

**Analiza częstotliwościowa jako metoda filtrowania profili powierzchni topograficznej.**

„Twierdzenie Fouriera jest nie tylko jednym z najpiękniejszych wyników współczesnej analizy, ale można o nim powiedzieć, że dostarcza niezastąpionego instrumentu przy rozważaniu niemal każdego problemu fizycznego”

Lord Kelvin

*Streszczenie*

*Referat prezentuje metodę analizy częstotliwościowej wykorzystaną do filtracji elementów nie należących do powierzchni topograficznej. Przedstawiono zastosowanie filtrów cyfrowych o skończonej i nieskończonej odpowiedzi impulsowej i przeprowadzono ocenę dokładności uzyskanych wyników. Wyznaczono także optymalny interwał pomiędzy danymi pomiarowymi korzystając z twierdzenia o próbkowaniu.*

**1. Wprowadzenie**

W niniejszym artykule przebadano możliwość wykorzystania analizy częstotliwościowej w procesie filtracji profili terenowych z elementów nie należących do powierzchni topograficznej.

W ostatnich latach w celu pozyskiwania Numerycznego Modelu Powierzchni Topograficznej coraz częściej stosowany jest automatyczny pomiar fotogrametryczny, bazujący na korelacji zdjęć lotniczych. Duże zainteresowanie wzbudza także pozyskiwanie NMPT z wykorzystaniem skanera laserowego. Problemem w obydwu technologiach jest konieczność usunięcia, ze zbioru punktów pomierzonych, wszystkich punktów nie należących do powierzchni topograficznej (zabudowa, roślinność).

Niniejsza praca ukazuje na przykładzie uproszczonym do jednowymiarowego profilu terenowego na ile analiza częstotliwościowa może znaleźć zastosowanie w próbie rozwiązywania wymienionych problemów.

W artykule przedstawiono technikę cyfrowej filtracji, bazująca na analizie profilu terenowego przetransformowanego do dziedziny częstotliwości. Analiza częstości ujawnia ukryte okresowości w danych wysokościowych. Wykorzystując ten fakt możliwe jest oddzielenie błędów przypadkowych od wartości prawdziwych w danym zbiorze obserwacji.

W procesie pozyskiwania danych do NMPT istotnym zagadnieniem jest dobór odpowiedniego interwału próbkowania danych pomiarowych w celu zapewnienia wymaganej dokładności. Wykorzystując twierdzenie o próbkowaniu, wywodzące się z teorii sygnałów elektrycznych

wyznaczono optymalny odstęp, który zapewni, że w badany profil zostanie przedstawiony z wymaganą dokładnością.

## 2. Podstawy teoretyczne

Powierzchnia terenu stanowi sumę składników o różnym rozmiarze i konfiguracji przestrzennej. Jej reprezentacja jest zbliżona do zmienności sygnału elektrycznego. Zakłócenia występujące w przebiegu powierzchni topograficznej mogą być utożsamiane z szumem pojawiającym się podczas transmisji sygnału. Wykazują one najczęściej losową zmienność o małej amplitudzie i okresie. Analiza częstotliwościowa od wielu lat znajduje zastosowanie w badaniach nad NMPT. Warto w tym miejscu wspomnieć o pracach związanych z interpolacją i wygładzaniem [Kratky, 1980], określeniem interwału próbkowania [Jacobi, 1980] [Bursztyńska, 2000], filtrowaniem [Hassan, 1988a], [Hassan, 1988b], [Ionescu, 1996] i oceną dokładności [Frederiksen, 1981].

Analiza częstotliwościowa umożliwia otrzymanie zależności pomiędzy dziedziną przestrzenną profilu terenowego a jego dziedziną częstotliwościową. Dyskretne dane przestrzenne są opisywane w dziedzinie częstotliwości przez zastosowanie dyskretnej transformacji Fouriera. W wyniku tej operacji otrzymywana jest funkcja gęstości widmowej zwana potocznie widmem [Hassan, 1988a]:

$$S_N(m \cdot \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_N(n \cdot \Delta x) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \Delta x \cdot m \cdot \omega} \quad (2.1)$$

gdzie:

$\omega$  – częstotliwość kątowna,

$\Delta x$  – interwał próbkowania,

$m = 0, 1 \dots M - 1$ ,

$n = 0, 1, \dots N - 1$ ,

$M$  – liczba punktów widma,

$N$  – liczba punktów pomiarowych,

$$j = \sqrt{-1},$$

$Z_N$  – wartość wysokości w punkcie pomiarowym.

