12 Własności wartości oczekiwanej

Twierdzenie 12.1 (Wartość oczekiwana funkcji wektora losowego)**.**
Jeśli znamy rozkład łączny wektora (X, Y) *to wartość oczekiwana funkcji* $Z = g(X, Y)$ *wynosi:*
Dla zmiennych dyskretnych

$$E[Z] = \sum_{j,k} g(x_j, y_k) P(X = x_j, Y = y_k)$$

a dla zmiennych ciągłych

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dy \right] dx \end{aligned}$$

Twierdzenie 12.2 (Liniowa kombinacja zmiennych losowych)**.**
Dla dowolnych zmiennych losowych zachodzi:

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$
- $E\left[\sum_i \alpha_i X_i + \beta\right] = \sum_i \alpha_i E[X_i] + \beta$

Twierdzenie 12.3 (Wartość oczekiwana iloczynu zmiennych losowych)**.**
Jeśli zmienne losowe są statystycznie niezależne to:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Dowód.

$$\begin{aligned} E[XY] &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy \\ &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} xyf_x(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_x(x)dx\right] \times \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy\right] \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned}$$

□

Powyższe twierdzenie obowiązuje dla zmiennych losowych statystycznie niezależnych. Zatem różnicę $E[XY] - E[x]E[y]$ można interpretować jak miarę zależności zmiennych losowych podobnie jak różnicę $P(A \cap B) - P(A)P(B)$ interpretujemy jako miarę zależności zdarzeń losowych.

Twierdzenie 12.4 (Wariancja sumy zmiennych losowych)**.**
Przyjmijmy, że $\mu_X = E[X]$ *oraz* $\mu_Y = E[Y]$

$$\begin{aligned} \mathit{Var}\,[X+Y] &= E\left[(X + Y - (\mu_X + \mu_Y))^2\right] \\ &= E[((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y))^2] \\ &= E[(X-\mu_X)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) + (Y-\mu_Y)^2] \\ &= \mathit{Var}\,[X] + \mathit{Var}\,[Y] + 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \end{aligned}$$

Ostatni człon powyższego wyrażenia odgrywa bardzo ważną rolę gdyż na mocy twierdzenia 13.3 przyjmuje wartość zerową dla zmiennych statystycznie niezależnych.

Definicja 12.1 (Kowariancja)**.**
Kowariancją nazywamy wielkość

$$\text{Cov}\,[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

Zmienne losowe nazywamy nieskorelowanymi jeśli $\text{Cov}\,[X, Y] = 0$

Zmienne losowe niezależne są nieskorelowane. Zmienne losowe nieskorelowane mogą być statystycznie zależne.

Twierdzenie 12.5 (Kombinacja liniowa zmiennych losowych)**.**
Dla dodowlnych zmiennych losowych zachodzi:

- $\mathit{Var}\,[X + Y] = \mathit{Var}\,[X] + \mathit{Var}\,[Y] + 2\mathit{Cov}\,[X, Y]$
- $\mathit{Var}\,[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathit{Var}\,[X_i] + 2\sum_{i<j} \mathit{Cov}\,[X_i, X_j]$
- $\mathit{Var}\left[\sum_i \alpha_i X_i + \beta\right] = \sum_i \alpha_i^2 \mathit{Var}\,[X_i] + 2\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \mathit{Cov}\,[X_i, X_j]$

Kowariancja jest uogólnionym pojęciem wariancji:

$$\text{Cov}\,[X, X] = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)] = \text{Var}\,[X]$$

Twierdzenie 12.6 (Liniowa kombinacja zmiennych losowych)**.**
Niech $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i + \beta \qquad Y = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j Y_j + \delta$

$$\mathit{Cov}\,[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \gamma_j \mathit{Cov}\,[X_i, Y_j]$$

Kowariancja zmiennych statystycznie zależnych przyjmuje wartości zależne od wariancji tych zmiennych, aby móc porównywać stopień zależności różnych zmiennych losowych analizuje się kowariancje między zmiennymi standaryzowanymi

Definicja 12.2 (Współczynnik korelacji)**.**
Współczynnikiem korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi X i Y nazywamy kowariancję zmiennych standaryzowanych:

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}\left[\frac{X - \mu_X}{\sqrt{\text{Var}\,[X]}}, \frac{Y - \mu_Y}{\sqrt{\text{Var}\,[Y]}}\right] = \frac{\text{Cov}\,[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}\,[X]\text{Var}\,[Y]}}$$

