$$
\begin{aligned}
\alpha &= P\left(f_- < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < f_+\right) \\
&= P\left(f_- \frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_+ \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) \\
&= P\left(\frac{S_1^2}{f_+ S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{f_- S_2^2}\right)
\end{aligned}
$$

Dla centralnego przedziału ufności:

$$
f_+ = f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right); \quad f_- = f\left(\frac{1+\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)
$$

Wartość krytyczną $f\left(\frac{1+\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)$ wyrażamy poprzez wartość krytyczną $f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)$

$$
F \sim F(n_1, n_2) \to \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1); \quad f\left(\alpha, n_1, n_2\right) = \frac{1}{f\left(1-\alpha, n_2, n_1\right)}
$$

$$
f_- = \frac{1}{f_+} = \frac{1}{f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)}
$$

$$
\frac{1}{f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)} \frac{S_2^1}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < f\left(\frac{1-\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right) \frac{S_1^2}{S_2^2}
$$

17.4 Jednostronne przedziały ufności

Często interesuje nas jedynie dolne lub górne ograniczenie na wiarygodne wartości parametru Θ.

Definicja 17.6 (Jednostronny przedział ufności)**.**
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ a Θ będzie nieznanym parameterm. Jeśli istnieją statystyki $\Theta_- = f(X_1, X_2, \dots X_n)$ oraz $\Theta_+ = g(X_1, X_2, \dots X_n)$ takie, że

$$P(\Theta < \Theta_+) = \alpha; \quad P(\Theta > \Theta_-) = \alpha$$

dla każdej wartości Θ, wtedy przedziały

$$[-\infty, \theta_+]; \qquad [\theta_-, \infty]$$

gdzie $\theta_- = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ oraz $\theta_+ = g(x_1, x_2, \dots x_n)$ nazywamy jednostronnymi przedziałami ufności dla Θ na poziomie ufności α.

Jednostronne przedziały ufności można łatwo utworzyć z centralnych przedziałów ufności, zamieniając wartości krytyczne rzędu $\frac{1-\alpha}{2}$ na rzędu $1-\alpha$ a rzędu $\frac{1+\alpha}{2}$ na rzędu α

Przykład 17.2.
Centralny przedział ufności na poziomie uf. α:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{u(\frac{1-\alpha}{2}, n-1)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{u(\frac{1+\alpha}{2}, n-1)}$$

Jednostronne przedziały ufności na poziomie uf. α:

$$\sigma^2 > \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{u(1-\alpha, n-1)}$$

$$\sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{u(\alpha, n-1)}$$

18 Testowanie hipotez statystycznych

Do tej pory poznaliśmy metody statystyczne pozwalające numerycznie określić:

- wiarygodne wartości parametrów założonych rozkładów (estymatory)
- przedziały wiarygodnych wartości (przedziały ufności).

Często zachodzi konieczność wyciągnięcia wniosków statystycznych polegających na wyborze pomiędzy dwoma wykluczającymi się teoriami (hipotezami).

- Jeśli hipotezy te dotyczą wartości parametrów założonego rozkładu to nazywamy je testami parametrycznymi
- W przeciwnym wypadku są to testy nieparametryczne . Np. czy próba losowa pochodzi z rozkładu Poissona?

Definicja 18.1 (Statystyka testowa)**.**
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$. Statystyką testową nazywamy statystykę $T = h(X_1, X_2, \dots X_n)$ której wartość dla tej próby $t = h(x_1, x_2, \dots x_n)$ jest podstawą do podjęcia decyzji o odrzuceniu hipotezy H_0

- W najprostszym przypadku testujemy hipotezę $H_0 \ : \ \theta = \theta_0$ wobec hipotezy alternatywnej będącej zaprzeczeniem hipotezy zerowej $H_1 \ : \quad \theta \neq \theta_0$
- W ogólnym przypadku hipotezą alternatywną może być dowolna (wykluczająca H_0) hipoteza H_1.

Definicja 18.2 (Błąd I i II rodzaju)**.**

- Błąd I rodzaju popełniamy jeśli błędnie odrzucimy hipotezę H_0 (H_0 jest hipotezą prawdziwą).
- Błąd II rodzaju popełniamy jeśli błędnie nie odrzucimy hipotezy H_0 (H_1 jest hipotezą prawdziwą).