Dyskretna transformacja Fouriera jest zespoloną funkcją okresową z okresem  $2\pi$  i może być zapisana jako składowa rzeczywista i urojona:

$$S_N(m \cdot \omega) = A_N(m \cdot \omega) - j \cdot B_N(m \cdot \omega) \quad (2.2)$$

gdzie:

$$A_N(m \cdot \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_N(n \cdot \Delta x) \cdot \cos(n \cdot \Delta x \cdot m \cdot \omega)$$

$$B_N(m \cdot \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_N(n \cdot \Delta x) \cdot \sin(n \cdot \Delta x \cdot m \cdot \omega)$$

Oznaczenia identyczne jak w równaniu 2.1.

Wynika z tego, że każdy profil może być przedstawiony przez skończoną liczbę funkcji sinusoidalnych o odpowiedniej częstotliwości, amplitudzie i fazie.

W praktycznych rozwiązaniach stosuje się zwykle algorytm zwany szybką transformacją Fouriera (ang. *Fast Fourier Transformation* – FFT) wykonywany na ciągu próbek o długości  $N$ , będącej naturalną potęgą liczby 2, co przyczynia się do znacznego skrócenia czasu obliczeń.

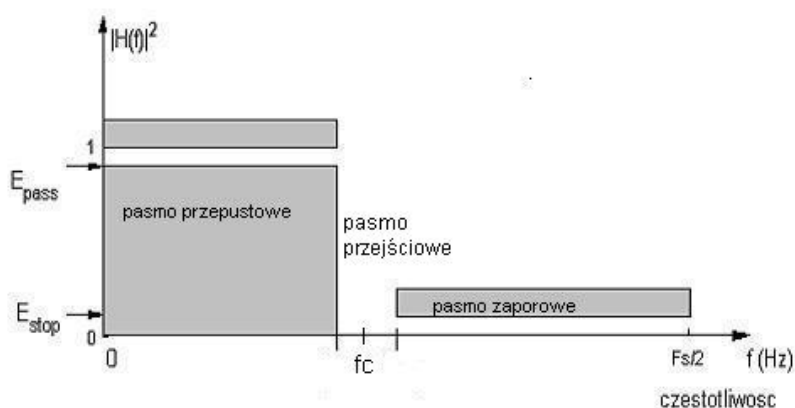
Periodogram jako ocena funkcji gęstości widmowej mocy dostarcza interesujących informacji o składzie częstotliwościowym zbioru danych wysokościowych. Definiowany jest jako:

$$P_N(m \cdot \omega) = \frac{1}{N} |S_N(m \cdot \omega)|^2 \quad (2.3)$$

Oznaczenia identyczne jak w równaniu 2.1.

Szczegółowa analiza tego wykresu pozwala na wyznaczenie przedziału reprezentującego prawdziwe wysokości profilu i przedziału szumu informacji (wyznaczenie tzw. częstotliwość odcięcia  $f_c$ ). Szum jest wysoce nieregularny, zatem szeregi Fouriera będą zbiegać się bardzo powoli i wykres periodogramu nie będzie zmniejszał się w wysokich częstotliwościach. Umożliwia to zastosowanie wydajnej metody oddzielenia wartości prawdziwych od błędów losowych.

