5 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 5.1 (Prawdopodobieństwo warunkowe)**.**
Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B nazywamy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{jeśli} \;\; P(B) > 0$$

Definicja ta jest zgodna z interpretacją częstościową prawdopodobieństwa. Dla skończonej ilości N wyników eksperymentu losowego

$$P(A|B) \approx \frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{N_{A\cap B}/N}{N_B/N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Przykład 5.1 (Prawdopodobieństwo warunkowe)**.**
Znajdź prawdopodobieństwo warunkowe, że rodzina posiadająca dwójkę dzieci ma dwójkę chłopców wiedząc, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem.

Rozwiązanie.

$$\Omega = \{(D, C); (D, D); (C, D); (C, C)\}$$

gdzie na pierwszym miejscu umieściliśmy dziecko starsze.

$$P(A - \text{dwóch chłopców}) = \frac{1}{4}$$

$$P(B - \text{przynajmniej jeden chłopiec}) = \frac{3}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Przykład 5.2 (Prawdopodobieństwo warunkowe)**.**
Znajdź prawdopodobieństwo warunkowe, że rodzina posiadająca dwójkę dzieci ma dwójkę chłopców wiedząc, że starsze jest chłopcem.

Rozwiązanie.

$$\Omega = \{(D, C); (D, D); (C, D); (C, C)\}$$

gdzie na pierwszym miejscu umieściliśmy dziecko starsze.

$$P(A - \text{dwóch chłopców}) = \frac{1}{4}$$

$$P(B - \text{starszy chłopiec}) = \frac{2}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

Przykład 5.3 (Prawdopodobieństwo warunkowe)**.**
Znajdź prawdopodobieństwo warunkowe, że rodzina posiadająca dwójkę dzieci ma dwójkę chłopców wiedząc, że pierwsze które nam przedstawiono jest chłopcem.

Rozwiązanie.

$$\Omega = \{(D,C);(D,D);(C,D);(C,C)\}$$

gdzie na pierwszym miejscu umieściliśmy dziecko które nam pierwsze przedstawiono.

$$P(A - \text{dwóch chłopców}) = 1/4$$
$$P(B - \text{pierwsze przedstawiono chłopca}) = 2/4$$
$$P(A|B) = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie (inny sposób)**.**

$$\Omega' = \left\{ \begin{array}{llll} (D^\star,C); & (D,C^\star); & (D^\star,D); & (D,D^\star); \\ (C^\star,D); & (C,D^\star); & (C^\star,C); & (C,C^\star) \end{array} \right\}$$

gdzie na pierwszym miejscu umieściliśmy dziecko starsze a to które nam pierwsze przedstawiono oznaczono gwiazdką.

$$P(A) = 2/8 \qquad P(B) = 4/8$$
$$P(A|B) = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

W przykładzie 5.1 warunek wyeliminował z przestrzeni zdarzeń elementarnych tylko jedno zdarzenia, podczas gdy w przykładach 5.2 i 5.3 warunek eliminuje połowę zdarzeń elementarnych.

Twierdzenie 5.1 (Prowdopodobieństwo iloczynu zdarzeń)**.**

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad \textit{o ile} \;\; P(B) > 0$$

- twierdzenie to wynika wprost z definicji pr. warunkowego;
- obliczenie pr. $P(A|B)$ i $P(B)$ jest często łatwiejsze niż bezpośrednie obliczenie pr. $P(A \cap B)$.

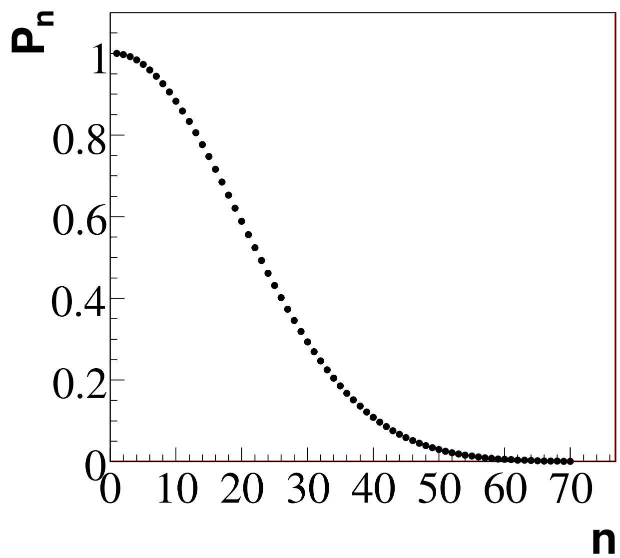
Przykład 5.4 (Brak koincydencji dnia urodzin)**.**
Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie n losowo wybranych osób wszyscy urodzili się w innym dniu roku?

