6. RÓWNANIA STANU

Większość obiektów można zapisać przy użyciu równań stanu:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ dla układów stacjonarnych, natomiast dla układów niestacjonarnych macierze są zależne od czasu $A(t)$, $C(t)$, $B(t)$, $D(t)$

Na podstawie tych równań wyznaczamy schemat blokowy liniowy układu wielowymiarowego (rys. 6.1a) gdzie:

x(t) – wektor zmiennych zależnych, wektor stanu o wymiarach nx1 i składowych $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$

$u(t)$ – wektor wymuszeń wejściowych, wektor sterowania o wymiarach px1 o składowych $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t)$

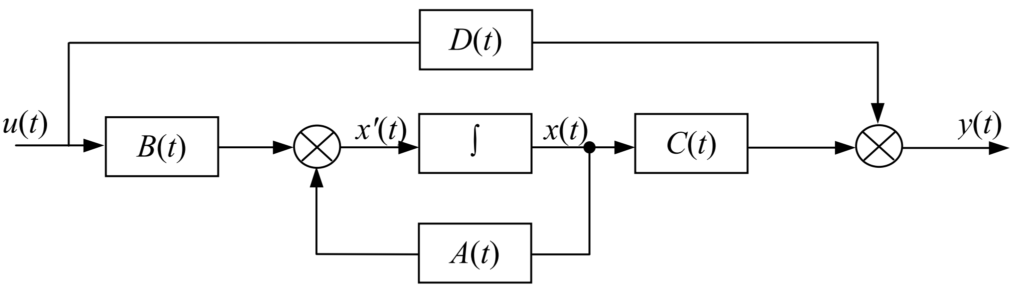
$y(t)$ – wektor wielkości wyjściowych, wektor odpowiedzi o wymiarach qx1 o składowych $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_q(t)$

A(t) – macierz układu (stanu), reprezentuje dynamikę systemu o wymiarach nxn

B(t) – macierz sterowania oddziaływanie sterowania na system o wymiarach nxp

C(t) – macierz wyjścia (odpowiedzi), pokazuje w jaki sposób są transformowane zmienne stanu na zmienne wyjściowe o wymiarach qxn

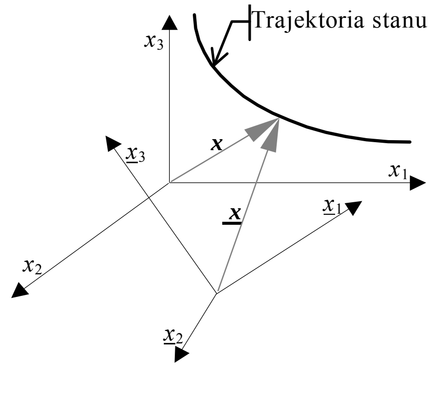
D(t) – macierz transmisyjna układu o wymiarach qxp



Rys. 6.1a

Często współrzędne stanu wybierane są w ten sposób, aby:

$$x_1 = x,$$
$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1,$$
$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2,$$
$$x_n = \dot{x}_{n-1}.$$



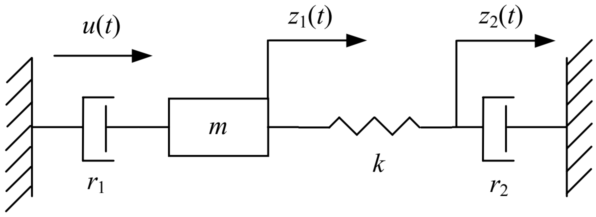
Rys. 6.1b

Tak wybrane współrzędne nazywamy fazowymi a n – wymiarową przestrzeń, przestrzenią fazową. Gdy $n = 2$ wtedy mamy płaszczyznę fazową.

