Twierdzenie 10.1 (Łączna gęstość prawdopodobieństwa).
Funkcja f może być łączną gęstością prawdopodobieństwa wektora losowego (X, Y) wtedy i tylko wtedy gdy:

- $$f(x, y) \geqslant 0 \quad \textit{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$$

Własności dystrybuanty i łącznej gęstości pr. ciągłego wektora losowego:

- Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gdzie $a < b$ i $c < d$ mamy

$$\begin{aligned} P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy \end{aligned}$$

- Dystrybuanta $F(s, t)$ jest ciągła
- Jeżeli $F(x, y)$ jest różniczkowalna w pewnym punkcie (x, y) to

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$$

W przypadku gdy obszar całkowania C nie jest prostokątem

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in C) &= \iint_C f(x, y)dxdy \\ &= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\int_{y_{min}(x)}^{y_{max}(x)} f(x, y)dy \right] dx \\ &= \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left[\int_{x_{min}(y)}^{x_{max}(y)} f(x, y)dx \right] dy \end{aligned}$$

Przykład 10.2 (Łączna gęstość brawdopodobieństwa).
Ciągły wektor losowy (X, Y) ma łączną gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y) = cx(x + y) \quad \text{dla } C = \{(x, y) : x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge x + y \leqslant 1\}$$

Ile wynosi prawdopodobieństwo $P(X < 1/2)$?

Pierwszym krokiem jest wyznaczenie stałej c z warunku unormowania gęstości prawdopodobieństwa. Obszar w którym gęstość przyjmuje wartości niezerowe jest trójkątem ograniczonym dodatnimi półosiami OX i OY oraz prostą $y = 1 - x$, zatem

$$\begin{aligned}
1 = \iint\limits_C f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} cx(x+y)dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[cx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} \right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{c}{2}(-x^3 + x)dx \\
&= \frac{c}{2} \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{c}{8} \quad \Rightarrow c = 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X < 1/2) &= \int_0^{1/2} \left[\int_0^{1-x} 8x(x+y)dy \right] dx \\
&= \int_0^{1/2} \left[8x \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} \right] dx \\
&= \int_0^{1/2} 4(-x^3 + x)dx \\
&= \frac{7}{16}
\end{aligned}$$

Znając rozkład łączny wektora losowego (X, Y) można obliczyć rozkład zmiennej X niezależnie od wartości jakie przyjmuje zmienna Y i odwrotnie. Rozkłady takie nazywamy rozkładami brzegowymi

Definicja 10.5 (Dyskretne rozkłady brzegowe)**.**
Niech dyskretny wektor losowy (X, Y) ma łączny rozkład pr. $p(x_j, y_k)$. Rozkłady brzegowe dane są przez:

$$p_X(x_j) = \sum_{k=1} p(x_j, y_k), \qquad j = 1, 2, ...$$

$$p_Y(y_j) = \sum_{j=1} p(x_j, y_k), \qquad k = 1, 2, ...$$

Przykład 10.3 (Dyskretne rozkłady brzegowe)**.**
Jakie są rozkłady brzegowe zmiennych X i Y z przykładu 10.1

Odpowiednie rozkłady otrzymamy sumując wartości z tabeli rozkładu prawdopodobieństwa wzdłuż wierszy lub kolumn tak jak to przedstawia poniższa tabela.

$Y \setminus X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$p_Y(y_k)$
1	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/36
2	0	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	3/36
3	0	0	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	5/36
4	0	0	0	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0	7/36
5	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	9/36
6	0	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
$p_X(x_j)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	

Definicja 10.6 (Gęstości brzegowe)**.**
Niech (X, Y) jest ciągłym wektorem losowym o łącznej gęstości $f(x, y)$. Gęstości brzegowe mają postać:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

Przykład 10.4 (Gęstości brzegowe)**.**
Jakie są gęstości brzegowe zmiennych X i Y z przykładu 11.2

$$f(x, y) = 8x(x + y) \quad \text{dla } C = \{(x, y) : x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge x + y \leqslant 1\}$$

Należy pamiętać, że gęstość $f(x, y)$ przyjmuje niezerowe wartości w obszarze w kształcie trójkąta zatem granice całkowania po każdej ze zmiennych będą zależeć od wartości drugiej ze zmiennych.