Rozwiązanie.
Na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie kombinatorycznym moglibyśmy stwierdzić, że prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$$P = \frac{V_{365}^n}{\overline{V}_{365}^n} = \frac{365!}{(365-n)!365^n}$$

Niemniej jednak wykorzystajmy prawdopodobieństwo warunkowe do rozwiązania tego problemu.
B_k - w grupie k osób wszyscy urodzili się w innym dniu
A_{k+1} - $k+1$ osoba urodziła się w innym dniu niż pozostałe k.
$P(B_1) = 365/365$
Dla grupy dwóch osób prawdopodobieństwo takie wynosi:
$P(B_2) = P(A_2 \cap B_1) = P(A_2|B_1) \cdot P(B_1) = 364/365 \cdot 365/365$
Dla grupy trzech osób prawdopodobieństwo takie wynosi:
$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2) \cdot P(B_2) = 363/365 \cdot 364/365 \cdot 365/365$
Dla grupy n osób prawdopodobieństwo takie wynosi:

$$\begin{aligned} P(B_n) = P(A_n \cap B_{n-1}) &= P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) \\ &= \frac{365-(n-1)}{365} \cdots \frac{363}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{365}{365} = \frac{365!}{(365-n)!365^n} \end{aligned}$$



Rysunek 3: Zależność prawdopodobieństwa braku koincydencji dnia urodzin w grupie n osób od liczebności tej grupy.

Twierdzenie 5.1 można łatwo uogólnić na większą liczbę zdarzeń

Twierdzenie 5.2 (Prawdopodobieństwo iloczynu wielu zdarzeń)**.**
Dla dowolonych zdarzeń losowych $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \\ & \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \\ & \quad \ldots \\ & \quad P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

o ile $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$

Dowód. Twierdzenie to wynika z wielokrotnego zastosowania twierdzenia 5.1 □

Przykład 5.5.
W pudełku mamy n kul wśród których jest jedna biała a reszta jest czarna. Wybieramy kule z pudełka bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w k-tym losowaniu?

Rozwiązanie.
A_i - w i-tym losowaniu wybrano kulę czarną
B_i - w i-tym losowaniu wybrano kulę białą

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap B_k$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(B_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \cdot \frac{1}{n-(k-1)} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w każdym losowaniu jest takie samo.

Twierdzenie 5.3 (Prawdopodobieństwo całkowite)**.**
Niech $C_1, C_2, \dots \subset \Omega$

- $P(C_i) > 0 \quad i = 1, 2, ...$
- C_i *i* C_j *są rozłączne* $i \neq j$
- $C_1 \cup C_2 \cup \dots = \Omega$

wtedy, dla dowolnego $A \subset \Omega$ *zachodzi:*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) \cdot P(C_i) \end{aligned}$$

Dowód.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) \\ &= P(A \cap (C_1 \cup C_2 \cup \cdots)) \\ &= P((A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \cdots) \\ &= P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \cdots \\ &= P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots \end{aligned}$$

□

Przykład 5.6.
Dane są trzy identyczne pudełka, o których wiadomo, że w jednym znajdują się dwie kule białe, w drugim jedna kula czarna i jedna biała a w trzecim dwie kule czarne. Do losowo wybranego pudełka dodajemy kulę białą a następnie losujemy z niego jedną kulę. Jakie jest pr., że wylosowano kulę białą?

Rozwiązanie.
C_1 - wylosowano pierwsze pudełko
C_2 - wylosowano drugie pudałko
C_3 - wylosowano trzecie pudełko
A - wylosowano białą kulę
Zdarzenia C_1, C_2 i C_3 są parami rozłączne oraz $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \Omega$ zatem

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.4 (Twierdzenie Bayes'a)**.**
Niech $A, B \subset \Omega$ *takimi, że* $P(A) > 0, \ P(B) > 0$ *wtedy, zachodzi:*

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Dowód.

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Zatem

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

□

Przykład 5.7 (Twierdzenie Bayes'a).
Dane są trzy identyczne pudełka, o których wiadomo, że w jednym znajdują się dwie kule białe, w drugim jedna kula czarna i jedna biała a w trzecim dwie kule czarne. Do losowo wybranego pudełka dodajemy kulę białą a następnie losujemy z niego jedną kulę. Jakie jest pr., że losowano z trzeciego pudełka jeśli wylosowano kulę białą?