Właściwy wybór zmiennych stanu ma w sobie pewną dowolność. Dla danego układy dynamicznego istnieje wiele wektorów współrzędnych, które mogą być wektorami stanu. Między tymi wektorami istnieją przekształcenia liniowe typu $X^* = Tx + c$, T – macierz nieosobliwa, wektor współczynników. Przekształceniu liniowemu stanu

odpowiada przesunięcie i obrót układu współrzędnych przestrzeni stanu. Trajektoria stanu nie ulega zniekształceniu.
W przypadku gdy macierz A ma postać kanoniczną, macierze B i C reprezentują zera transmitancji systemu. Macierz D w rzeczywistych układach jest równa 0, gdyż $\omega \to \infty$, $\bar{y} = 0$.Nie jest równe zeru gdy transmitancja systemu ma tyle zer ile biegunów czyli gdy $\lim_{s\to\infty} G(s) \neq 0$. Dla wykrycia istotnych właściwości oraz wyznaczenia odpowiedzi wygodnie jest mieć macierz A o postaci kanonicznej tzn. zawierającej wyłącznie wartości własne lub przyjmującej postać macierzy Jordana.

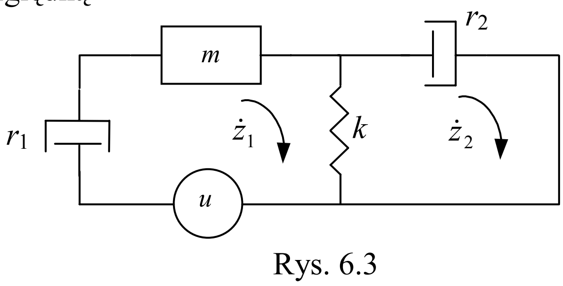
Przykład 6.1
Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu przedstawionego na rysunku 6.2.



Rys. 6.2

k – współczynnik sprężystości
r_1, r_2 – tłumienie wiskotyczne (kulombowskie)
m – masa
u – siła zewnętrzna

Jako zmienne stanu przyjąć prędkość masy $z_1(t)$ oraz względne wydłużenie sprężyny, wyjście – siłę bezwzględną



Rys. 6.3

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 + r_1\dot{z}_1 + k(z_1 - z_2) = u \\ r_2\dot{z}_2 + k(z_2 - z_1) = 0 \end{cases}$$

$x_1 = \dot{z}_1$ - prędkość masy

$x_2 = z_1 - z_2$ – względne wydłużenie

$y = m\ddot{z}_1$

$\dot{x}_2 = \dot{z}_1 - \dot{z}_2 = x_1 - \dot{z}_2$

$r_2\dot{z}_2 = k(z_1 - z_2)$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{k}{r_2}x_2$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{r_1}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{u}{m}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{k}{r_2}x_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{r_1}{m} & -\frac{k}{m}\\ 1 & -\frac{k}{r_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{m}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = m\ddot{z}_1 = -r_1x_1 - kx_2 + u$$

$$y = \begin{bmatrix}-r_1 & -k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + u$$

Przykład 6.2

Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu opisanego poniższym równaniem

$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 2y = 10u$ Są trzy zmienne stanu, bo równanie trzeciego rzędu

$$y = x_1$$

założenia: $\dot{y} = x_2$

$$\ddot{y} = x_3$$

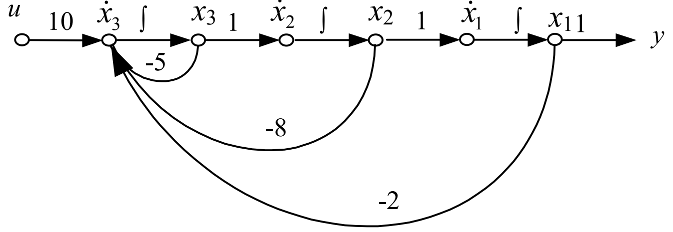
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_3\\ \dot{x}_3 = -5x_3 - 8x_2 - 2x_1 + 10u\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0u\\ \dot{x}_2 = 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0u\\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 10u\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -8 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u$$

