7 Zmienna losowa

- Do tej pory interpretowaliśmy prawdopodobieństwo jako funkcję określoną na zdarzeniach losowych;
- Jeśli zdarzenia losowe można reprezentować za pomocą liczb to prawdopodobieństwo będzie funkcją określoną na liczbach.

Definicja 7.1 (Zmienna losowa)**.**
Zmienna losowa X to rzeczywista funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

$$X(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$$

Zmienne losowe umożliwiają interpretację prawdopodobieństwa jako przyporządkowanie liczby z przedziału $[0, 1]$ pewnemu zbiorowi liczb rzeczywistych $I \subset \mathbb{R}$ zamiast zdarzeniu losowemu $A \subset \Omega$.

$$A \subset \Omega \to I \subset \mathbb{R} \quad I = \{X(\omega) : \omega \in A\}$$
$$P(A) = P(A \subset \Omega) \to P(I \subset \mathbb{R}) = P(I)$$

Przykład 7.1 (Dwa rzuty monetą)**.**
Rozpatrzmy eksperyment losowy polegający na dwóch rzutach monetą.

- $\Omega = \left\{ \begin{array}{ll} \omega_1 = (O, O); & \omega_2 = (R, O) \\ \omega_3 = (O, R); & \omega_4 = (R, R) \end{array} \right\}$
- X- zmienna losowa: ilość wyrzuconych orłów
- $X(\omega_1) = 2;\ \ X(\omega_2) = 1;\ \ X(\omega_3) = 1;\ \ X(\omega_4) = 0$
- X przyjmuje wartości ze zbioru : $I = \{0, 1, 2\}$
- $P(X = 2) = \frac{1}{4};\quad P(X = 1) = \frac{1}{2};\quad P(X = 0) = \frac{1}{4}$

Definicja 7.2 (Dyskretna zmienna losowa)**.**
Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych. Funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest dyskretną zmienną losową jeśli przyjmuje przeliczalną liczbę wartości $\{x_1, x_2, \dots\}$

Definicja 7.3 (Rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej)**.**
Niech X będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą przeliczalną liczbę wartości $\{x_1, x_2, \dots\}$. Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X nazywamy funkcję:

$$p(x_i) = P(X = x_i) \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

Własności rozkładu prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej:

- $p(x_i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots$
- $\sum\limits_{i=1} p(x_i) = 1$

Przykład 7.2 (Dwa rzuty sześcienną kostką do gry)**.**
Rozpatrzmy eksperyment losowy polegający na dwóch rzutach sześcienną kostką do gry. Zmienną losową X niech będzie suma wyrzuconych oczek.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Rysunek 4 przedstawia wykres powyższego rozkładu prawdopodobieństwa.

Definicja 7.4 (Dystrybuanta zmiennej losowej)**.**
Dystrybuantą F zmiennej losowej X nazywamy funkcję:

$$F(t) = P(X \leqslant t) \qquad -\infty < t < \infty$$

Własności dystrybuanty zmiennej losowej:

- jest niemalejąca:
$$a \leqslant b \Rightarrow F(a) \leqslant F(b)$$
- $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$
$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} P(X \leqslant t) = 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} P(X \leqslant t) = 1$$
- jest prawostronnie ciągła
$$\lim_{\epsilon\to0^+} F(t+\epsilon) = F(t)$$

Twierdzenie 7.1 (Dystrybuanta zmiennej losowej)**.**
Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Wtedy:

- $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a), \quad a \leqslant b$
- $P(X > t) = 1 - F(t), \quad t \in \mathbb{R}$

Dowód.

$$\{X \leqslant b\} = \{X \leqslant a\} \cup \{a < X \leqslant b\}$$
$$P(X \leqslant b) = P(X \leqslant a) + P(a < X \leqslant b)$$

$$\begin{aligned} P(a < X \leqslant b) &= P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$$P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - F(t)$$

□

Przykład 7.3 (Dystrybuanta dyskretnej zmiennej losowej)**.**
Rozpatrzmy eksperyment losowy polegający na dwóch rzutach sześcienną kostką do gry. Zmienną losową X niech będzie suma wyrzuconych oczek. Jaka jest dystrybuanta zmiennej losowj X?