Znajomość częstotliwości odcięcia pozwala na zastosowanie filtrów częstotliwościowych, które nie przepuszczają określonych składowych profilu terenowego. W teorii sygnałów elektrycznych wyróżnia się dwa rodzaje filtrów częstotliwościowych: filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej (ang. *Finite Impulse Response* – FIR) i o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (ang. *Infinite Impulse Response* – IIR). Na Rysunku 1 przedstawiona jest przykładowa charakterystyka częstotliwościowa dolnoprzepustowego filtra cyfrowego. Filtr składa się z pasma przepustowego, który przepuszcza zawarte w nim częstotliwości, pasma przejściowego i pasma zaporowego, usuwającego występujące w nim częstotliwości. Nie jest możliwe zaprojektowanie idealnego filtra cyfrowego, przeprowadzane transformacje powodują powstanie zakłóceń wyrażających się poprzez zafalowania w paśmie przepustowym i zaporowym ( $E_{\text{pass}}$ ,  $E_{\text{stop}}$ ) oraz wystąpienie pasma przejściowego.



**Rysunek 1** Przykładowa charakterystyka częstotliwościowa filtru dolnoprzepustowego.

$f_c$  – częstotliwość odcięcia,

$E_{pass}$  – parametr określający dopuszczalny błąd pasma przepustowego,

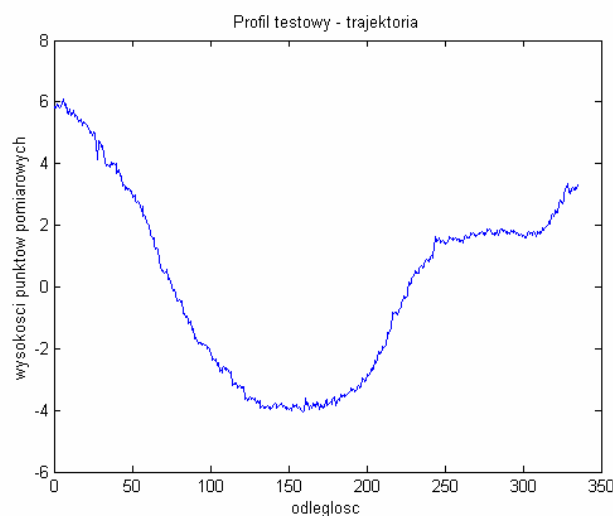
$E_{stop}$  – parametr określający dopuszczalny błąd pasma zaporowego,

Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej mimo dużej złożoności obliczeniowej, znajdują szerokie zastosowanie z powodu istotnych zalet: bezwzględnej stabilności, niewielkiego szumu wynikającego z zaokrążeń i istnienia efektywnych metod projektowania. W poniższym artykule do zaprojektowania filtrów posłużono się metodą „okienkową”.

Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej wymagają mniejszej liczby współczynników filtru, ale bardziej wyszukanych metod projektowania w celu zapewnienia stabilności i dokładności. W procesie projektowania wykorzystano prototyp analogowy i dopasowano do niego metodą transformacji biliniowej strukturę cyfrową.

### 3. Charakterystyka testu

W celu przeprowadzenia analizy został pomierzony fotogrametrycznie sposobem manualnym profil powierzchni topograficznej na stacji cyfrowej Video Stereo Digitizer ( Zakład Fotogrametrii i Informatyki Teledetekcyjnej Akademii Górniczo – Hutniczej w Krakowie). Wykorzystano model stereoskopowy zdjęć lotniczych w skali 1: 6000 terenu Baltimore w Stanach Zjednoczonych. Profil został pomierzony dwukrotnie. Pierwszy pomiar został obarczony symulowanym szumem, wprowadzonym do danych z wykorzystaniem opcji trajektoria dostępnej w oprogramowaniu autografu. Zarejestrowano 512 punktów profilu w odstępnie 0.66 m. Całkowita długość profilu to 335 m. (Rys.2.). Dane wysokościowe zostały zredukowane o wartość trendu, która w tym przypadku została utożsamiona z wartością średnią punktów wysokościowych profilu.