Rozwiązanie.
C_1 - wylosowano pierwsze pudełko
C_2 - wylosowano drugie pudełko
C_3 - wylosowano trzecie pudełko
A - wylosowano białą kulę
Z poprzedniego przykładu

$$P(A) = 2/3$$

Teraz interesuje nas prawdopodobieństwo warunkowe $P(C_3|A)$ z twierdzeniem Bayes'a mamy

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 1/3}{2/3} = \frac{1}{6}$$

Przykład 5.8 (paradoks Monty Halla (idź na całość)).
Uczestnik teleturnieju stoi przed trzema zasłoniętymi bramkami. Za jedną z nich jest nagroda (umieszczana za bramkami całkowicie losowo). Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący program odsłania inną bramkę (zawsze pustą), po czym proponuje graczowi zmianę pierwotnego wyboru. Czy gracz powinien pozostać przy swoim pierwotnym wyborze?

Rozwiązanie.
A- nagroda znajduje się za bramką A
B- nagroda znajduje się za bramką B
C- nagroda znajduje się za bramką C

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Gracz wybrał bramkę A a prowadzący odsłonił pustą bramkę B
$B^\star$- prowadzący wskaże, że bramka B jest pusta
Zdarzenia A, B, C są parami rozłączne oraz $A \cup B \cup C = \Omega$

.

$$\begin{aligned}
P(A|B^\star) &= \frac{P(B^\star|A)P(A)}{P(B^\star)} \\
&= \frac{P(B^\star|A)P(A)}{P(B^\star|A)P(A) + P(B^\star|B)P(B) + P(B^\star|C)P(C)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(C|B^\star) &= \frac{P(B^\star|C)P(C)}{P(B^\star)} \\
&= \frac{P(B^\star|C)P(C)}{P(B^\star|A)P(A) + P(B^\star|B)P(B) + P(B^\star|C)P(C)} \\
&= \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Zmiana pierwotnego wyboru dwukrotnie zwiększa szansę wygrania nagrody.

Definicja 5.2 (Niezależność zdarzeń)**.**
Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definicje 6.1 wykorzystujemy w dwojaki sposób:

- Obliczamy obie strony równania aby stwierdzić zależność lub niezależność zdarzeń
- Zakładając niezależność zdarzeń A i B możemy obliczyć $P(A \cap B)$

Twierdzenie 5.5 (Niezależność zdarzeń)**.**
Jesli $A, B \subset \Omega$ są niezależne to

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \to P(A) = P(A|B)$$
$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \to P(B) = P(B|A)$$

Jeśli zdarzenia są niezależne to fakt zajścia jednego z tych zdarzeń nie zmienia prawdopodobieństwa zajścia drugiego.

Przykład 5.9 (Wybieranie kul z pudełka)**.**
W pudełku znajduje się b białych i c czarnych kul. Wyciągamy kolejno losowo dwie kule z pudełka. Niech
A_1 - w pierwszym losowaniu wyciągnięto kulę białą.
A_2 - w drugim losowaniu wyciągnięto kulę białą.
Czy zdarzenia te są niezależne?
Rozpatrzmy losowanie bez zwracania oraz ze zwracaniem.

Rozwiązanie.
Ze zwracaniem.

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{b}{c+b} \\
P(A_2) &= \frac{b}{c+b} \\
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) \\
&= \frac{b^2}{(b+c)^2}
\end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \Rightarrow A_1 \text{ i } A_2 \text{ są niezależne}$$

Rozwiązanie.
Bez zwracania.

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{b}{c+b} \\
P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) \\
&= \frac{b-1}{c+b-1}\frac{b}{c+b} + \frac{b}{c+b-1}\frac{c}{c+b} \\
&= \frac{b(b-1+c)}{(c+b-1)(c+b)} \\
&= \frac{b}{c+b} \\
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) \\
&= \frac{b-1}{b+c-1}\frac{b}{b+c} \\
&= \frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)}
\end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2) \Rightarrow A_1 \text{ i } A_2 \text{ są zależne}$$

