2,5$$
$$0,03 < \mu < 2.5$$

Twierdzenie 19.1 pozwala na konstrukcje przedziałów ufności dla dowolnych rozkładów zm. losowych również dla prób losowych. W tym wypadku należy zastąpić rozkład pr. odpowiednim łącznym rozkładem. W praktyce jednak w przypadku prób prostych korzystamy z "gotowych" wzorów opartych na statystykach podlegających typowym rozkładom prawdopodobieństwa.

17.1 Przedziały ufności dla wartości oczekiwanej

Rozkład normalny o znanej wariancji

Niech $x_1, x_2, \ldots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \ldots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o znanej wariancji).

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n); \quad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Niech

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(c_- < Z < c_+) \\
&= P(c_- < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < c_+) \\
&= P(c_- \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < c_+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \\
&= P(\bar{X} - c_+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - c_- \frac{\sigma}{\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

$$\Theta_- = \bar{X} - c_+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \Theta_+ = \bar{X} - c_- \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Przedział ufności:

$$\bar{x} - c_+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - c_- \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Centralny przedział ufności otrzymamy z warunku

$$P(Z > c_+) = P(Z < c_-) = \frac{1-\alpha}{2}$$

Definicja 17.2 (Wartość krytyczna standardowego rozkładu normalnego rzędu γ)**.**
Wartością krytyczną rzędu γ standardowego rozkładu normalnego nazywamy liczbę $z(\gamma)$

$$P(Z > z(\gamma)) = \gamma$$

Twierdzenie 17.2.

$$z(\gamma) = \Phi^{-1}(1-\gamma) = -z(1-\gamma)$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\gamma &= P(Z > z(\gamma)) \\
&= 1 - P(Z < z(\gamma)) \\
&= 1 - \Phi(z(\gamma)) \Rightarrow \\
\Phi(z(\gamma)) &= 1 - \gamma \Rightarrow \\
z(\gamma) &= \Phi^{-1}(1-\gamma)
\end{aligned}$$

□

Rozkład normalny o znanej wariancji

$$c_{+} = z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1-\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$
$$c_{-} = z\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = -z\left(1 - \frac{1+\alpha}{2}\right) = -z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = -c_{+}$$

Ostatecznie przedział ufności ma postać:

$$\bar{x} - z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Rozkład normalny o nieznanej wariancji

W przypadku gdy wariancja nie jest znana, zastępujemy ją nieobciążonym estymatorem $\hat{\sigma^2} = S^2$. Niestety zmienna losowa:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

nie podlega rozkładowi normalnemu.

Definicja 17.3 (Rozkład Studenta)**.**
Rozkładem Studenta o $n-1$ stopniach swobody nazywamy rozkład któremu podlega zmienna losowa:

$$T_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

gdzie zmienne losowe $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, ..., n$

Rozkład Studenta podobnie jak rozkład normalny jest rokładem symetrycznym. Zatem konstrukcja przedziału ufności przebiega analogicznie jak w przypadku znanej wariancji, przyczym zamiast wartości krytycznych standardowego rozkładu normalnego pojawiają się wartości krytyczne rozkładu Studenta $t(\gamma, n-1)$.
Niech $x_1, x_2, \ldots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \ldots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o nieznanej wariancji).

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n); \quad T_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Centralny przedział ufności:

$$\bar{x} - t\left(\frac{1-\alpha}{2}, n-1\right)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t\left(\frac{1-\alpha}{2}, n-1\right)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Gdzie $t(\gamma, n-1)$ jest wartościa krytyczną rzędu γ rozkładu Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Przedział ufności dla wartości oczekiwanej z licznej ($n > 100$) **próby prostej**

Niech $x_1, x_2, \ldots x_n$ będzie realizacją licznej ($n > 100$)) próby prostej $X_1, X_2, \ldots X_n$ z dowolnego rozkładu o wartości oczekiwanej μ i znanej lub nieznanej wariancji σ^2. W przypadku licznej próby możemy posłużyć się centralnym twierdzeniem granicznym.

$$\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n); \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1); \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

Zatem centralny przedział ufności ma postać:

$$\bar{x} - z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

lub w przypadku znanej wariancji:

$$\bar{x} - z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

W przypadku zm. losowej z rozkładu dwumianowego dokładna konstrukcja przedziału ufności wynika z twierdzenia 19.1.

