3 Kombinatoryka

Prawdopodobieństwo kombinatoryczne zdarzenia A wymaga obliczenia ilości zdarzeń elementarnych sprzyjających temu zdarzeniu oraz liczebności przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Ich 'ręczne' liczenie jest niepraktyczne. Dlatego stosowanie tego twierdzenia wymaga wypracowania technik obliczania liczebności konkretnych zbiorów zdarzeń elementarnych. Dział matematyki zajmujący się tymi zagadnieniami nazywamy **kombinatoryką**.

- Większość zagadnień kombinatorycznych daje się sprowadzić do kilku sposobów wybierania rozróżnialnych elementów z n-elementowego zbioru np. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;
- Wszystkie obiekty makroświata są potencjalnie rozróżnialne;
- Takie same obiekty możemy ponumerować dzięki czemu stają się rozróżnialne;
- Jeśli po wykonaniu eksperymentu nie będziemy zwracać uwagi na numeracje, to musimy dojść do tych samych wyników które otrzymamy bez rozróżniania takich samych obiektów.
- Nierozróżnialne obiekty pojawiają się w mechanice kwantowej.

Twierdzenie 3.1 (Eksperyment k-stopniowy)**.**
Jeśli jakiś eksperyment można przedstawić jako k-stopniową procedurę, przy czym i-ta operacja może być wykonana na l_i $(i = 1, \dots, k)$ sposobów to eksperyment można wykonać na $l_1 l_2 \cdots l_k$ sposobów.

Przykład 3.1 (Czterocyfrowe liczby parzyste)**.**
Ile jest różnych czterocyfrowych liczb parzystych. Należy założyć, że zero nie występuje na pierwszym miejscu a każda cyfra może się powtarzać dowolną ilość razy.

Rozwiązanie.
Kolejne cyfry możemy wybrać na 9,10,10 i 5 sposobów zatem:

$$\text{Liczba parzystych liczb czterocyfrowych} = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$$

Definicja 3.1 (Wariacje z powtórzeniami)**.**
Uporządkowany ciąg k-elementów wybranych ze zbioru A ze zwracaniem nazywamy k-wyrazową wariacją z powtórzeniami.

Twierdzenie 3.2 (Wariacje z powtórzeniemi)**.**
Liczba możliwych k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami elementów zbioru n-elementowego wynosi

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

Dowód.
Jest to k-stopniowy eksperyment. i-ta operacja może być wykonana na $l_i = n$ sposobów.

$$\overline{V}_n^k = l_1 \cdot l_2 \cdots l_k = n^k$$

□

Przykład 3.2 (Liczba aminokwasów)**.**
Każda trójka spośród czterech nukleotydów A, C, T i G koduje jeden aminokwas w łańcuchu nici DNA. Ile jest możliwych *a priori* różnych aminokwasów?

Rozwiązanie.
Każda 3-wyrazowa wariacja z powtórzeniami ze zbioru czterech nukleotydów $A = \{A, C, T, G\}$ potencjalnie koduje jeden aminokwas. Ich liczba wynosi zatem $\overline{V}_4^3 = 4^3 = 64$

Definicja 3.2 (Wariacje bez powtórzeń)**.**
Uporządkowany ciąg k-elementów wybranych ze zbioru A bez zwracania nazywamy k-wyrazową wariacją bez powtórzeń.

Twierdzenie 3.3 (Wariacje bez powtórzeń)**.**
Liczba możliwych k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru n-elementowego wynosi

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dowód.
Jest to k-stopniowy eksperyment. i-ta operacja może być wykonana na $l_i = n - i + 1$ sposobów.

$$V_n^k = l_1 \cdot l_2 \cdots l_k = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□

Definicja 3.3 (Permutacje bez powtórzeń)**.**
Jeśli $k = n$ to wybieranie bez zwracania wyczerpuje wszystkie elementy zbioru n-elementowego.
Wariacje n-wyrazowe bez powtórzeń elementów ze zbioru n-elementowego nazywamy permutacjami bez powtórzeń.

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Definicja 3.4 (Permutacje z powtórzeniami)**.**
Uporządkowany ciąg k-elementów wybranych ze zbioru A, przy czym kolejne elementy zbioru A powtarzają się odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_n$ razy ($k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$), nazywamy k-wyrazową permutacją z powtórzeniami odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_n$-krotnymi kolejnych elementów zbioru A.

- W wariacjach z powtórzeniami elementy zbioru mogą się powtarzać dowolną ilość razy;
- W permutacjach z powtórzeniami krotności każdego elementu są ściśle określone.