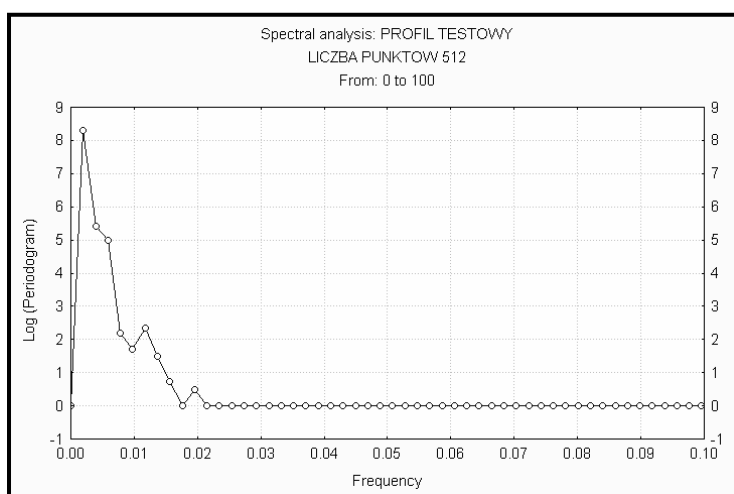
**Rysunek 2** Profil testowy zarejestrowany opcją trajektoria.

Został również pomierzony sposobem manualnym profil o następującej charakterystyce: ilość punktów: 121; odstęp próbkowania: 2.80 m; długość profilu: 335 m. Był on traktowany jako profil wzorcowy i posłużył do przeprowadzenia analizy dokładności poszczególnych metod filtracji cyfrowej.

#### 4. Analiza częstotliwościowa badanego profilu powierzchni topograficznej

##### 4.1. Wyznaczenie widma częstotliwościowego i częstotliwości odcięcia

Pierwszy krok analizy polegał na zastosowaniu szybkiej transformacji Fouriera. FFT operuje na zbiorze danych pomiarowych zebranych w pewnym przedziale przestrzennym i zakłada, że badany profil jest okresowy. Założenie to powoduje powstanie zniekształcenia widma czyli tzw. przecieku [Lyons, 1999], związanego z pojawieniem się w widmie składowych wysokoczęstotliwościowych, nie występujących w profilu wejściowym. W celu zminimalizowania tego błędu przeprowadzono technikę wygładzania z zastosowaniem wagowanego okna Hanninga [Lyons, 1999]. Metoda ta polega na zastosowaniu algorytmów zmniejszających amplitudę próbek pomiarowych na granicy okna. Kolejnym etapem było wyznaczenie wykresu periodogramu, określającego zależność gęstości widmowej mocy od częstotliwości (Rys.3.).



Rysunek 3 Wykres logarytmiczny periodogramu, określający zależność gęstości widmowej mocy od częstotliwości.

Zastosowano skalę logarytmiczną dla poprawy rozdzielczości wartości na wykresie w dziedzinie częstotliwości. Szczegółowa analiza umożliwiła określenie częstotliwości odcięcia, czyli częstotliwości, powyżej której pojawiające się wartości są utożsamiane z szumem informacji:  $f_c = 0.027$  [1/m]. Wartość ta stanowi główny parametr wykorzystywany w dalszym procesie filtracji.

##### 4.2. Określenie optymalnego interwału próbkowania z wykorzystaniem twierdzenia o próbkowaniu.

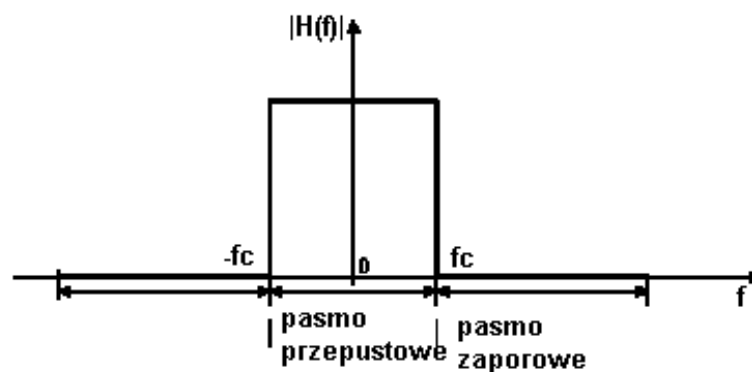
Przekładając twierdzenie o próbkowaniu sygnału elektrycznego na teorię związaną z analizą NMPT, można powiedzieć, że jeśli profil terenowy ma widmo częstotliwościowe, rozciągające się od częstotliwości zerowej do pewnej częstotliwości maksymalnej ( $f_c$ ), to profil ten można w pełni określić na podstawie punktów pomiarowych zarejestrowanych w odstępnie  $\Delta x$ , obliczonym z relacji:

$$\Delta x = \frac{1}{2 \cdot f_c} \quad (3.1)$$

W przeprowadzonym teście, wartość optymalnego odstepu wyniosła 18.65 m. Rejestracja punktów pomiarowych z tak wyznaczonym interwałem próbkowania zapewni wystarczającą wiarygodność przebiegu profilu terenowego. Może to znaleźć zastosowanie w przypadku pomiaru manualnego, gdyż próbkowanie z mniejszym odstepem nie wniesie nowej istotnej informacji do danych a przyczyni się do czasu trwania operacji.

## 5. Filtracja częstotliwościowa z wykorzystaniem filtrów cyfrowych o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR)

W pierwszym etapie analizy filtracyjnej wykorzystano dolnoprzepustowe filtry cyfrowe FIR. Filtry dolnoprzepustowe przepuszczają składniki o niskich częstotliwościach, tłumią natomiast elementy o większych częstotliwościach. Progiem wyznaczającym pasmo przepustowe i zaporowe jest wyznaczona z analizy periodogramu częstotliwość odcięcia. Przykład idealnego filtru dolnoprzepustowego przedstawiony jest na Rys. 4. W przypadku filtrów FIR do uzyskania bieżącej próbki profilu wyjściowego wykorzystuje się próbkę bieżącą i próbki przeszłe profilu wejściowego, nie korzystając z żadnych przeszłych próbek profilu wyjściowego.



Rysunek 4 Idealny filtr dolnoprzepustowy.

### 5.1. Filtracja z wykorzystaniem filtru zaprojektowanego metodą „okienkową”

Istota procedury projektowania polega na wyznaczeniu idealnej nieskończonej odpowiedzi impulsowej (współczynników filtru) poprzez transformację odwrotną pożądaną charakterystyki

częstotliwościowej (Rys.1.), a następnie obcięciu i wygładzeniu tej charakterystyki funkcją okna [Bogucka, 1999]. Za idealną charakterystykę częstotliwościową przyjmuje się parzyste prostokątne funkcje, określające pasma przepustowe i zaporowe (Rys 4). Nieskończony ciąg współczynników filtru jest ograniczany i wygładzany przy użyciu funkcji okna. Najprostsza z nich, w postaci okna prostokątnego, powoduje silne zafalowania w charakterystyce częstotliwościowej w pobliżu punktów nieciągłości charakterystyki idealnej (zjawisko Gibbsa). Wykorzystywane są więc funkcje okien o łagodniej przebiegających wykresach, co prowadzi do poprawy właściwości selektywności otrzymanych filtrów.

W niniejszym opracowaniu zastosowano następujące funkcje okna: Bartletta, Hanninga, Hamminga, Blackmana, Czebyszewa, Kaisera. Szczegółowe wzory tych funkcji można znaleźć w każdym podręczniku przetwarzania sygnałów elektrycznych [Watkins, 1995] [Baskakow, 1991].

Stosując powyższe okna oraz wyznaczoną z periodogramu częstotliwości odcięcia zaprojektowano filtry cyfrowe ze zmiennymi parametrami wejściowymi. Szczegółowe informacje o ustawieniach poszczególnych filtrów zostały zawarte w Tabeli 1.

Wyznaczone współczynniki filtru posłużyły do przeprowadzenia filtracji badanego profilu powierzchni topograficznej.