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy &= \int_{0}^{1-x} 8x(x + y)dy \\ &= 4x(1 - x^2) \quad \text{dla } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx &= \int_{0}^{1-y} 8x(x + y)dx \\ &= \frac{4(1 - y^2)}{3}(y + 2) \quad \text{dla } 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Niezależność zmiennych losowych
Niezależność zmiennych losowych definiuje się poprzez niezależność zdarzeń losowych

Definicja 10.7.
Zmienne losowe X i Y są niezależne jeśli zdarzenia losowe $\{X \in A\}$ i $\{Y \in B\}$ są niezależne dla wszystkich zbiorów A, B

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \text{dla wszystkich } A, B$$

Sprawdzanie niezależności zgodnie z definicją jest bardzo kłopotliwe w praktyce korzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 10.2 (Niezależność zmiennych losowych)**.**
Zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy:

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

lub dla zmiennych dyskretnych

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

lub dla zmiennych ciągłych

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Prostym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest następująca obserwacja:
Zmienne losowe X i Y są niezależne jeśli:

- Dla zmiennych dyskretnych w tabelce łącznego rozkładu nie pojawia się wartość zerowa.
- Dla zmiennych ciągłych obszar w którym łączna gęstość $f(x, y)$ przyjmuje wartości niezerowe jest prostokątem.

Zmienne losowe z przykładów 11.1 i 11.2 są przykładami zmiennych statystycznie zależnych.
Twierdzenie 11.3 wykorzystujemy nie tylko do sprawdzenia niezależności zmiennych losowych ale także jako sposób konstrukcji łącznego rozkładu w przypadku gdy wiemy, że zmienne losowe są statystycznie niezależne.

Przykład 10.5 (Łączna gęstość zmiennych niezależnych)**.**
Tadeusz i Zosia umówili się w kawiarni między 17:00 i 18:00. Obydwoje są bardzo dumni i nie zamierzają czekać na partnera dłużej niż 15 minut. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że randka dojdzie do skutku?

- $f_T(t)$ - gęstość pr. czasu przyjścia Tadeusza
- $f_Z(z)$ - gęstość pr. czasu przyjścia Zosi

gdzie $z, t \in [0, 1]$. Zakładamy, że oba czasy przyjścią są niezależne.

Jeśli rozkłady czasu przyjścia Zosi i Tadeusza nie są jednostajne to nie możemy skorzystać z twierdzenia o prawdopodobieństwie geometrycznym gdyż różne czasy nie są równie prawdopodobne. Należy skonstruować łączną gęstość prawdopodobieństwa a następnie wycałkować go po obszarze $|z - t| < 1/4$

$$f(z, t) = f_Z(z)f_T(t)$$

$$\begin{aligned}
P(|z - t| < 1/4) &= \iint\limits_{|z-t|<1/4} f(z, t)dzdt \\
&= \iint\limits_{|z-t|<1/4} f_Z(z)f_T(t)dzdt \\
&= \int\limits_0^{1/4} \left[\int\limits_0^{z+1/4} f_Z(z)f_T(t)dt \right] dz + \int\limits_{1/4}^{3/4} \left[\int\limits_{z-1/4}^{z+1/4} f_Z(z)f_T(t)dt \right] dz + \int\limits_{3/4}^{1} \left[\int\limits_{z-1/4}^{1} f_Z(z)f_T(t)dt \right] dz
\end{aligned}$$

Znając rozkład łączny wektora losowego (X, Y) można zastanowić się w jaki sposób rozkład zmiennej losowej X zależy od wartości zmiennej losowej Y i na odwrót. Rozkłady takie nazywamy rozkładami warunkowymi i definiujemy je w analogi do definicji prawdopodobieństwa warunkowego zdarzeń losowych $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, czyli rozkłady warunkowe to stosunki rozkładów łącznych i odpowiednich rozkładów brzegowych.

Definicja 10.8 (Dyskretne rozkłady warunkowe)**.**
Niech dyskretny wektor losowy (X, Y) ma łączny rozkład pr. $p(x_j, y_k)$. Rozkładami warunkowymi nazywamy:

$$p_Y(y_k|x_j) = \frac{p(x_j, y_k)}{p_X(x_j)}$$

$$p_X(x_j|y_k) = \frac{p(x_j, y_k)}{p_Y(y_k)}$$

Przykład 10.6 (Dyskretne rozkłady warunkowe)**.**
Jakie są rozkłady warunkowe $p_X(x_j|Y = 6)$ oraz $p_Y(y_k|X = 6)$ wektora losowego z przykładu 10.1?