$$y = x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0u$$

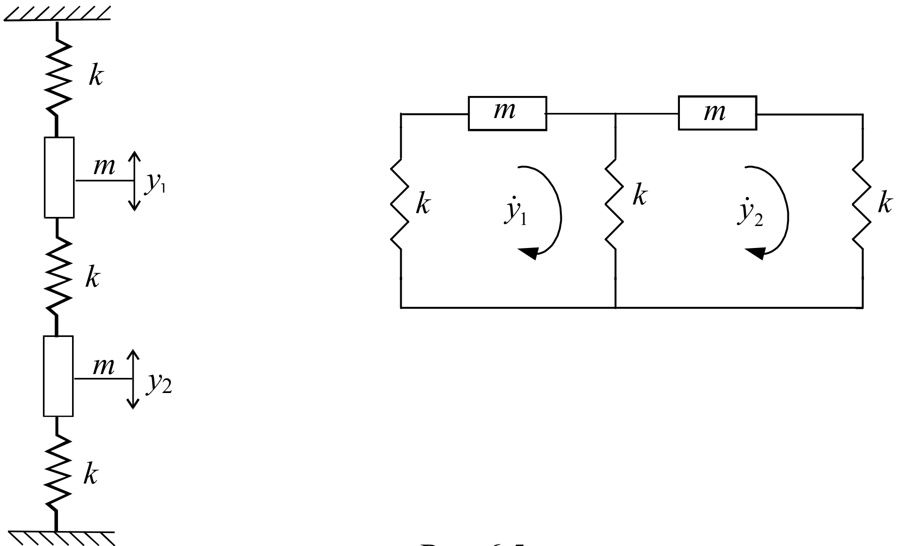
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$



Rys. 6.4

Przykład 6.3

Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu przedstawionego na rysunku 6.5.



Rys. 6.5

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + ky_1 + k(y_1 - y_2) = 0 \\ m\ddot{y}_2 + ky_2 + k(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

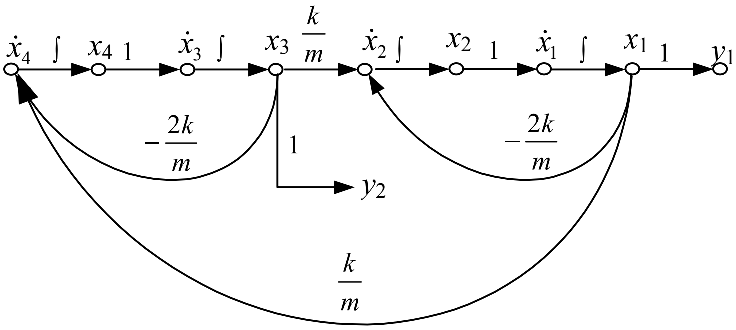
założenia: $\begin{matrix} y_1 = x_1 & y_2 = x_3 \\ \dot{y}_1 = x_2 & \dot{y}_2 = x_4 \end{matrix}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2k}{m}x_1 + \dfrac{k}{m}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{2k}{m}x_3 + \dfrac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2k}{m}x_1 + 0x_2 + \dfrac{k}{m}x_3 + 0x_4 \\ \dot{x}_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{k}{m}x_1 + 0x_2 - \dfrac{2k}{m}x_3 + 0x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2k}{m} & 0 & \dfrac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{m} & 0 & -\dfrac{2k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$



Rys. 6.6

Przykład 6.4.
Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla obiektu opisanego poniższym równaniem.