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$t \in (-\infty, 2)$

$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \leqslant t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$t \in \langle 2, 3)$

$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \leqslant t) \\ &= P(X < 2) + P(X = 2) + P(2 < X \leqslant t) \\ &= p(2) + P(2 < X \leqslant t) \\ &= p(2) = 1/36 \end{aligned}$$

$t \in \langle 3, 4)$

$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \leqslant t) \\ &= P(X < 3) + P(X = 3) + P(3 < X \leqslant t) \\ &= p(2) + p(3) + P(3 < X \leqslant t) \\ &= p(2) + p(3) = 3/36 \end{aligned}$$

$t \in \langle 4, 5)$

$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \leqslant t) \\ &= P(X < 4) + P(X = 4) + P(4 < X \leqslant t) \\ &= p(2) + p(3) + p(4) + P(4 < X \leqslant t) \\ &= p(2) + p(3) + p(4) = 6/36 \end{aligned}$$

Wartości dystrybuanty w pozostałych przedziałach zawarte są w poniższej tabeli.

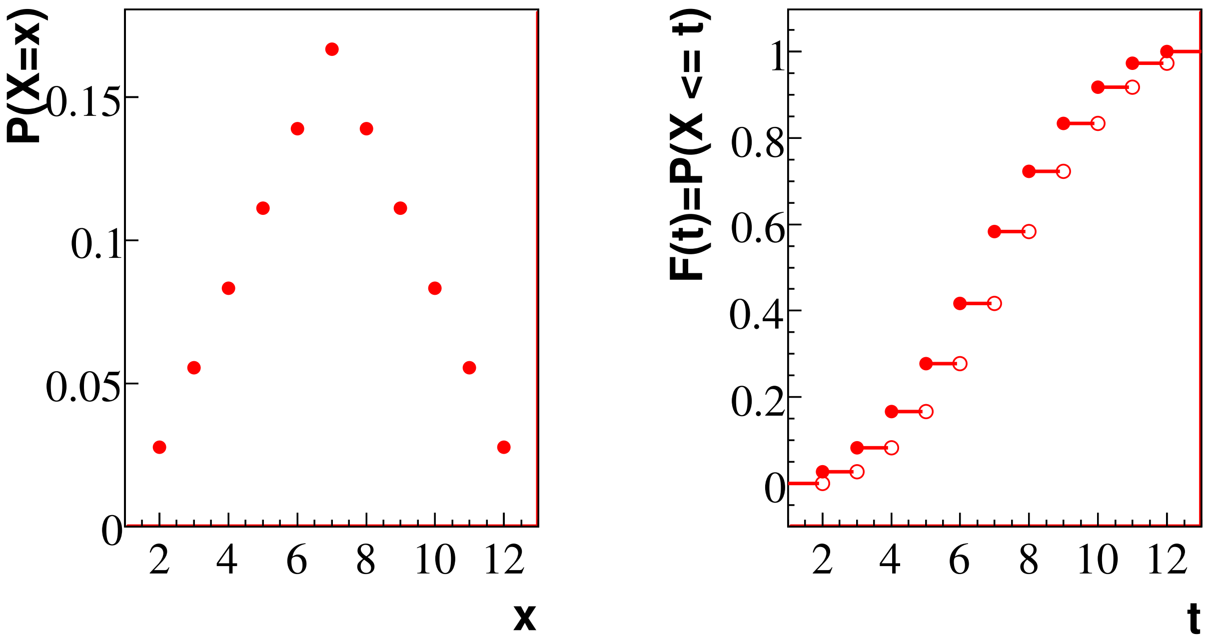
t	$(-\infty, 2)$	$\langle 2, 3)$	$\langle 3, 4)$	$\langle 4, 5)$	$\langle 5, 6)$	$\langle 6, 7)$	$\langle 7, 8)$	$\langle 8, 9)$	$\langle 9, 10)$	$\langle 10, 11)$	$\langle 11, 12)$	$\langle 12, \infty)$
$F(t)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Rysunek 4 przedstawia wykres powyższej dystrybuanty.

Twierdzenie 7.2 (Dystrybuanta, rozkład pr.).
Niech X będzie dyskretną zmienną losową o wartościach $I = \{x_1, x_2, ...\}$, rozkładzie pr. p i dystrybuancie F. Wtedy

- $F(t) = \sum\limits_{k: x_k \leqslant t} p(x_k), \quad t \in \mathbb{R}$
- $p(x_k) = F(x_k) - \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} F(x_k - \epsilon), \quad k = 1, 2, ...$
- $P(X \in I \subset \mathbb{R}) = \sum\limits_{k: x_k \in I} p(x_k)$

Przykład 7.4 (Dystrybuanta, rozkład pr.).
Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest w przedziale $5 < X \leqslant 10$?