Podjęcie decyzji o odrzuceniu hipotezy zawsze jest kompromisem pomiędzy prawdopodobieństwem popełnienia błędu I rodzaju a pr. popełnienia błędu II rodzaju.

Definicja 18.3 (Poziom istotności testu)**.**
Poziomem istotności testu, α, nazywamy maksymalnie dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju.

Definicja 18.4 (Zbiór krytyczny)**.**
Załóżmy, że testujemy hipotezę H_0 wobec hipotezy H_1 , na poziomie itotności α, korzystając ze statystyki testowej T. Zbiór $C \in \mathbb{R}$ wartości statystyki T dla których odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1 nazywamy zbiorem krytycznym testu.

Dokładna postać zbioru krytycznego zależy od poziomu istotności testu oraz rozkładu statystyki testowej:

1. $P(T \in C|H_0) \leqslant \alpha$
2. $P(T \notin C|H_1)$ osiąga minimum

Jeśli $T \in C$ to odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1 w przeciwnym wypadku nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.
Uwaga:

- Aby spełniony był warunek 1 musimy znać rozkład statystyki testowej przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0.
- Aby spełnić warunek 2 często wystarczy skorzystać z symetrii problemu i określić kształt zbioru krytycznego na drodze logicznego rozumowania.

Ogólna procedura przeprowadzania testów statystycznych:

- Postaw hipotezę H_0 oraz hipotezę alternatywną H_1;
- Zaproponuj statystykę testową T, której rozkład jest znany przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0.
- Wybierz poziom istotności testu oraz określ zbiór krytyczny tak aby spełnione były warunki 1 i 2;
- Określ wartość statystyki i porównaj z obszarem krytycznym.

Przykład 18.1 (Test wartości oczekiwanej rozkładu normalnego)**.**
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o znanej wariancji σ^2).

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \text{jeśli } H_0 \text{ jest prawdziwa}$$

Zbiorem krytycznym spełniającym warunek 2 jest:

- dla $H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad C = (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

- dla $H_1 : \mu > \mu_0 \quad C = (c_1, \infty)$
- dla $H_1 : \mu < \mu_0 \quad C = (-\infty, -c_2)$

Wartości c, c_1, c_2 wyznaczamy z warunku 1:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(T \in C) \\ &= 1 - P(T \notin C) \\ &= 1 - P(T \in (-c, c)) \\ 1 - \alpha &= P(T \in (-c, c)) \end{aligned}$$

Zatem

$$c = z(\alpha/2) \quad c_1 = c_2 = z(\alpha)$$

- dla $H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad C = (-\infty, -z(\alpha/2)) \cup (z(\alpha/2), \infty)$
- dla $H_1 : \mu > \mu_0 \quad C = (z(\alpha), \infty)$
- dla $H_1 : \mu < \mu_0 \quad C = (-\infty, -z(\alpha))$

Przykład 18.2 (Test wartości oczekiwanej rozkładu normalnego)**.**
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o znanej wariancji σ^2).

1. $H_0 : \mu_1 < \mu < \mu_2; \quad H_1 : \mu < \mu_1 || \mu > \mu_2$
2. $H_0 : \mu < \mu_1 || \mu > \mu_2; \quad H_1 : \mu_1 < \mu < \mu_2$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu^\star}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \text{jeśli } H_0 \text{ jest prawdziwa}$$

gdzie $\mu^\star = (\mu_1 + \mu_2)/2$

Zbiorem krytycznym spełniającym warunek 2 jest:

1. $C = (-\infty, -k_\alpha) \cup (k_\alpha, \infty)$
2. $C = (-v_\alpha, v_\alpha)$

gdzie k_α i v_α dane są przez:

$$\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma/\sqrt(n)} + k(\alpha)\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma/\sqrt(n)} - k(\alpha)\right) = 1 - \alpha$$

$$\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma/\sqrt(n)} + v(\alpha)\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma/\sqrt(n)} - v(\alpha)\right) = \alpha$$

gdzie

$$\Delta = (\mu_2 - \mu_1)/2$$

Przykład 18.3 (Test wartości oczekiwanej rozkładu normalnego)**.**
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o nieznanej wariancji).