Przedział ufności dla parametru p rozkład dwumianowego (o dużej wartości parametru n ($n > 100$))

W przypadku dużej wartości parametru n możemy posłużyć się przybliżeniem rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym Bin $(n, p) \approx N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$ Niech x będzie realizacją zm losowej X z rozkładu dwumianowego (o dużej wartości parametru $n > 100$)).

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx N(0,1)$$

$$-z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) < \frac{X/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$\left(\frac{X/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)^2 < z^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$(\bar{x} - p)^2 - z^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)p(1-p)/n < 0$$

pierwiastki wyznaczają przedział ufności.

17.2 Przedziały ufności dla wariancji

Rozkład normalny o znanej wartości oczekiwanej

Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o znanej wartości oczekiwanej μ).

$$U = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

Definicja 17.4 (Rozkład χ^2)**.**
Rozkładem $\chi^2(n)$ o n stopniach swobody nazywamy rozkład zmiennej losowej

$$U = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n)$$

gdzie $Y_i \sim N(0,1)$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(u_- < U < u_+) \\
&= P\left(u_- < \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < u_+ \right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{u_+} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{u_-} \right)
\end{aligned}
$$

Centralny przedział ufności otrzymamy z warunków:

$$P\left(u_- > U\right) = P\left(U > u_+\right) = \frac{1-\alpha}{2}$$

Rozkład χ^2 nie jest symetryczny, zatem obie wartości u_- i u_+ wyznaczamy z różnych wartości krytycznych rozkładu χ^2:

$$u_+ = u\left(\frac{1-\alpha}{2}, n\right); \quad u_- = u\left(\frac{1+\alpha}{2}, n\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{u(\frac{1-\alpha}{2}, n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{u(\frac{1+\alpha}{2}, n)}$$

Rozkład normalny o nieznanej wartości oczekiwanej

W przypadku gdy wartość oczekiwana μ nie jest znana, zastępujemy ją estymatorem $\bar{X}$.

Twierdzenie 17.3.
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o nieznanej wartości oczekiwanej).

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Zatem

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{u(\frac{1-\alpha}{2}, n-1)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{u(\frac{1+\alpha}{2}, n-1)}$$

17.3 Przedziały ufności dla dwóch prób normalnych

- Często porównujemy jakąś cechę z dwóch prób losowych.
- Wykład ograniczam tylko do prób losowych z rozkładu normalnego.
- Niech $\vec{x}_1$ będzie realizacją n_1-wymiarowego wektora losowego $\vec{X}_1$ przy czym $X_{1,i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$;

- Niech $\vec{x}_2$ będzie realizacją n_2-wymiarowego wektora losowego $\vec{X}_2$ przy czym $X_{2,i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;

Jeśli badaną cechą jest wartość oczekiwana to odpowiednią statystyką jest:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu = \mu_1 - \mu_2, \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Rozkłady normalne o znanych odchyleniach: σ_1, σ_2

Jeśli znane są: σ_1, σ_2 to znamy $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = (\sigma^\star)^2$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma^\star} \sim N(0, 1)$$

Zatem centralny przedział ufności na różnicę wartości oczekiwanych ma postać:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\sigma^\star < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\sigma^\star$$

Rozkłady normalne o nieznanych odchyleniach: σ_1, σ_2 ale $\sigma_1^2 = \eta\sigma_2^2$

Jeśli nie znamy: σ_1, σ_2 ale wiemy, że $\sigma_1^2 = \eta\sigma_2^2$ to

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \sigma_2^2\left(\frac{\eta}{n1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

musimy zastąpić estymatorem.

$$(S^\star)^2 = (\hat{\sigma}_2)^2\left(\frac{\eta}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

σ_2^2 estymujemy łącznie z próby pierwszej oraz drugiej jako średnia ważona (ilością stopni swobody) wariancji z prób.