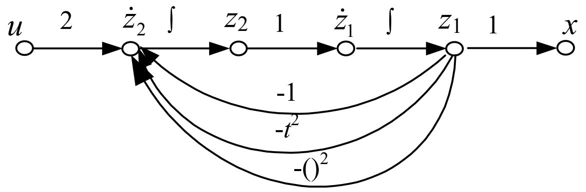
$$\ddot{x} + x + t^2 x + x^2 = 2u$$

założenia: $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 - t^2 z_1 - z_1^2 + 2u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - t^2 - (\ )^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$



Rys. 6.7

Związek między transmitancją macierzową a równaniami stanu:

$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad \rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$ przy założeniu, że $(sI - A)^{-1} \neq 0$

$$Y(s) + CX(s) + DU(s) \quad \rightarrow \quad Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D\right] U(s)$$

stąd: $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$

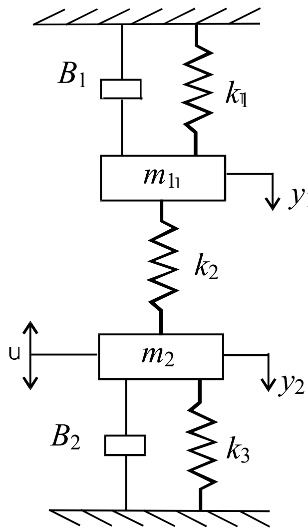
np.:

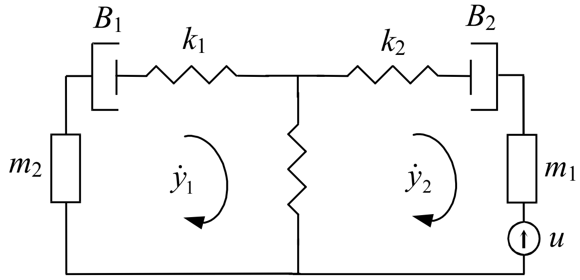
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

Przykład 6.5
Wyznaczyć równania stanu obiektu jak na rysunku 6.8.





Rysunek 6.8

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + B_1\dot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2(y_1 - y_2) = 0 \\ m_2\ddot{y}_2 + B_2\dot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + k_3 y_2 = u \end{cases}$$

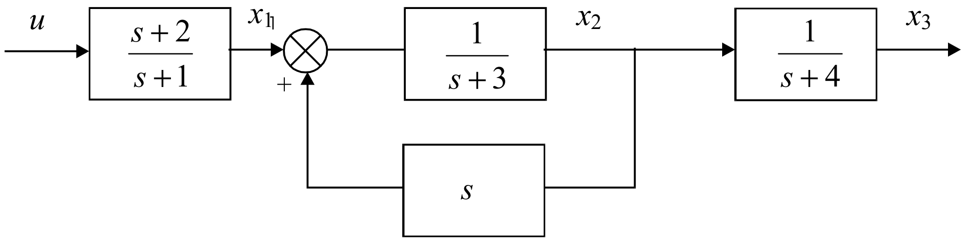
$$\begin{cases} m_1\dot{x}_2 + B_1 x_2 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_3) = 0 \\ m_2\dot{x}_4 + B_2 x_4 + k_2(x_3 - x_1) + k_3 x_3 = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\dfrac{B_1}{m_1}x_2 - \dfrac{k_1}{m_1}x_1 - \dfrac{k_2}{m_1}(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{B_2}{m_2}x_4 - \dfrac{k_2}{m_2}(x_3 - x_1) - \dfrac{k_3}{m_2}x_3 + \dfrac{u}{m_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\dfrac{B_1}{m_1}x_2 - \left(\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}\right)x_1 + \dfrac{k_2}{m_1}x_3 \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{B_2}{m_2}x_4 - \left(\dfrac{k_2 + k_3}{m_2}\right)x_3 + \dfrac{k_2}{m_2}x_1 + \dfrac{u}{m_2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{(k_1 + k_2)}{m_2} & -\dfrac{B_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{(k_2 + k_3)}{m_2} & -\dfrac{B_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

Przykład 6.6
Wyznaczyć równania stanu dla obiektu ze sprzężeniem dodatnim jak na rysunku 6.9.