Przykład 12.1 (Wspólczynnik korelacji)**.**
Niech U, V, W będą niezależnymi zmiennymi losowymi oraz: $\text{Var}\,[U] = \sigma_u^2$, $\text{Var}\,[v] = \sigma_v^2$, $\text{Var}\,[W] = \sigma_w^2$. Niech $X = U + W$ oraz $Y_\pm = V \pm W, \quad \rho(X, Y_\pm) = ?$

Na mocy twierdzenia 13.5

$$\text{Var}\,[X] = \sigma_u^2 + \sigma_w^2; \quad \text{Var}\,[Y_\pm] = \sigma_v^2 + \sigma_w^2$$

a na mocy twierdzenia 13.6

$$
\begin{aligned}
\text{Cov}\,[X, Y_{\pm}] &= \text{Cov}\,[U, V] \pm \text{Cov}\,[U, W] + \text{Cov}\,[W, V] \pm \text{Cov}\,[W, W] \\
&= \pm \text{Var}\,[W] = \pm \sigma_w^2
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\rho(X, Y_{\pm}) = \frac{\pm \sigma_w^2}{\sqrt{(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)(\sigma_v^2 + \sigma_w^2)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 1)(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_w^2} + 1)}}
$$

Dla $\sigma_w^2 \gg \sigma_u^2, \sigma_v^2$ współczynnik korelacji przyjmuje wartość ± 1.
Dla $\sigma_w^2 \ll \sigma_u^2, \sigma_v^2$ współczynnik korelacji przyjmuje wartość 0.

Twierdzenie 12.7 (Własności współczynnika korelacji)**.**

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$
- $|\rho(X, Y)| = 1$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $Y = \alpha X + \beta; \;\; \alpha \neq 0$

Dowód. Wariancja jest wielkością nieujemną, rozpatrzmy wariancję sumy i różnicy standaryzowanych zmiennych losowych:

$$
\begin{aligned}
0 \;\; < \;\; & \text{Var}\left[\frac{X}{\sqrt{\text{Var}\,[X]}} \pm \frac{Y}{\sqrt{\text{Var}\,[Y]}}\right] \\
& = \frac{\text{Var}\,[X]}{\text{Var}\,[X]} + \frac{\text{Var}\,[Y]}{\text{Var}\,[Y]} \pm 2\frac{\text{Cov}\,[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}\,[X]\text{Var}\,[Y]}} \\
& = 2 \pm 2\rho(X, Y)
\end{aligned}
$$

□

Z powyższej nierówności wynika pierwsza własność współczynnika korelacji.

Dowód. Dla $Y = \alpha X + \beta$

$$
\begin{aligned}
\rho(X, Y) &= \rho(X, \alpha X + \beta) \\
&= \frac{\alpha \text{Cov}\,[X, X]}{\sqrt{\text{Var}\,[X] \alpha^2 \text{Var}\,[X]}} \\
&= \frac{\alpha \text{Var}\,[X]}{|\alpha| \text{Var}\,[X]} \\
&= \frac{\alpha}{|\alpha|} \\
&= \pm 1 \;\; \text{dla } \alpha \neq 0
\end{aligned}
$$

□

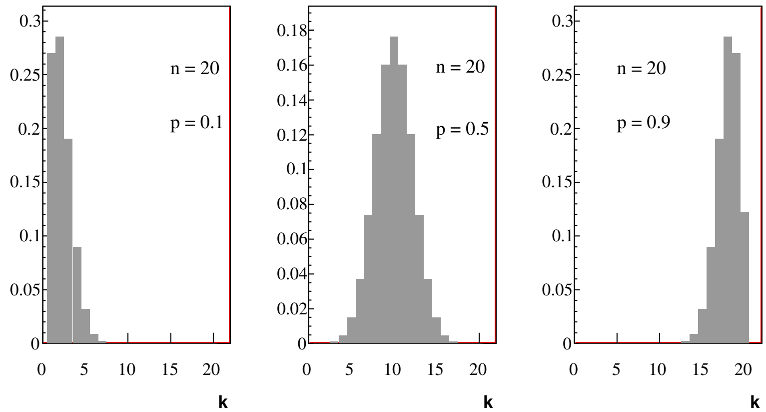
13 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

Definicja 13.1 (Rozkład dwumianowy)**.**
Jeśli X ma rozkład prawdopodobieństwa:

$$
P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2. \ldots, n
$$

to mówimy, że ma rozkład dwumianowy o parametrach n i p ($n = 1, 2, \ldots, \;\; 0 < p < 1$)

- oznaczmy go jako bin (n, p);
- X opisuje ilość sukcesów w n niezależnych próbach;
- p jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedyńczej próbie.