Rysunek 4: Lewy wykres przedstawia rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X będącej sumą oczek wyrzuconych w dwóch rzutach sześcienną kostką do gry. Wykres prawy przedstawia dystrubuantę zmiennej losowej X.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}
P(5 < X \leqslant 10) &= \sum_{k:5<x_k\leqslant 10} p(x_k) \\
&= p(6)+p(7)+p(8)+p(9)+p(10) \\
&= \frac{5+6+5+4+3}{36} = \frac{23}{36} \\
&\ \text{lub} \\
P(5 < X \leqslant 10) &= F(10) - F(5) \\
&= \frac{33}{36} - \frac{10}{36} = \frac{23}{36}
\end{aligned}$$

Przykład 7.5 (Zmienna losowa ciągła)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A, że punkt ten leży w odległości mniejszej lub równej r od środka okręgu?

Rozwiązanie.

$$\Omega = \{\omega(x,y):\ \ x^2+y^2 \leqslant R^2\}$$

Niech zmienną losową będzie odległość punktu (x,y) od środka okręgu:

$$D(\omega) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Zbiorem wartości tej zmiennej losowej jest nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych z przedziału $[0, R]$. Nie jest to zatem zmienna losowa dyskretna. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie geometrycznym jesteśmy w stanie określić dystrybuantę takiej zmiennej losowej:

$$F(r) = P(D \leqslant r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < 0, \\ \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 & \text{dla } 0 \leqslant r < R, \\ 1 & \text{dla } r \geqslant R \end{cases}$$

Rysunek 5 przedstawia wykres powyższej dystrybuanty.

Definicja 7.5 (Ciągła zmienna losowa)**.**
Zmienna losowa X jest zmienną ciągłą jeśli jej dystrybuanta F jest funkcją ciągłą

Definicja 7.6 (Gęstość prawdopodobieństwa)**.**
Gęstością prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X nazywamy funkcję:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x)$$

Twierdzenie 7.3 (Gęstość prawdopodobieństwa)**.**
Funkcja f może być gęstością prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy gdy:

- $f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Przykład 7.6 (Gęstość prawdopobieństwa)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej D będącej odległością punktu od środka okręgu?

Dystrybuanta takiej zmiennej losowej ma postać

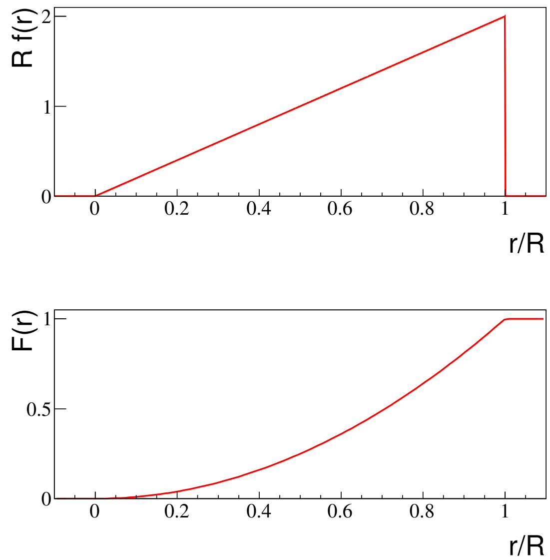
$$F(r) = P(D \leqslant r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < 0, \\ \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 & \text{dla } 0 \leqslant r < R, \\ 1 & \text{dla } r \geqslant R \end{cases}$$

i jest ona funkcją ciągłą . Zatem:

$$f(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} F(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < 0, \\ \dfrac{2r}{R^2} & \text{dla } 0 \leqslant r < R, \\ 0 & \text{dla } r > R \end{cases}$$

Rysunek 5 przedstawia wykres powyższej funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 7.4 (Dystrybuanta, rozkład pr.)**.**
Niech X będzie ciągłą zmienną losową o gęstości f i dystrybuancie F. Wtedy:



Rysunek 5: Wykres górny przedstawia funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej D będącej odległością losowo wybranego punktu wewnątrz okręgu o promieniu R od środka tego okręgu. Ponieważ gęstość prawdopobieństwa ma wymiar odwrotności zmiennej losowej aktualnie rysowana jest wielkość bezwymiarowa $Rf(r)$. Wykres dolny przedstawia dystrybuantę zmiennej losowej D.