Rysunek 6.9.

$$\frac{x_1}{u}=\frac{s+2}{s+1}$$

$$\frac{x_3}{x_2}=\frac{1}{s+4}$$

$$\frac{x_2}{x_1-sx_2}=\frac{1}{s+3}$$

$$x_1(s+1)=u(s+2)$$

$$\dot{x}_1+x_1=\dot{u}+2u$$

$$x_1=y_1+u$$

$$\dot{y}_1=-y_1+u$$

$$x_3(s+4)=x_2$$

$$\dot{x}_3+4x_3=x_2$$

$$x_3=y_3$$

$$\dot{y}_3=-4y_3+x_2$$

$$x_2(s+3)=(x_1-sx_2)$$

$$\dot{x}_2+3x_2=x_1-\dot{x}_2\Rightarrow\dot{x}_2+\dot{x}_2=x_1-3x_2\Rightarrow\dot{x}_2=\frac{x_1}{2}-\frac{3x_2}{2}$$

$$x_2=y_2$$

$$\dot{x}_2=\dot{y}_2$$

$$\dot{y}_2=-\frac{3}{2}y_2+(y_1+u)\frac{1}{2}$$

Równania stanu:

$$\dot{y}=Ay+Bu$$

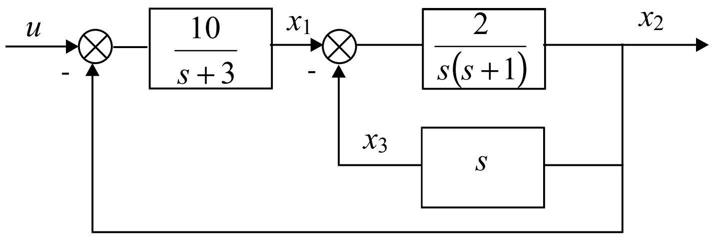
$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}u$$

Równania wyjść:

$$x=Cy+Du$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}y$$

Przykład 6.7
Wyznaczyć równania stanu dla poniższego układu.



Rysunek 6.10

$$\frac{x_1}{u-x_2}=\frac{10}{s+3} \qquad x_1=y_1 \;;\; x_2=y_2 \;;\; x_3=y_3$$

$$\dot{x}_1=\dot{y}_1$$

$$x_1(s+3)=10(u-x_2)$$

$$\dot{x}_1+3x_1=10u-10x_2$$

$$\dot{y}_1=-3y_1+10u-10x_2=-3y_1+10u-10y_2$$

$$\frac{x_2}{x_1-x_3}=\frac{2}{s(s+1)} \qquad x_3=x_2 s \;\Rightarrow\; x_3=\dot{x}_2 \;\Rightarrow\; \dot{x}_2=y_3 \;\Rightarrow\; \dot{y}_2=y_3$$

$$x_2 s(s+1)=2(x_1-x_3)$$

$$\ddot{x}_2+\dot{x}_2=2x_1-2x_3 \Rightarrow \ddot{x}_2+\dot{x}_2=2x_1-2\dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2+3\dot{x}_2=2x_1 \Rightarrow \ddot{x}_2+3\dot{x}_2=2y_1$$

Po podstawieniach $\ddot{x}_2=\dot{y}_3$ oraz $\dot{x}_2=y_3$

$$\dot{y}_3+3y_3=2y_1 \Rightarrow \dot{y}_3=2y_1-3y_3 \Rightarrow \dot{y}_3=2y_1-3\dot{y}_2$$