Rysunek 8: Przykłady rozkładu dwumianowego dla różnych wartości parametru p

Twierdzenie 13.1 (Rozkład dwumianowy)**.**
Niech $X \sim bin\ (n, p)$

$$E[X] = np; \qquad Var\,[X] = np(1-p)$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!((n-1)-l)!} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \qquad l = k-1 \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} \text{bin}\,(n-1, p) = np
\end{aligned}$$

$\square$

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \frac{(n-1)!}{l!((n-1)-l)!} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \qquad l = k-1 \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np \left[\sum_{l=0}^{n-1} l \text{bin}\,(n-1,p) + \sum_{l=0}^{n-1} \text{bin}\,(n-1,p) \right] \\
&= np[(n-1)p+1] = n^2p^2 + np(1-p)
\end{aligned}
$$

$$
\text{Var}\,[X] = E[X^2] - E[X]^2 = np(1-p)
$$

Definicja 13.2 (Rozkład geometryczny)**.**
Jeśli X ma rozkład prawdopodobieństwa:

$$
P(X=k) = p(1-p)^{k-1} \qquad k = 1, 2 \ldots,
$$

to mówimy, że ma rozkład geometryczny o parametrze p ($0 < p < 1$)

- oznaczmy go jako geom (p);
- X opisuje ilość niezależnych prób zanim pojawi się pierwszy sukces;
- p jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedyńczej próbie.

Twierdzenie 13.2 (Rozkład geometryczny)**.**
Niech $X \sim$ geom (p)

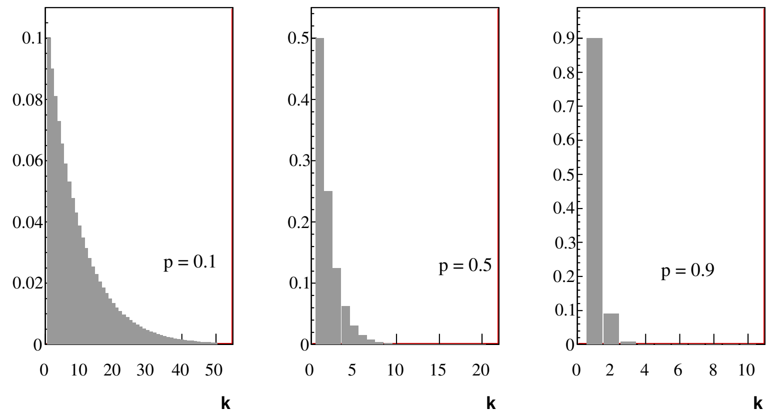
$$
E[X] = \frac{1}{p}; \qquad \textit{Var}\,[X] = \frac{1-p}{p^2}
$$

Definicja 13.3 (Rozkład Poissona)**.**
Jeśli X ma rozkład prawdopodobieństwa:

$$
P(X=k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2 \ldots,
$$

to mówimy, że ma rozkład Poissona o parametrze μ ($\mu > 0$)

- oznaczmy go jako Poi (μ);
- X opisuje ilość wystąpień nieprzewidywalnych najczęściej rzadkich zdarzeń w przeciągu krótkiego okresu czasu lub w małym obszarze przestrzeni;



Rysunek 9: Przykłady rozkładu geometrycznego dla różnych wartości parametru p

- μ jest intensywnością zdarzenia.

Twierdzenie 13.3 (Rozkład Poissona)**.**
Niech $X \sim Poi\,(\mu)$

$$E[X] = \mu; \qquad Var\,[X] = \mu$$

Twierdzenie 13.4 (Rozkład Poissona a rozkład dwumianowy)**.**
Jeśli w rozkładzie dwumianowym $n \to \infty$ *i* $p \to 0$ *w taki sposób, że* $0 < np < \infty$ *wtedy*

$$\lim_{n \to \infty} bin\,(n, p) = Poi\,(\mu = np)$$