- $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx, \qquad t \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)$
- $P(X \in I \subset \mathbb{R}) = \int\limits_{I} f(x)dx$
- $P(a < X \leqslant b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

Przykład 7.7 (Dystrybuanta, rozkład pr.)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jakie jest prawdopodobieństwo wybrania punktu odległego od środka okręgu o wartość w przedziale $\frac{1}{3}R < D < \frac{2}{3}R$?

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3}R < D < \frac{2}{3}R\right) &= \int\limits_{\frac{1}{3}R}^{\frac{2}{3}R} f(r)dr = \int\limits_{\frac{1}{3}R}^{\frac{2}{3}R} \frac{2r}{R^2}dr \\ &= \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Big|_{\frac{1}{3}R}^{\frac{2}{3}R} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \\ &\text{lub} \\ P\left(\frac{1}{3}R < D < \frac{2}{3}R\right) &= F\left(\frac{2}{3}R\right) - F\left(\frac{1}{3}R\right) \\ &= \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.5 (Prawdopodobieństwo ciągłej zmiennej losowej)**.**
Niech X będzie ciągłą zmienną losową, natomiast $a, b \in \mathbb{R} \quad a \leqslant b$. Wtedy:

- $P(X = a) = \int\limits_a^a f(x)dx = 0$
- $$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a < X \leqslant b) \\ &= P(a \leqslant X < b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

8 Funkcja zmiennej losowej

W praktyce często interesuje nas rozkład nie samej zmiennej losowej ale wielkości która jest funkcją zmiennej losowej $Y = g(X)$. Funkcja taka, sama jest zmienną losową dla której możemy określić dystrybuantę oraz rozkład prawdopodobieństwa (gęstości prawdopodobieństwa).

Twierdzenie 8.1 (Rozkład pr. funkcji dyskretnej zmiennej losowej)**.**
Niech X będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości ze zbioru $I = \{x_1, x_2, \dots\}$ o rozkładzie pr. $p_X(x_i) = P(X = x_i)$. Wtedy $Y = g(X)$ również jest dyskretną zmienną losową o rozkładzie pr. :

$$\begin{aligned} p_Y(y_k) &= P(Y = y_k) \\ &= P(g(X) = y_k) \\ &= P(X \in \{x_j : g(x_j) = y_k\}) \\ &= \sum_{j:g(x_j)=y_k} p_X(x_j) \end{aligned}$$

Przykład 8.1 (Dwa rzuty sześcienną kostką do gry)**.**
Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. X niech będzie suma wyrzuconych oczek. Jaki jest rozkład pr. zmiennej losowej $Y = X(\text{mod } 2)$? Y przyjmuje dwie wartości: 0 lub 1.

Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$p_Y(0) = p_X(2) + p_X(4) + p_X(6) + p_X(8) + p_X(10) + p_X(12) = 1/2$$
$$p_Y(1) = p_X(3) + p_X(5) + p_X(7) + p_X(9) + p_X(11) + p_X(13) = 1/2$$

zatem zmienna losowa $Y = X(\text{mod } 2)$ ma rozkład:

y_i	0	1
$p_Y(y_i)$	1/2	1/2

W przypadku zmiennej losowej ciągłej, sytuacja jest bardziej skomplikowana

- Niech X będzie ciągłą zmienną losową o dystrybuancie F_X i gęstości pr. f_X.
- Niech $Y = g(X)$. Jaka jest gęstość pr. f_Y ?
- Najpewniejszym sposobem określenia rozkładu Y jest obliczenie dystrybuanty F_Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(g(X) \leqslant y) = \int_{x:g(x)\leqslant y} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

Przykład 8.2 (Funkcja ciągłej zmiennej losowej)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jaka jest gęstość pr. zmiennej Y będącej polem powierzchni koła o promieniu równym odległości wybranego punktu od środka okręgu?