Odpowiednie rozkłady otrzymamy dzieląc wartości z tabeli rozkładu prawdopodobieństwa przez odpowiednie prawdopodobieństwa brzegowe, tak jak przedstawiono w poniższych tabelach:

$Y \setminus X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0
6	0	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36

$p_Y(Y = 6) = 11/36$

X	7	8	9	10	11	12
$p_X(x_j|Y = 6)$	2/11	2/11	2/11	2/11	2/11	1/11

$p_X(X = 6) = 5/36$

Y	3	4	5
$p_Y(y_k|X = 6)$	1/5	2/5	2/5

Definicja 10.9 (Gęstości warunkowe)**.**
Niech ciągły wektor losowy (X, Y) ma łączną gęstość prawdopodobieństwa $f(x, y)$. Gęstościami warunkowymi nazywamy:

$$f_X(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Przykład 10.7 (Gęstości warunkowe)**.**
Jakie są rozkłady warunkowe zmiennych losowych z przykładu 11.2?

$$f(x, y) = 8x(x + y) \quad \text{dla } C = \{(x, y) : x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge x + y \leqslant 1\}$$

Rozwiązanie.

$$f_X(x|y) = \frac{6x(x + y)}{(1 - y^2)(y + 2)}$$

$$f_Y(y|x) = \frac{2(x + y)}{1 - x^2}$$

Definicje rozkładów warunkowych umożliwiają konstrukcję rozkładów łącznych dla zmiennych losowych zależnych.

- Dla zmiennych dyskretnych

$$p(x_j, y_k) = p_X(x_j|y_k)p_Y(y_k) = p_Y(y_k|x_j)p_X(x_j)$$

- Dla zmiennych ciągłych

$$f(x, y) = f_X(x|y)f_Y(y) = f_Y(y|x)f_X(x)$$

Przykład 10.8 (Łączna gęstość prawdopodobieństwa zmiennych zależnych)**.**
Niech zmienną losową X będzie liczba z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, a]$ a Y liczba z rozkładu jednostajnego na przedziale $[x, a]$. Jaki jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y?

Zmienne losowe X i Y są statystycznie zależne znamy rozkład brzegowy zmiennej X

$$f_X(x) = \frac{1}{a} \qquad 0 < x < a$$

oraz rozkład warunkowy zmiennej losowej Y

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{a - x} \qquad x < y < a$$

Zatem łączna gęstość prawdopodobieństwa ma postać

$$f(x, y) = f_Y(y|x)f_X(x) = \frac{1}{a(x - a)} \qquad 0 < x < y < a$$

Rozkład brzegowy zmiennej losowej Y ma postać

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{a(x - a)} dx = \frac{1}{a} \ln \frac{a}{a - y} \qquad 0 < y < a$$

Mieszanina rozkładów

- (X, Y)- wektor losowy
- X jest ciągłą zmienną losową a Y dyskretną.
- $Y \in \{y_1, y_2, ...\}$ o rozkładzie pr. $p(y_k)$
- $f(x|y_k) = f_k(x)$

Twierdzenie 10.3 (Mieszanina rozkładów)**.**
Rozkład brzegowy zmiennej X ma postać:

$$f_X(x) = \sum_k f_k(x)p(y_k)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \sum_k P(a < X < b | Y = y_k) P(Y = y_k) \\ &= \sum_k \int_a^b f(x|y_k) dx \cdot p(y_k) \\ &= \sum_k \int_a^b f_k(x) dx \cdot p(y_k) \\ &= \int_a^b \sum_k f_k(x) p(y_k) dx \end{aligned}$$

Zatem

$$f_X(x) = \sum_k f_k(x) p(y_k)$$

$\square$

Przykład 10.9 (Mieszanina rozkładów)**.**

- Y - wynik rzutu kostką do gry. Zatem $Y = \{1, 2, ..., 6\}$; $P_Y(y) = 1/6$ dla $i = 1, .., 6$.
- Mając $Y = y$, losujemy X z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, y]$.
- Jaki jest rozkład X?