Definicja 5.3 (Współczynnik korelacji zdarzeń)**.**

- Niech $A, B \subset \Omega$
- $0 < P(A) < 1$
- $0 < P(B) < 1$

współczynnikiem korelacji zdarzeń A i B nazywamy:

$$\begin{aligned} r(A,B) &= \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(A^c)P(B)P(B^c)}} \\ &\equiv \frac{[P(A|B) - P(A)]P(B)}{\sqrt{P(A)P(A^c)P(B)P(B^c)}} \\ &\equiv \frac{[P(B|A) - P(B)]P(A)}{\sqrt{P(A)P(A^c)P(B)P(B^c)}} \end{aligned}$$

Własności współczynnika korelacji:

- $r(A,B) = 0$ gdy zdarzenia są niezależne $P(A|B) = P(A),\ P(B|A) = P(B)$
- $r(A,B) > 0$ gdy zdarzenia są dodatnio skorelowane, $P(A|B) > P(A),\ P(B|A) > P(B)$
- $r(A,B) = 1$ gdy zdarzenia są równe $A = B\ \ P(A|B) = 1,\ P(B|A) = 1$
- $r(A,B) < 0$ gdy zdarzenia są ujemnie skorelowane, $P(A|B) < P(A),\ P(B|A) < P(B)$
- $r(A,B) = -1$ gdy zdarzenia są przeciwne $A = B^c\ \ P(A|B) = 0,\ P(B|A) = 0$

$$-1 \leqslant r(A,B) \leqslant 1$$

Współczynnik korelacji zdarzeń jest miarą stopnia ich zależności a jego znak informuje o tym czy zdarzenia sobie sprzyjają czy nie.

Przykład 5.10 (Wybieranie kul z pudełka)**.**
W pudełku znajduje się b białych i c czarnych kul. Wyciągamy kolejno losowo dwie kule z pudełka. Niech
A_1 - w pierwszym losowaniu wyciągnięto kulę białą.
A_2 - w drugim losowaniu wyciągnięto kulę białą.
Jaki jest współczynnik korelacji $r(A_1, A_2)$?
Rozpatrzmy losowanie bez zwracania oraz ze zwracaniem.

Rozwiązanie.
Ze zwracaniem.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \Rightarrow r(A_1, A_2) = 0$$

Bez zwracania.

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= \frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)} \\
P(A_1) \cdot P(A_2) &= \frac{b^2}{(c+b)^2} \\
P(A_1)(1-P(A_1)) &= \frac{b}{c+b}\frac{c}{c+b} \\
P(A_2)(1-P(A_2)) &= \frac{c}{c+b}\frac{b}{c+b} \\
r(A_1, A_2) &= \frac{\frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)} - \frac{b^2}{(b+c)^2}}{\frac{bc}{(c+b)^2}} \\
&= \frac{b(b-1)(b+c) - b^2(b+c-1)}{bc(b+c-1)} \\
&= -\frac{1}{c+b-1} = -\frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

Zdarzenia A_1 i A_2 są ujemnie skorelowane ich stopień korelacji maleje (co do wartości bezwzględnej) wraz ze wzrostem ilości kul w pudełku.

6 Prawdopodovieństwo subiektywne

Wzór Bayes'a ma istotny związek ze współczesną (subiektywną) definicją prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 6.1. *Dla dowolnych zdarzeń H, D, W takich, że $P(H \cap W) > 0$ i $P(D \cap W) > 0$*

$$P(H|D \cap W) = \frac{P(D|H \cap W)P(H|W)}{P(D|W)}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
P(H|D \cap W) &= \frac{P(H \cap D \cap W)}{P(D \cap W)} \\
&= \frac{P(D|H \cap W)P(H \cap W)}{P(D \cap W)} \\
&= \frac{P(D|H \cap W)P(H|W)P(W)}{P(D|W)P(W)} \\
&= \frac{P(D|H \cap W)P(H|W)}{P(D|W)}
\end{aligned}$$

□

$$P(H|D \cap W) = \frac{P(D|H \cap W)P(H|W)}{P(D|W)}$$

Subiektywna definicja pr. :	$P(H\|W)$	stopień zaufania (pr.) w to że hipoteza H jest prawdziwa warunkowany naszą wiedzą W
	$P(H\|D \cap W)$	pr. że hipoteza H jest prawdziwa po uwzględnieniu nowych danychD
	$P(D\|H \cap W)$	pr. obserwacji danych D pod warunkiem, że hipoteza H jest prawdziwa.

$$P(\text{hipoteza}|\text{dane,wiedza}) \propto P(\text{dane}|\text{hipteza,wiedza})P(\text{hipoteza}|\text{wiedza})$$

Współczynnik proporcjonalności otrzymuje się z warunku unormowania prawdopodobieństwa do jedynki.