Niech $0 \leqslant X \leqslant R$- odległość wybranego punktu od środka okręgu. Wtedy

$$Y = \pi X^2$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P\left(\pi X^2 \leqslant y\right) \\ &= P\left(X \leqslant \sqrt{y/\pi}\right) \\ &= F_X\left(\sqrt{y/\pi}\right) \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{y/\pi}\right)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{R}\right)^2 & \text{dla } 0 \leqslant x < R \\ 1 & \text{dla } x \geqslant R \end{cases} \quad \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 0 \\ \dfrac{y}{\pi R^2} & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant \pi R^2 \\ 1 & \text{dla } y \geqslant \pi R^2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant \pi R^2 \\ 0 & \text{dla } y \notin (0, \pi R^2) \end{cases}$$

Twierdzenie 8.2 (Gęstość pr. funkcji zmiennej losowej ciągłej)**.**
Jeśli $g(X)$ jest ciągłą, różniczkowalną i ściśle rosnącą funkcją (dla wszystkich wartości zmiennej losowej X) tzn. istnieje do niej odwrotna różniczkowalna funkcja $h = g^{-1}$, a X jest zmienną losową ciągłą o gęstości f_X to gęstość pr. zmiennej $Y = g(X)$

$$f_Y(y) = f_X[h(y)] \cdot h'(y)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P(g(X) \leqslant y) \\ &= P(X \leqslant h(y)) \\ &= F_X[h(y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_X[h(y)] \\ &= \frac{d}{dh} F_X[h(y)] \cdot \frac{d}{dy} h(y) \\ &= f_X[h(y)] \cdot h'(y) \end{aligned}$$

□

Przykład 8.3 (Gęstość pr. funkcji zmiennej losowej ciągłej)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jaka jest gęstość pr. zmiennej Y będącej polem powierzchni koła o promieniu równym odległości losowo wybranego punktu od środka okręgu?

$$f_X(x) = \frac{2x}{R^2} \quad \text{dla } 0 < x < R$$
$$Y = g(X) = \pi X^2$$
$$h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{y/\pi}, \qquad h'(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}$$
$$f_Y(y) = f_X[h(y)]h'(y) = \frac{2\sqrt{y/\pi}}{R^2}\frac{1}{2\sqrt{\pi y}} = \frac{1}{\pi R^2} \quad \text{dla } 0 < y < \pi R^2$$

Przykład 8.4 (Gęstość pr. funkcji zmiennej losowej ciągłej)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jaka jest gęstość pr. zmiennej Y będącej stosunkiem promienia okręgu do odległości wybranego punktu od środka okręgu?

Niech $0 \leqslant X \leqslant R$ - odległość wybranego punktu od środka okręgu. Wtedy

$$Y = R/X$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P\left(R/X \leqslant y\right) \\ &= P\left(X \geqslant R/y\right) \\ &= 1 - F_X\left(R/y\right) \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(R/y\right)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \left(\frac{x}{R}\right)^2 & \text{dla } 0 \leqslant x < R \\ 1 & \text{dla } x \geqslant R \end{cases} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 1 \\ 1 - \frac{1}{y^2} & \text{dla } y \geqslant 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 1 \\ \frac{2}{y^3} & \text{dla } y \geqslant 1 \end{cases}$$

Twierdzenie 8.3 (Gęstość pr. funkcji zmiennej losowej ciągłej)**.**
Jeśli $g(X)$ jest ciągłą, różniczkowalną i ściśle malejącą funkcją (dla wszystkich wartości zmiennej losowej X) tzn. istnieje do niej odwrotna, różniczkowalna funkcja $h = g^{-1}$, a X jest zmienną losową ciągłą o gęstości f_X to gęstość pr. zmiennej $Y = g(X)$

$$f_Y(y) = -f_X[h(y)] \cdot h'(y)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P(g(X) \leqslant y) \\ &= P(X \geqslant h(y)) \\ &= 1 - F_X[h(y)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) &= \frac{d}{dy}\left[1 - F_X[h(y)]\right] \\
&= -\frac{d}{dh} F_X[h(y)] \cdot \frac{d}{dy} h(y) \\
&= -f_X(h(y)) \cdot h'(y)
\end{aligned}
$$

$\square$

Przykład 8.5 (Gęstość pr. funkcji zmiennej losowej ciągłej)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jaka jest gęstość pr. zmiennej Y będącej stosunkiem promienia okręgu do odległości wybranego losowo punktu od środka okręgu?

$$
f_X(x) = \frac{2x}{R^2} \quad \text{dla } 0 < x < R
$$

$$
Y = g(X) = \frac{R}{X}
$$

$$
h(y) = g^{-1} = \frac{R}{y}, \qquad h'(y) = -\frac{R}{y^2}
$$

$$
f_Y(y) = -f_X[h(y)]h'(y) = \frac{2R/y}{R^2}\frac{R}{y^2} = \frac{2}{y^3} \quad \text{dla } y \geqslant 1
$$