Równania stanu:

$$\dot{y}=Ay+Bu$$

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

Równanie wyjść:

$$x=Cy+Du$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

6.1. Zalety ogólne przedstawiania dynamiki systemu przy pomocy równań stanu

1. Własności systemu opisywane są przy pomocy macierzy o elementach rzeczywistych, co pozwala na programowanie na komputerach analogowych i cyfrowych celem uzyskania rozwiązania.
2. Równanie stanu opisuje obiekt poprawnie gdy opis przy pomocy transmitancji jest niemożliwy, niewystarczający lub fałszywy.
3. Opis przy pomocy równań stanu pozwala na łatwe oddzielenie własności statycznych i dynamicznych.
4. Łatwe przejście do analizy systemów niestacjonarnych.
5. Opis obejmuje również systemy nieliniowe co przy pomocy transmitancji było niemożliwe.
6. Prosta forma równań stanu umożliwiająca analizę modeli, nawet bardzo skomplikowanych systemów przy pomocy prostych reguł rachunku macierzowego.

6.2. Wybór zmiennych stanu dla układu o znanej transmitancji

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

co jest jednoznaczne z równaniem:

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_2 y^n + a_1 y + a_0 y = b_m u^m + b_{m-1}u^{m-1}+\ldots+b_1 u + b_0 u$$

Przypadek $n < m$ nie jest realizowany fizycznie.
W przypadku $n = m$, wtedy można dokonać dzielenia wielomianem likwidując mianownik i otrzymujemy w wyniku składnik stały niezależny od s i składnik spełniający warunek $n>m$. Składnik ten jest identyczny z macierzą D stąd wynika, że jeżeli $n>m$ to $D \equiv 0$. W dalszych rozważaniach rozpatrujemy przypadek $n > m$.

Przykładowo dla: $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} = \dot{u} + u$

$\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s(s+1)(s+2)}$ równanie charakterystyczne ma postać: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(s+2)}$ równanie charakterystyczne ma postać: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$

W związku z powyższym jakiekolwiek uproszczenie przez wspólny czynnik wyprowadzaniu równań stanu jest niedopuszczalne. Stąd wniosek, że jeżeli system jest opisany równaniami stanu to nie zatraca się istotnych własności obiektu.

Np.: $G(s)=\frac{1}{1+sT_1}+\frac{1}{1+sT_2}$ $\quad R_1 \neq R_2$, $C_1 \neq C_2$ $\quad$ ale $\quad T_1 = T_2$ $\quad$ wtedy:

$$G(s)=\frac{2}{1+sT} \qquad T = T_1 = T_2$$

Forma zapisu przy pomocy transmitancji nie uwzględnia w pewnych szczególnych wypadkach istotnych własności układu. Tej wady pozbawiony jest sposób zapisu przy pomocy równań stanu.

Stosuje się następujące metody wyboru zmiennych stanu:

- bezpośrednia, gdy nie są znane bieguny i zera,
- szeregowa (kaskadowa) (ang. factored, zer-pole-gain) lub równoległa (ang. partial fraction, sesidue form) gdy są znane bieguny i zera,
- iteracyjna.

6.3. Wybór zmiennych stanu dla systemów o transmitancji bez zer

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y_1 + a_0 y = b_0 u(t)$$

Aby przedstawić powyższy układ w przestrzeni stanów najłatwiej przyjąć naturalne zmienne stanu (co sprowadza się do później opisanej macierzy Frobeniusa):

$x_1 = y \qquad x_3 = y^2$

$x_2 = y^1 \qquad x_n = y^{(n-1)}$

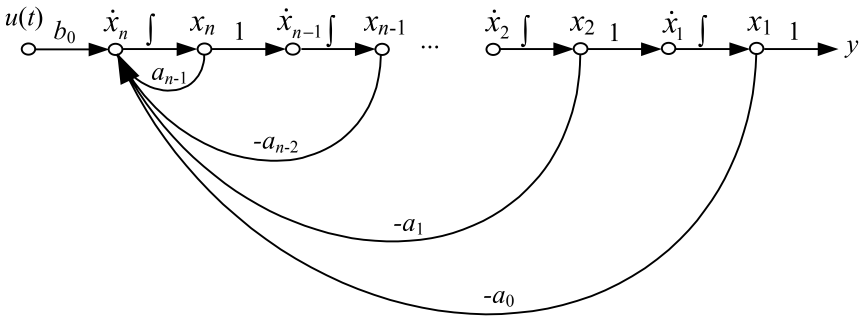
$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_{n-1} = x_n$