Przykład 3.3 (Słowo STATYSTYKA)**.**
Ile różnych słów można ułożyć ze zbioru $A = \{S, T, A, Y, K\}$ w których kolejne litery powtarzają się dokładnie $2, 3, 2, 2, 1$-razy?

Rozwiązanie.
Rozważmy permutacje bez powtórzeń 10-literowego zbioru rozróżnialnych liter:

$$B = \{S_1, S_2, T_1, T_2, T_3, A_1, A_2, Y_1, Y_2, K_1\}$$

gdzie te same litery zostały ponumerowane.
Po usunięciu numerów przykładową permutacją (z powtórzeniami) jest słowo

$$STATYSTYKA$$

Słowo STATYSTYKA pojawi się $2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!$ razy wśród permutacji elementów zbioru B. Zatem liczba permutacji z powtórzeniami zbioru A wynosi:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!}$$

Twierdzenie 3.4 (Permutacje z powtórzeniami).
Liczba możliwych k-wyrazowych permutacji n-elementowego zbioru z powtórzeniami, odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_n$-krotnymi kolejnych elementów tego zbioru wynosi ($k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$)

$$P_k^{k_1,k_2,\dots,k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Dowód.

- Permutacje z powtórzeniami $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_n$-krotne zastępujemy:
- permutacjami bez powtórzeń $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$, gdzie k_i rozróżnialnych elementów zbioru B odpowiada elementowi a_i; $\quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$
- Każda permutacja z powtórzeniami zbioru A powtarza się $k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!$-krotnie wśród permutacji bez powtórzeń zbioru B. Zatem
$$P_k^{k_1,k_2,\dots,k_n} = \frac{P_k}{P_{k_1} \cdot P_{k_2} \cdots P_{k_n}} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

□

Definicja 3.5 (Kombinacje bez powtórzeń).
Każdy k-elementowy podzbiór zbioru A wybrany (w dowolnej kolejności) bez zwracania nazywamy kombinacją bez powtórzeń.

Twierdzenie 3.5 (Kombinacje bez powtórzeń).
Liczba możliwych kombinacji bez powtórzeń k-elementowych ze zbioru n-elementowego wynosi

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Dowód.

- Każda k-wyrazowa wariacja bez powtórzeń określa jednoznacznie k-elementowy zbiór wybrany w jakimś porządku;
- Liczba sposobów wyboru tych samych k-elementów jest dana przez liczbę permutacji zbioru k-elementowego;
- Każdej kombinacji k-elementowej odpowiada $k!$ wariacji k-wyrazowych bez powtórzeń.

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Przykład 3.4 (Ilość płaszczyzn).
Ile różnych płaszczyzn można poprowadzić w przestrzeni trójwymiarowej przez cztery punkty, nie leżące w jednej płaszczyźnie?

Rozwiązanie.
Każda trójka punktów wyznacza jedną płaszczyznę. Rożnych płaszczyzn jest

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4$$

Definicja 3.6 (Kombinacje z powtórzeniami).
k-elementową kombinacją z powtórzeniami elementów zbioru A nazywamy k-elementowy multizbiór złożony z elementów zbioru A. Multizbiór to rozszerzenie pojęcia zbioru w którym każdy element może występować wiele razy.

Przykład 3.5 (kombinacje z powtórzeniami)**.**
Jakie są możliwe wyniki rzutu trzema monetami ?

Rozwiązanie.
3-elementowymi kombinacjami z powtórzeniami zbioru $A = \{O, R\}$ są multizbiory:

$$\{O, O, O\}; \{O, O, R\}; \{O, R, R\}; \{R, R, R\}$$

Rozwiązanie.
3-elementowe kombinacje z powtórzeniami elementów zbioru 2-elementowego $A = \{O, R\}$ to różne sposoby rozmieszczenia 3 takich samych kulek w 2 pudełkach

$$\{O, O, O\} = | \circ \circ \circ ||; \quad \{O, O, R\} = | \circ \circ | \circ |$$

$$\{O, R, R\} = | \circ | \circ \circ |; \quad \{R, R, R\} = || \circ \circ \circ |$$

Ich liczebność to ilość możliwych rozmieszczeń trzech kulek na czterech dostępnych pozycjach:

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4$$

Twierdzenie 3.6 (kombinacje z powtórzeniami)**.**
Liczba możliwych k-elementowych kombinacji z powtórzeniami elementów zbioru n-elemenetowego wynosi

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Dowód.