Twierdzenie 17.4.
Jeśli wiemy, że $\sigma_1^2 = \eta\sigma_2^2$ to nieobciążonym estymatorem σ_2^2 o najmniejszej wariancji jest łączona wariancja z prób:

$$(\hat{\sigma}_2)^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2/\eta + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Twierdzenie 17.5.

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S^\star} \sim t(n^\star); \quad n^\star = n_1 + n_2 - 2$$

Zatem centralny przedział ufności na różnicę wartości oczekiwanych ma postać:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t\left(\frac{1-\alpha}{2}, n^\star\right)S^\star < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t\left(\frac{1-\alpha}{2}, n^\star\right)S^\star$$

Rozkłady normalne o nieznanych odchyleniach: σ_1, σ_2

Jeśli nie znamy: σ_1, σ_2 to $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ musimy zastąpić estymatorem.

Twierdzenie 17.6.
Nieobciążonym estymatorem $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ jest suma estymatorów wariancji wartości średnich $\bar{X}_1$ i $\bar{X}_2$:

$$(S^\dagger)^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$

σ_2^2 oraz σ_1^2 estymujemy rozłącznie a następnie sumujemy.

Niestety statystyka:

$$C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S^\dagger}; \quad \text{statystyka Cohrana-Coxa}$$

nie podlega rozkładowi Studenta. Zatem centralny przedział ufności ma postać:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1, n_2\right) S^\dagger < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + c\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1, n_2\right) S^\dagger$$

W praktyce wartości krytyczne rozkładu Cohrana-Coxa przybliżamy średnią ważoną wartości krytycznych rozkładu Studenta:

$$c\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1, n_2\right) \approx \frac{\frac{S_1^2}{n_1} t\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1 - 1\right) + \frac{S_2^2}{n_2} t\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_2 - 1\right)}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Uwaga: W przypadku gdy znany jest stosunek $\eta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ to oba estymatory $(S^\star)^2, (S^\dagger)^2$ są nieobciążone i mogą być podstawą poprawnej konstrukcji przedziału ufności na $\mu_1 - \mu_2$. Jednakże powinniśmy korzystać z przedziału ufności opartego na estymatorze $S^\star$ ponieważ ma on mniejszą wariancję.

Przedział ufności na stosunek wariancji

Definicja 17.5 (Rozkład Fishera)**.**
Rozkładem Fishera $F(n_1, n_2)$ o n_1, n_2 stopniach swobody nazywamy rozkład zmiennej losowej

$$F = \frac{U_1/n_1}{U_2/n_2}$$

gdzie U_1, U_2 są niezależnymi zm. losowymi: $U_1 \sim \chi^2(n_1)$ $U_2 \sim \chi^2(n_2)$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1); \quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P\left(f_- < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < f_+\right) \\
&= P\left(f_- \frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_+ \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) \\
&= P\left(\frac{S_1^2}{f_+ S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{f_- S_2^2}\right)
\end{aligned}
$$

Dla centralnego przedziału ufności:

$$
f_+ = f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right); \quad f_- = f\left(\frac{1+\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)
$$

Wartość krytyczną $f\left(\frac{1+\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$ wyrażamy poprzez wartość krytyczną $f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$

$$
F \sim F(n_1, n_2) \to \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1); \quad f(\alpha, n_1, n_2) = \frac{1}{f(1-\alpha, n_2, n_1)}
$$

$$
f_- = \frac{1}{f_+} = \frac{1}{f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right)}
$$

$$
\frac{1}{f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)} \frac{S_2^1}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right) \frac{S_1^2}{S_2^2}
$$