Rozwiązanie.

$$f(x|y) = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y$$

$$f_X(x) = \sum_{y > x}^{6} f(x|y) P_Y(y) = \frac{1}{6} \sum_{y > x}^{6} \frac{1}{y} \qquad 0 < x < 6$$

Wartości powyższej funkcji znajdują się w poniższej tabeli:

X	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$
$f_X(x)$	$\frac{147}{360}$	$\frac{87}{360}$	$\frac{57}{360}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{22}{360}$	$\frac{10}{360}$

11 Funkcja wektora losowego

Niech (X, Y)-wektor losowy

- $Z = g(X, Y) \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$p(z) = ? \quad \text{lub} \quad f(z) = ?$$

- $(U, V) = g(X, Y) \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$p(u, v) = ? \quad \text{lub} \quad f(u, v) = ?$$

Twierdzenie 11.1 (Funkcja dyskretnego wektora losowego)**.**
Niech $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ *a* $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ *o łącznym rozkładzie* $p(x_j, y_k) = P(X = x_j, Y = y_k)$. *Wtedy* $Z = g(X, Y)$ *również jest dyskretną zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa*

$$\begin{aligned} P(Z = z_l) &= P(Z = g(x_j, y_k) = z_l) \\ &= P((X, Y) = (x_j, y_k) : g(x_j, y_k) = z_l) \\ &= \sum_{(x_j, y_k): g(x_j, y_k) = z_l} p(x_j, y_k) \end{aligned}$$

- Niech (X, Y) będzie ciągłym wektorem losowym o gęstości pr. $f(x, y)$.
- Niech $Z = g(X, Y)$. Jaka jest gęstość pr. zmiennej Z ?
- Najpewniejszym sposobem określenia rozkładu Z jest obliczenie dystrybuanty F_Z.

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leqslant z) &= P(g(X, Y) \leqslant y) \\ &= \int_{(x,y): g(x,y) \leqslant z} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z)$$

Przykład 11.1 (Rozkład sumy zmiennych losowych)**.**
Jaki jest rozkład sumy, $Z = X + Y$, niezależnych zmiennych losowych o rozkładach równomiernych na przedziale $[0, a]$?

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{a^2} \qquad C = \{0 < x < a, 0 < y < a\}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z \int_0^{z-x} f(x, y) dy dx & \text{dla } 0 < z < a, \\ \int_0^{z-a} \int_0^a f(x, y) dy dx + \int_{z-a}^a \int_0^{z-x} f(x, y) dy dx & \text{dla } a < z < 2a \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{z^2}{a^2} & \text{dla } 0 < z < a, \\ 2\frac{z}{a} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{a^2} - 1 & \text{dla } a < z < 2a \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{a^2} & \text{dla } 0 < z < a, \\ \frac{2a - z}{a^2} & \text{dla } a < z < 2a \end{cases}$$

Twierdzenie 11.2 (Rozkład wartości maksymalnej)**.**
Niech (X, Y) *jest ciągłym wektorem losowym a* X *i* Y *są niezależne. Dystrybunta zmiennej losowej* $Z = Max\,(X, Y)$ *ma postać*

$$F_Z(z) = F_X(z) F_Y(z)$$

Gęstość pr. ma postać:

$$f_Z(z) = f_X(z) F_Y(z) + F_X(z) f_Y(z)$$

Twierdzenie 11.3 (Rozkład wartości minimalnej)**.**
Dystrybunta zmiennej losowej $V = Min\ (X,Y)$ *ma postać*

$$F_V(v) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

Gęstość pr. ma postać:

$$f_V(v) = f_X(v)[1 - F_Y(v)] + [1 - F_X(v)]f_Y(v)$$

Dowód.

$$Z = \text{Max } (X,Y)$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z < z) &= P(\text{Max } (X,Y) < z) \\ &= P(X < z, Y < z) \\ &= P(X < z) \cdot P(Y < z) \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) &= \left[\frac{d}{dz}F_X(z)\right]F_Y(z) + F_X(z)\left[\frac{d}{dz}F_Y(z)\right] \\ &= f_X(z)F_Y(z) + F_X(z)f_Y(z) \end{aligned}$$