$\dot{x}_2 = x_3 \qquad \dot{x}_n = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \ldots - a_{n-1}x_n(t) + b_0 u(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$y = Cx + Du$

$$y(t) = [1 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [0]u$$



Rys. 6.11

Wielomian charakterystyczny dla macierzy A jest równy $M(\lambda) = |I\lambda - A| = 0$

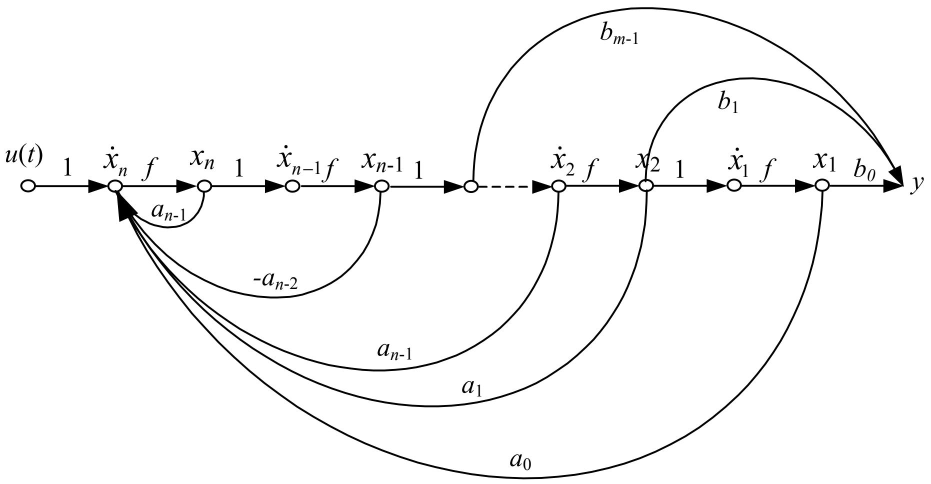
$$M = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

6.4. Wybór zmiennych stanu dla systemów, które zawierają zera i bieguny

Dla $m < n$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{m-1} \quad b_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



Rys. 6.12

lub

$$x(t) = A^T x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] x(t)$$

Dla $m = n$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_n \\ \beta_1 &= b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 &= b_{n-2} - a_{n-2}\beta_0 - a_{n-1}\beta_1 \\ &\vdots \\ \beta_n &= b_0 - a_0\beta_0 - a_1\beta_1 \cdots a_{n-1}\beta_1 \end{aligned}$$

lub

$$x(t) = [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 - a_0, b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_{n-1} - a_{n-1}, b_n] x(t) + u(t).$$

Przykład 6.8

Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu opisanego poniższą transmitancją

$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s+3}{s^2+5s+6}$ Mnożąc przez $-s$ otrzymujemy: $\frac{2s^{-1}+3s^{-2}}{1+5s^{-1}+6s^{-2}}$

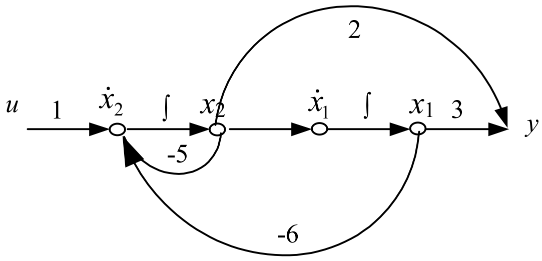
$$Y(s)=\left[2s^{-1}+3s^{-2}\right]X(s)$$

$$X(s)=U(s)-\left[5s^{-1}+6s^{-2}\right]x(s)$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-6x_1-5x_2+u\\ y=3x_1+2x_2\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\qquad D=0$$



