Zestaw 1 / Prawdopodobieństwo

1. Udowodnij twierdzenie 2.3 z wykładu korzystając z pewników Kołmogorowa.

2. Udowodnij twierdzenie 2.4 z wykładu korzystając z twierdzenia 2.3 i zasady indukcji matematycznej.

3. Niech $A, B, C \subset \Omega$ oraz $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$ i $P(A \cap B \cap C) = 1/8$. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń: a) zaszło dokładnie jedno z tych zdarzeń, b) żadne z tych zdarzeń nie zaszło, c) przynajmniej jedno z tych zdarzeń zaszło, d) wszystkie zdarzenia zaszły, e) zaszły dokładnie dwa z tych zdzarzeń.

4. Sześcienna kostka do gry została wykonana w taki sposób, że prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek j jest proporcjonalne do j. Korzystając z pewników rachunku prawdopodobieństwa określ prawdopodobieńswtwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek. Jak zmieni się wynik jeśli kostka ma $2n$ ścian?

5. (RN 5.1.4) W pewnym miasteczku zdarza się zawsze siedem wypadków drogowych na tydzień. Co ile, typowo, lat wystąpi 'czarny' tydzień, czyli taki, w którym w każdym dniu będzie wypadek?

6. (RN 2.4.10) Jaką liczbę n razy należy rzucić rzetelną sześcienną kostką do gry, aby prawdopodobieństwo uzyskania przynajmniej jednej szóstki wynosiło co najmniej p? Znajdź n dla a) $p = 0.5$, b) $p = 0.8$, c) $p = 0.9$.

7. (RN 5.1.10) W pudełku znajduje się 100 śrub, z czego 5 ma defekt, reszta jest dobra. Z pudełka wybrano losowo bez zwracania 5 śrub. Znajdź prawdopodobieństwo, że a) wszystkie wybrane śruby są dobre; b) wszystkie wybrane śruby są złe. Rozwiąż to samo zadanie, zakładając, że losowanie odbywa się ze zwracaniem.

8. (RN 2.2.2) Stosunek liczby białych do liczby czarnych kul w urnie wynosi $3/4$. Znajdź prawdopodobieństwo P, że przy losowaniu kul bez zwracania jako ostatnią wylosujemy kulę białą.

9. Tadeusz i Zosia umówili się w kawiarni między 17:00 i 18:00. Obydwoje są bardzo dumni i nie zamierzają czekać na partnera dłużej niż 15 minut. Ile wynosi prawdopodobieństwo P, że randka dojdzie do skutku, jeśli zarówno Zosi jak i Tadziowi na tyle brakuje punktualności, że moment pojawienia się każdego z nich w kawiarni można traktować jako losowy między wyznaczonymi godzinami? Skorzystaj z prawdopodobieństwa geometrycznego.

10. Rzucamy monetę o średnicy d na posadzkę z kwadratowych płytek o boku $D(D > d)$. Jakie są prawdopodobieństwa zdarzeń: a) moneta częściowo przykrywa tylko jedną płytkę, b) moneta częściowo przykrywa cztery płytki? Skorzystaj z prawdopodobieństwa geometrycznego.

11. 10 osób wsiada do pustego pociągu. Każda losowo wybiera jeden z czterech wagonów. Jaka jest szansa, że wszystkie wagony będą zajęte? Zastosuj metodę włączeń i wyłączeń.