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{jeśli } H_0 \text{ jest prawdziwa}$$

Zbiorami krytycznymi są:

- dla $H_1 : \mu \neq \mu_0$ $\quad C = (-\infty, -t(\alpha/2, n-1)) \cup (t(\alpha/2, n-1), \infty)$
- dla $H_1 : \mu > \mu_0$ $\quad C = (t(\alpha, n-1), \infty)$
- dla $H_1 : \mu < \mu_0$ $\quad C = (-\infty, -t(\alpha, n-1))$

Przykład 18.4 (Test wariancji rozkładu normalnego).
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o znanej wartości oczekiwanej μ).

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$T = \sum \frac{(X-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n) \quad \text{jeśli } H_0 \text{ jest prawdziwa}$$

Zbiorami krytycznymi są:

- dla $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\quad C = (0, u(1-\alpha/2, n)) \cup (u(\alpha/2, n), \infty)$
- dla $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\quad C = (u(\alpha, n), \infty)$
- dla $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ $\quad C = (0, u(1-\alpha, n))$

Przykład 18.5 (Test wariancji rozkładu normalnego).
Niech $x_1, x_2, \dots x_n$ będzie realizacją próby losowej $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ (o nieznanej wartości oczekiwanej).

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$T = \sum \frac{(X-\bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{jeśli } H_0 \text{ jest prawdziwa}$$

Zbiorami krytycznymi są:

- dla $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\quad C = (0, u(1-\alpha/2, n-1)) \cup (u(\alpha/2, n-1), \infty)$
- dla $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\quad C = (u(\alpha, n-1), \infty)$
- dla $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ $\quad C = (0, u(1-\alpha, n-1))$

Estymacja i testowanie współczynnika korelacji
W przypadku pary zm. los. (X, Y) istotnym parametrem jest współczynnik korelacji

$$\rho = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}}$$

Definicja 18.5 (współczynnik korelacji z próby). Niech $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu dwuwymiarowego, współczynnikiem korelacji z próby nazywamy:

$$R = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2 \sum\limits_{k=1}^{n} (Y_k - \bar{Y})^2}}$$

W obliczeniach korzystamy ze wzoru:

$$R = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k Y_k) - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 - n\bar{X}^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k^2 - n\bar{Y}^2\right)}}$$

- R jest asymptotycznie nieobciążonym i zgodnym estymatorem współczynnika korelacji.
- w ogólnym przypadku nie znamy jego rozkładu;
- nie możemy oszacować jego niepewności;
- nie może być podstawą konstrukcji przedziału ufności;
- znamy jego rozkład tylko dla dwuwymiarowego rozkładu normalnego o $\rho = 0$
- lub dla dużej próbki.

Twierdzenie 18.1 (rozkład współczynnika korelacji)**.**
Niech $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ będzie próbą prostą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego z $\rho = 0$, wtedy statystyka:

$$T = \frac{(n-2)R}{\sqrt{1-R^2}}$$

podlega rozkładowi Studenta o $n-2$ stopniach swobody.

Przykład 18.6 (Test współczynnika korelacji)**.**
Niech $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ będzie realizacją próby losowej $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ z dwuwymiarowego rozkładu normalnego.

$$H_0 : \rho = 0$$

$$T = \frac{(n-2)R}{\sqrt{1-R^2}} \sim t_{(n-2)}$$

Zbiorami krytycznymi są:

- dla $H_1 : \rho \neq 0 \quad C = (-\infty, -t(\alpha/2, n-2)) \cup (t(\alpha/2, n-2), \infty)$
- dla $H_1 : \rho > 0 \quad C = (t(\alpha, n-2), \infty)$
- dla $H_1 : \rho < 0 \quad C = (-\infty, -t(\alpha, n-2))$

Twierdzenie 18.2 (rozkład współczynnika korelacji)**.**
Niech $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ będzie próbą prostą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego z dowolnym ρ , wtedy statystyka:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R}$$

dla dużej próby podlega rozkładowi normalnemu o $\mu = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$ i $\sigma^2 = \frac{1}{n-3}$.

Przykład 18.7 (Test współczynnika korelacji)**.**
Niech $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ będzie realizacją licznej próby losowej $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ z dwuwymiarowego rozkładu normalnego.

$$H_0 : \rho = \rho_0$$

$$z = \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$$

Zbiorami krytycznymi są:

- dla $H_1 : \rho \neq \rho_0 \quad C = (-\infty, -z(\alpha/2)) \cup (z(\alpha/2), \infty)$
- dla $H_1 : \rho > \rho_0 \quad C = (z(\alpha), \infty)$
- dla $H_1 : \rho < \rho_0 \quad C = (-\infty, -z(\alpha))$