- Na ile sposobów k takich samych kul można powkładać do n pudełek? Liczba kul w i-tym pudełku oznacza liczbę powtórzeń i-tego elementu zbioru A w kombinacji z powtórzeniami.
- ciąg k kul i $n + 1$ kresek $| \circ \circ || \circ \circ \circ \circ | \circ | \cdots |$
- Ilość możliwych sposobów rozmieszczeń k kul na $n + k - 1$ możliwych pozycjach:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

□

4 Przestrzenie równie prawdopodobnych zdarzeń elementarnych

Jeśli już umiemy przeliczać zbiory zdarzeń elementarnych to drugą trudnością jaką możemy napotkać korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie kombinatorycznym to upewnienie się, że spełnione są założenia tego twierdzenia czyli czy zdarzenia elementarne są równie prawdopodobne.

Twierdzenie 4.1 (Eksperyment k-stopniowy)**.**
Jeśli jakiś eksperyment można przedstawić jako k-stopniową procedurę, przy czym i-ta operacja może być wykonana na l_i $(i = 1, \ldots, k)$ równie prawdopodobnych sposobów to eksperyment można wykonać na $l_1 l_2 \cdots l_k$ równie prawdopodobnych sposobów.

Równie prawdopodobne zdarzenia elementarne to uporządkowane ciągi wyników kolejnych stopni eksperymentu.

Twierdzenie 4.2 (Wariacje, permutacje i kombinacje bez powtórzeń)**.**
Jeśli przy każdym wybieraniu z n-elementowego zbioru o którym mowa w definicji wariacji, permutacji lub kombinacji bez powtórzeń, wybranie konkretnego elementu jest równie prawdopodobne jak pozostałych to zdarzenia elementarne będące wariacjami (permutacjami lub kombinacjami bez powtórzeń) są równie prawdopodobne.

Dowód.

- wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń oraz permutacje bez powtórzeń to uporządkowane ciągi wyników kolejnych stopni eksperymentu k-stopniowego. Zatem są równie prawdopodobne;
- każdej permutacji z powtórzeniami odpowiada taka sama liczba ($k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!$) równie prawdopodobnych permutacji bez powtórzeń
$$P_k^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{P_k}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$
- każdej kombinacji bez powtórzeń odpowiada taka sama liczba ($k!$) równie prawdopodobnych wariacji bezpowtórzeń
$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!}$$

□

Uwaga:
Na ogół kombinacjom z powtórzeniami odpowiadają różne liczby równie prawdopodobnych uporządkowanych ciągów wyników kolejnych losowań. Zatem kombinacje z powtórzeniami na ogół nie są równie prawdopodobne.

Przykład 4.1 (dwukrotny rzut monetą)**.**
Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania jednego orła i jednej reszki w rzucie dwoma monetami.

Rozwiązanie.

- Losujemy ze wzracaniem dwa elementy ze zbioru $A = \{O, R\}$.
- Wariacje z powtórzeniami są równie prawdopodobne
$$\Omega = \{(O,R); (O,O); (R,R); (R,O)\}$$
$$P(\{O,R\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
- Nie interesuje nas kolejność w jakiej wypada orzeł i reszka
$$\Omega' = \{\{O,O\}; \{O,R\}; \{R,R\}\} \quad P(\{O,R\}) \neq \frac{1}{3}$$
Kombinacje z powtórzeniami nie są równie prawdopodobne.

Przykład 4.2 (Wybieranie kul z pudełka)**.**
W pudełku znajduje się b białych i c czarnych kul. Wyciągamy kolejno losowo n kul z pudełka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich jest dokladnie k kul czarnych? Rozpatrzmy losowanie bez zwracania oraz ze wzracaniem.

Rozwiązanie. Bez zwracania
Nie interesuje nas kolejność a kule się nie powtarzają zatem zdarzeniami elementarnymi równie prawdopodobnymi będa kombinacje bez powtórzeń.

$$P(k \text{ czarnych}) = \frac{C_c^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{c+b}^n} = \frac{\binom{c}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{c+b}{n}}$$

gdzie C_c^k jest ilością możliwych wyborów k kul z pośród c kul czarnych, C_b^{n-k} jest ilością możliwych wyborów pozostałych $n-k$ kul z pośród b kul białych a C_{c+b}^n jest ilością możliwych wyborów n kul z pośród $c+b$ kul.