□

Dowód.

$$V = \text{Min } (X,Y)$$

$$\begin{aligned} F_V(v) = P(V < v) &= P(\text{Min } (X,Y) < v) \\ &= 1 - P(\text{Min } (X,Y) > v) \\ &= 1 - P(X > v, Y > v) \\ &= 1 - P(X > v) \cdot P(Y > v) \\ &= 1 - (1 - F_X(v)) \cdot (1 - F_Y(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \frac{d}{dv}F_V(v) \\ &= -\frac{d}{dv}\left[1 - F_X(v)\right]\left[1 - F_Y(v)\right] - \left[1 - F_X(v)\right]\frac{d}{dv}\left[1 - F_Y(v)\right] \\ &= f_X(v)\left[1 - F_Y(v)\right] + \left[1 - F_X(v)\right]f_Y(v) \end{aligned}$$

□

- (X,Y)-ciągły wektor losowy o gęstości $f(x,y)$ na obrzarze $C = \{(x,y) : f(x,y) > 0\}$.
- Niech $Z = \phi(X,Y), \quad W = \eta(X,Y); \quad g(z,w) = ?$
- Na ogół $g(z,w) \neq f_Z(z) \cdot f_W(w)$

Twierdzenie 11.4.
Jeśli odwzorowanie $(x,y) \to (z,w)$ *jest* odwracalne *tzn.*

$$x = \alpha(z,w) \quad y = \beta(z,w)$$

to

$$g(z,w) = f(\alpha(z,w), \beta(z,w))|J| \quad \textit{dla } (z,w) \in D$$

gdzie

$$J = det \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial w} \end{bmatrix}$$

a D jest obrazem obszaru C na płaszczyźnie (z, w)

$$D = \{(z, w) : (\alpha(z, w), \beta(z, w)) \in C\}$$

Przykład 11.2 (Rozkład sumy i różnicy zmiennych losowych)**.**
Jaki jest łączny rozkład sumy i różnicy, $Z = X + Y;\ \ W = X - Y$, niezależnych zmiennych losowych o rozkładach równomiernych na przedziale $[0, a]$?

- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \dfrac{1}{a^2} \quad C = \{0 < x < a\ \wedge\ 0 < y < a\}$
- Układ równań: $Z = X + Y$ oraz $W = X - Y$ ma rozwiązanie w postaci

$$X = \alpha(Z, W) = \frac{Z + W}{2} \qquad Y = \beta(Z, W) = \frac{Z - W}{2}$$

- Zbiór D będący obrazem zbioru C na płaszczyźnie z, w ma postać:

$$D = \{(z, w) : 0 < \frac{z + w}{2} < a\ \wedge\ 0 < \frac{z - w}{2} < a\}$$

- Jakobian transformacji ma postać:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

- Łączna gęstość prawdopodobieństwa zmiennych Z, W ma postać:

$$g(z, w) = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2} \qquad D = \{0 < z + w < 2a\ \wedge\ 0 < z - w < 2a\}$$

Przykład 11.3 (Rozkład sumy i różnicy zmiennych losowych)**.**
Jakie są rozkłady sumy i różnicy, $Z = X + Y;\ \ W = X - Y$, niezależnych zmiennych losowych o rozkładach równomiernych na przedziale $[0, a]$? Czy zmienne Z i W są statystycznie niezależne?

- $$g(z, w) = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2} \qquad D = \{0 < z + w < 2a\ \wedge\ 0 < z - w < 2a\}$$
- Rozkład brzegowy zmiennej Z ma postać:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int\limits_{-z}^{z} \frac{1}{2a^2} dw = \frac{z}{a^2} & 0 < z < a \\ \int\limits_{z-2a}^{2a-z} \frac{1}{2a^2} dw = \frac{2a - z}{a^2} & a < z < 2a \end{cases}$$

- Rozkład brzegowy zmiennej W ma postać:

$$f_W(w) = \begin{cases} \int\limits_{-w}^{w+2a} \frac{1}{2a^2} dz = \frac{w+a}{a^2} & -a < w < 0 \\ \int\limits_{w}^{2a-w} \frac{1}{2a^2} dz = \frac{a-w}{a^2} & 0 < w < a \end{cases}$$

- Zmienne Z i W są statystycznie zależne