## 5.2. Analiza dokładności

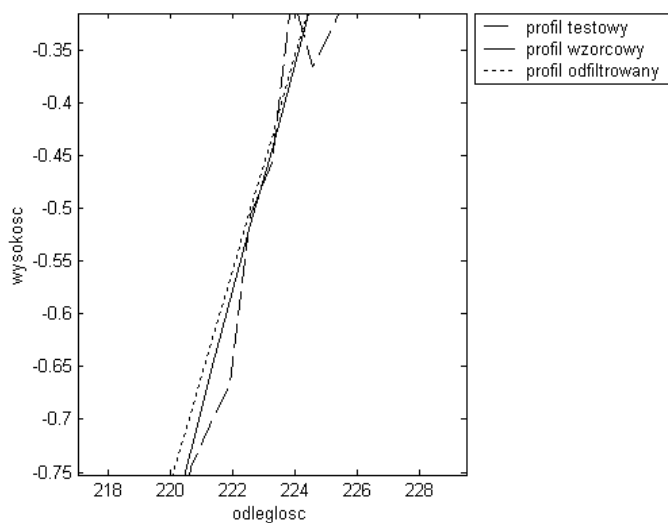
Analiza dokładności filtracji została przeprowadzona w dwóch etapach. W pierwszej fazie zostały określone różnice pomiędzy profilem testowym a profilem wzorcowym. Wyznaczony średni błąd kwadratowy (ang. *Root Mean Square Error* – RMSE) wyniósł 0.19 m. Stanowił on wskaźnik błędności pomiaru i był miarodajnym indykatorem poprawy po przeprowadzeniu filtracji. Drugi etap to obliczenie odchyłek pomiędzy profilem odfiltrowanym a wzorcowym. Uzyskane rezultaty zostały zamieszczone w Tabeli 1.

Filtry FIR	Parametry	Średni błąd kwadratowy RMSE [m]
Bartletta	$r = 12$	0.092
	$r = 4$	0.109
	$r = 20$	0.099
Hanninga	$r = 12$	0.092
Hamminga	$r = 12$	0.092
Blackmana	$r = 12$	0.095
Czebyszewa	$r = 12, \gamma = 0.75$	0.085
	$r = 12, \gamma = 2$	0.092
	$r = 12, \gamma = 3$	0.093
Kaisera	$r = 12, \alpha = 15$	0.085
	$r = 12, \alpha = 40$	0.091

Tabela 1 Średni błąd kwadratowy filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej o ustalonych parametrach:  $r$  – rząd filtru,  $\gamma$ ,  $\alpha$  – parametry sterujące.

Najlepsze wyniki zapewniły filtry z ilością współczynników równą 12, korzystające z okien Kaisera i Czebyszewa. Są to tzw. okna optymalne umożliwiające modyfikację charakterystyki częstotliwościowej poprzez zmiany parametrów sterujących, pozwalających ustalić tłumienie w paśmie zaporowym i fluktuacje w paśmie przepustowym.

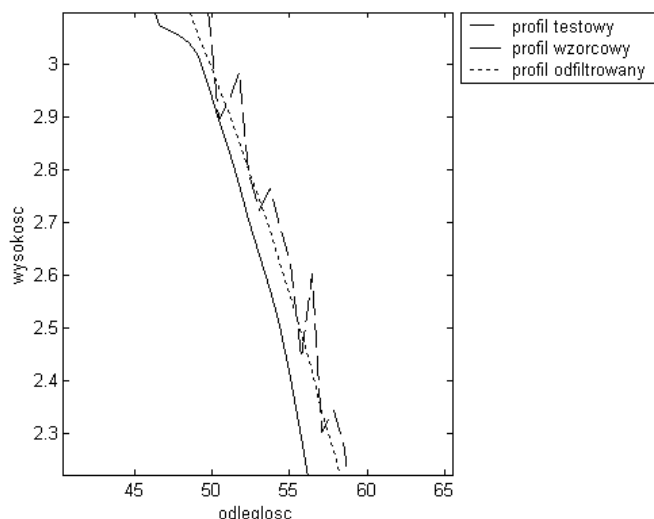
W celu przeprowadzenia bardziej skrupulatnej analizy dokładności, dla filtru okna Czebyszewa, prześlędzono odchyłki na poszczególnych punktach. Symulowany szum zasadniczo oscylował wokół profilu wzorcowego i w wyniku przeprowadzonej filtracji został w sposób zadawalający usunięty (Rys. 5).



**Rysunek 5** Przebieg profilu wzorcowego, testowego i odfiltrowanego na dowolnie wybranym odcinku.

Wyznaczono jednak trzy odcinki profilu o błędach przekraczających 0.20 m. Wykresy przebiegu profilu testowego, wzorcowego i odfiltrowanego (Rys.6) ujawniły, że powodem tak dużych odchyłeń był fakt, że wprowadzone wartości testowe w żadnym punkcie nie reprezentowały rzeczywistej powierzchni. Usunięcie tych trzech odcinków z analizy (w sumie 36 punktów, co stanowi 7% wszystkich punktów profilu) spowodowało znaczną poprawę dokładności. Średni błąd kwadratowy wyniósł 0.063 m.