Rozwiązanie. Ze zwracaniem
Można sobie pomyśleć, że kule mogą się powtarzać zatem zderzeniami elementarnymi będą kombinacje z powtórzeniami

$$P(k \text{ czarnych}) = \frac{\overline{C}_c^k \cdot \overline{C}_b^{n-k}}{\overline{C}_{c+b}^n}$$

Jest to błąd bo kombinacje z powtórzeniami na ogół nie są równie prawdopodobne. Aby rozwiązać problem losowania ze zwracaniem należy założyć potencjalną rozróżnialność kulek i przedstawić proces losowania jako n-stopniowy eksperyment którego równie prawdopodobnymi zdarzeniami elementarnymi są uporządkowane wyniki kolejnych losowań, czyli wariacjami z powtórzeniami.

$$P(k \text{ czarnych}) = \frac{\overline{V}_c^k \cdot \overline{V}_b^{n-k} \cdot C_n^k}{\overline{V}_{c+b}^n} = \frac{c^k b^{n-k}\binom{n}{k}}{(c+b)^n}$$

Iloczyn $\overline{V}_c^k \cdot \overline{V}_b^{n-k}$ określa liczbę możliwych uporządkowań kul czarnych oraz (osobno) kul białych. Musimy jeszcze uwzględnić różne możliwość rozmieszczeń k kul czarnych pośród $n-k$ kul białych ich liczba jest ilością kombinacji bez powtórzeń C_n^k.

Rozwiązanie.
Ostatni wzór z powyższego przykładu możemy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}
P(k \text{ czarnych}) &= \frac{c^k b^{n-k}\binom{n}{k}}{(c+b)^n} \\
&= \left(\frac{c}{c+b}\right)^k \left(\frac{b}{c+b}\right)^{n-k} \binom{n}{k} \\
&= \left(\frac{c}{c+b}\right)^k \left(1 - \frac{c}{c+b}\right)^{n-k} \binom{n}{k} \\
&= p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

gdzie $p = \frac{c}{c+b}$ jest prawdopodobieństwem wylosowania czarnej kuli w pojedynczym losowaniu. Rozkład taki nazywamy rozkładem dwumianowym i określa on prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n niezależnych próbach, z których każda ma stałe prawdopodobieństwo sukcesu równe p. Tutaj przez sukces rozumiemy wylosowanie kuli czarnej.

Przykład 4.3 (Układy kart w pokerze)**.**
Standardowa talia do gry w pokera składa się z 52 kart. Każda karta ma dwie cechy: wartość (jest ich 13) oaz kolor (jest ich 4). Gracz otrzymuje 5 kart które się nie powtarzają a ich kolejność losowania nie jest istotna. Zatem równie prawdopodobnymi zdarzeniami elementarnymi będę kombinacje bez powtórzeń 5 elementowe ze zbioru 52 elementowego.

$$\overline{\Omega} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

Jakie są prawdopodobieństwa otrzymania w pojedyńczym losowaniu punktowanych układów kart?

Rozwiązanie.

- para kart tej samej wartości, pozostałe karty mają różne wartości.

$$P(1 \text{ para}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}} \approx 0,423$$

  - $\binom{13}{1} = 13$ liczba możliwych wartości tworzących parę
  - $\binom{4}{2}$ liczba możliwych kombinacji kolorów wybranej pary
  - $\binom{12}{3}$ liczba możliwych kombinacji wartości pozostałych trzech kart
  - $\binom{4}{1} = 4$ liczba możliwych kolorów każdej z pozostałych kart

- dwie pary o różnych wartościach, pozostała karta musi mieć inna wartość.

$$P(2 \text{ pary}) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \cdot \binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} \approx 0,0475$$

  - $\binom{13}{2}$ liczba możliwych kombinacji wartości tworzących dwie pary
  - $\binom{4}{2}$ liczba możliwych kombinacji kolorów w każdej pary
  - $\binom{11}{1} = 11$ liczba możliwych wartości pozostałej karty
  - $\binom{4}{1} = 4$ liczba możliwych kolorów pozostałej karty

- strit, pięć kolejnych co do wartości kart, ale nie tego samego koloru bo to już poker. Kombinacja A,2,3,4,5 też jest stritem.

$$P(\text{strit}) = \frac{10(\binom{4}{1}^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0,00392$$

  - 10 - liczba możliwych kombinacji wartości kart w stricie (najniższa kartą w stricie może być: A,2,...,10
  - $\binom{4}{1} = 4$ liczba możliwych kolorów każdej karty w stricie
  - 4 - liczba kombinacji kolorów prowadzących do pokera