Twierdzenia 8.2 i 8.3 można przedstawić w formie jednego twierdzenia:

Twierdzenie 8.4 (Gęstość pr. funkcji zmiennej losowej ciągłej)**.**
Jeśli $g(X)$ jest ciągłą, różniczkowalną i ściśle monotoniczną funkcją (dla wszystkich wartości zmiennej losowej X) tzn. istnieje do niej odwrotna różniczkowalna funkcja $h = g^{-1}$, a X jest zmienną losową ciągłą o gęstości f_X to gęstość pr. zmiennej $Y = g(X)$

$$
f_Y(y) = f_X[h(y)] \cdot |h'(y)|
$$

Przykład 8.6 (Niemonotoniczna funkcja zmiennej losowej)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jaka jest gęstość pr. zmiennej $Y = (X - R/2)^2$, gdzie X jest zmienną losową będącą odległością losowo wybranego punktu od środka okręgu ?

Funkcja $Y = (X - R/2)^2$ nie jest monotoniczna w przedziale $0 < x < R$, maleje w przedziale $[0, R/2]$ oraz rośnie w przedziale $[R/2, R]$.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P((X - R/2)^2 \leqslant y) \\
&= P(-\sqrt{y} \leqslant X - R/2 \leqslant \sqrt{y}) \\
&= P(R/2 - \sqrt{y} \leqslant X \leqslant R/2 + \sqrt{y}) \\
&= F_X(R/2 + \sqrt{y}) - F_X(R/2 - \sqrt{y})
\end{aligned}
$$

W tym momencie można albo skorzystać z jawnej postaci dystrybuanty F_X i potem dokonać różniczkowania po y albo najpierw różniczkować po y korzystając z jawnej postaci gęstości prawdopodobieństwa f_X. Korzystając z drugiego sposobu:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) &= \frac{d}{dy}\left[F_X(R/2+\sqrt{y}) - F_X(R/2-\sqrt{y})\right] \\
&= f_X(R/2+\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(R/2-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \left[\frac{2(R/2+\sqrt{y})}{R^2} + \frac{2(R/2-\sqrt{y})}{R^2}\right]\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{R\sqrt{y}}
\end{aligned}
$$

a z pierszego

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= F_X(R/2+\sqrt{y}) - F_X(R/2-\sqrt{y}) \\
&= \frac{(R/2+\sqrt{y})^2 - (R/2-\sqrt{y})^2}{R^2} \\
&= \frac{2\sqrt{y}}{R} \\
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) \\
&= \frac{1}{R\sqrt{y}}
\end{aligned}
$$

Twierdzenie 8.5 (Gęstość pr. funkcji zmiennej losowej ciągłej)**.**
Jeśli $g(X)$ jest ciągłą i różniczkowalną ale nie jest ściśle monotoniczną funkcją tzn. funkcja jest przedziałami monotoniczna to w każdym z przedziałów monotoniczności istnieje inna odwrotna różniczkowalna funkcja $h_i = g^{-1}$ a X jest zmienną losową ciągłą o gęstości f_X to gęstość pr. zmiennej $Y = g(X)$

$$
f_Y(y) = f_X[h_1(y)]\cdot|h_1'(y)| + f_X[h_2(y)]\cdot|h_2'(y)| + \dots.
$$

Przykład 8.7 (Niemonotoniczna funkcja zmiennej losowej)**.**
Wybieramy losowo punkt wewnątrz okręgu o promieniu R. Jaka jest gęstość pr. zmiennej $Y = (X - R/2)^2$, gdzie X jest zmienną losową będącą odległością losowo wybranego punktu od środka okręgu ?

Funkcja $Y = (X - R/2)^2$ nie jest monotoniczna w przedziale $0 < x < R$, maleje w przedziale $[0, R/2]$ oraz rośnie w przedziale $[R/2, R]$.

$$
h_1(y) = R/2 - \sqrt{y}; \qquad h_2(y) = R/2 + \sqrt{y}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = &= f_X[h_1(y)]\cdot|h_1'(y)| + f_X[h_2(y)]\cdot|h_2'(y)| \\
&= f_X(R/2+\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(R/2-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \left[\frac{2(R/2+\sqrt{y})}{R^2} + \frac{2(R/2-\sqrt{y})}{R^2}\right]\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{R\sqrt{y}}
\end{aligned}
$$