Rysunek 6 Przebieg profilu wzorcowego, testowego i odfiltrowanego na odcinku błędów maksymalnych.

## 6. Filtracja częstotliwościowa z wykorzystaniem filtrów cyfrowych o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR)

Innym rodzajem filtrów częstotliwościowych są filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej. Główną zaletą filtrów IIR, w porównaniu do filtrów FIR, jest możliwość stosowania znacznie niższych rzędów filtrów, czyli mniejszej liczby współczynników filtru. Dzięki zastosowaniu filtrów IIR możliwe jest zatem znaczne zmniejszenie złożoności obliczeniowej filtracji cyfrowej. W przypadku filtrów IIR do uzyskania bieżącej próbki profilu wyjściowego wykorzystuje się zarówno próbkę bieżącą i próbki przeszłe profilu wejściowego jak i przeszłe próbki profilu wynikowego.

### 6.1. Filtracja z wykorzystaniem filtru zaprojektowanego na podstawie prototypu analogowego

W procesie projektowania filtrów IIR wykorzystano prototyp analogowy i dopasowano do niego odpowiednik cyfrowy dokonując odwzorowania analogowo – cyfrowego metodą transformacji biliniowej [Krauss, 1994]. Celem było znalezienie filtru cyfrowego, który zachowuje charakterystyki amplitudowe i fazowe filtru analogowego oraz odznacza się stabilnością i przyczynowością. W przeprowadzonych badaniach skupiono się na dolnoprzepustowych filtrach IIR Butterwortha, Czebyszewa i Cauera. Szczegółowe wzory tych funkcji można znaleźć w każdym podręczniku przetwarzania sygnałów elektrycznych [Watkins, 1995] [Baskakow, 1991]. Filtry te różnią się między sobą przebiegiem charakterystyki częstotliwościowej w paśmie zaporowym i przepustowym. Przebadano różne możliwości ustawień parametrów filtrów, zmieniając wartość zafalowań w paśmie przepustowym  $E_{pass}$ , wartość tłumień w paśmie zaporowym  $E_{stop}$  (Rys.1.) i wielkość pasma przejściowego. Szczegółowe informacje zostały zawarte w Tabeli 2.

## 6.2. Analiza dokładności

Analiza dokładności przebiegała w sposób identyczny jak opisano w paragrafie 5.2. Uzyskane rezultaty są wyszczególnione w Tabeli 2.

Filtry	Parametry	Średni błąd kwadratowy RMSE [m]
Butterwortha	$r = 3$	0.097
	$r = 2$	0.092
Czebyszewa typ 1	$r = 3; E_{\text{pass}} = 0.25$	0.100
	$r = 3; E_{\text{pass}} = 0.01$	0.089
Czebyszewa typ 2 (odwrotny)	$r = 3; E_{\text{stop}} = 5$	0.086
	$r = 3; E_{\text{stop}} = 10$	0.093
	$r = 3; E_{\text{stop}} = 0.5$	0.100
Cauera (eliptyczny)	$r = 3; E_{\text{pass}} = 0.01; E_{\text{stop}} = 5$	0.083
	$r = 3; E_{\text{pass}} = 0.1; E_{\text{stop}} = 4$	0.089
	$r = 3; E_{\text{pass}} = 0.5; E_{\text{stop}} = 5$	0.093

Tabela 2 Średni błąd kwadratowy filtrów o nieskończonej odpowiedzi impulsowej przy zmieniających się parametrach:  $r$  – rząd filtru,  $E_{\text{pass}}$  – zafalowania w paśmie przepustowym,  $E_{\text{stop}}$  – tłumienie w paśmie zaporowym.

W tym przypadku najkorzystniejszy okazał się filtr eliptyczny Cauera, który zapewnił dokładność porównywaną z filtrami FIR przy rzędzie filtru równym 3. Analogicznie do poprzedniego rozdziału przeprowadzono szczegółową analizę odchyłek na poszczególnych punktach. Również w tym przypadku można było wykryć obszary błędów maksymalnych. Ostatecznie średni błąd kwadratowy RMSE wyniósł 0.055.

## 7. Wnioski

Przeprowadzone badania ujawniły przydatność analizy częstotliwościowej w procesie filtracji elementów nie należących do powierzchni topograficznej. Znaczącą korzyścią w tym procesie jest fakt, że stopień filtracji może być kontrolowany przez odpowiedni dobór częstotliwości odcięcia.

Analizując powyższe wyniki można stwierdzić, że filtracja z wykorzystaniem filtrów o skończonej i nieskończonej odpowiedzi impulsowej przebiega prawidłowo w przypadku danych oscylujących wokół wartości prawdziwych profilu terenowego (Rys.5.). Problem pojawia się w momencie wystąpienia dużych zaburzeń w przebiegu profilu (Rys.6.). W tym przypadku filtry cyfrowe nie są zdolne ustalić prawidłowego kształtu powierzchni topograficznej.

Wybór pomiędzy filtrami FIR i IIR nie jest jednoznaczny. W teorii sygnałów elektrycznych wybranie odpowiedniego filtru jest ściśle związane z rozpatrywanym zagadnieniem. W przypadku filtrów FIR najkorzystniejsze są filtry z parametrami sterującymi okna, które umożliwiają eksperymentowanie z różnymi wartościami  $\alpha$  i  $\beta$  aby uzyskać optymalny, dla konkretnych zastosowań, kształt funkcji okna. Przy rozpatrywaniu filtrów IIR najdokładniejszy okazał się filtr eliptyczny, wprowadzający równe zafalowania w paśmie przepustowym i zaporowym.

Zaprezentowany w artykule przykład jest właściwie czysto teoretycznym przedstawieniem problemu. Interesujące jest na ile uzyskane wyniki pokryją się z praktyczną filtracją elementów pokrycia powierzchni, co będzie stanowić dalszy etap badań.

W obecnym stadium analizy można postawić hipotezę, że analiza częstotliwościowa stanowi pewne dopełnienie procesu filtracji elementów pokrycia terenu. Włączenie do badań danych pochodzących z zobrażeń lotniczych lub satelitarnych i dodatkowe przeprowadzenie filtracji w dziedzinie spektralnej i teksturalnej przyczyniłoby się z pewnością do zwiększenia wiarygodności przeprowadzanych operacji filtracyjnych.

## 8. Literatura

Baskakow Ś. I., Sygnały i układy radiotechniczne. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.

Bogucka H., Dziech A., Sawicki J., Elementy cyfrowego przetwarzania sygnałów z przykładami zastosowań i wykorzystaniem środowiska MATLAB. Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków 1999.

Bursztyńska K., Tumska O., Leluk D., Computer technology of determination of area of submerged territory according to Digital Elevation Model. XIX th Congress of the ISPRS, Amsterdam 2000.

Dąbrowski A., Przetwarzanie sygnałów przy użyciu procesorów sygnałowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1998.

Frederiksen P., Terrain analysis and accuracy prediction by means of the fourier transformation. Photogrammetria (36), 1981.

Hassan M., Filtering digital profile observations. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing, 54(10), 1988a.

Hassan M., Periodogram modification as a method of filtering terrain profile observations. XVI th Congress of the ISPRS, Kyoto 1988b.

Ionescu I., On the technique for terrain roughness determination. XVIII th Congress of the ISPRS, Vienna 1996.

Jacobi O., Digital terrain, point density, accuracy of measurements, type of terrain and surveying expenses. XIVth Congress of the ISPRS, Hamburg 1980.

Kratky V., Spectral analysis of interpolation. XIVth Congress of the ISPRS, Hamburg 1980.

Krauss T. P., Shure L., Little J. N., Signal Processing Toolbox. 1994.

Lyons R. G., Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 1999.

Watkins Ch. D., Sadun A., Marenka S., Nowoczesne metody przetwarzania obrazu. Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa 1995.