Rys. 6.13

Przykład 6.9

Wyznacz równania stanu i wyjścia oraz narysuj graf przepływu sygnału dla obiektu opisanego równaniem:

$$\ddot{x}+\dot{x}+t^2x+x=2u$$

Równania stanu:

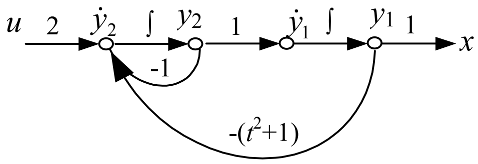
$$\dot{y}=Ay+Bu$$

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\left(t^2+1\right) & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$$

Równanie wyjść:

$$x=Cy+Du$$

$$x=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$



Rysunek 6.14

Przykład 6.10

Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu opisanego równaniem

$$\dddot{y}+2\ddot{y}+\dot{y}+y=\qquad 7\dot{u}+5u$$

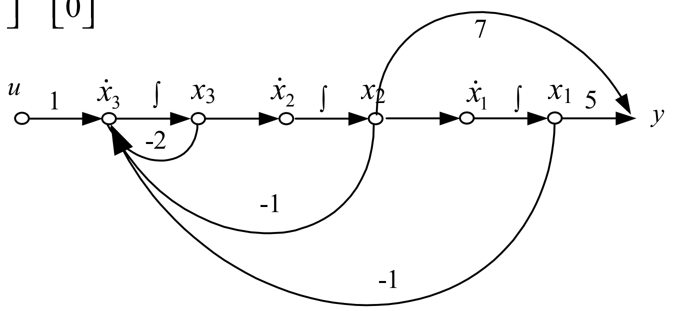
$$a_3\quad a_2\quad a_1\; a_0\quad b_n=0\;\; b_2\quad b_1\quad b_0$$

$$a_{n-0}a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\quad b_{n-0}\quad b_{n-1}\;\; b_{n-2}\;\; b_{n-3}$$

$$y=x_1\qquad \dot{y}=x_2\qquad \ddot{y}=x_3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$



Rys. 6.15

Przykład 6.11

Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu opisanego równaniem jak w przykładzie 6.6. Należy tu pamiętać, że oznaczenia dotyczą układu o równych stopniach obu stron równania.

$\beta_0 = b_n = 0$

$\beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 = 0$

$\beta_2 = b_{n-2} - a_{n-2}\beta_0 - a_{n-1}\beta_1 = 7$

$\beta_3 = b_{n-3} - a_{n-3}\beta_0 - \cdots = -9$

$$[\dot{x}] = A[x] + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + [0] u$$

Przykład 6.12

Wyznacz równania stanu i wyjścia ora graf przepływu sygnału dla obiektu opisanego równaniem

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 10\dot{y} + 5y = 2\ddot{u} + 3\dot{u} + u$$

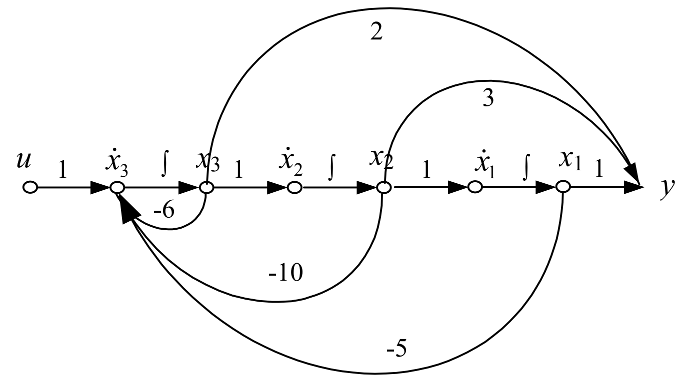
$$a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0$$

Sposób 1:

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Rysunek 6.16

Sposób 2:

$\beta_0 = b_3 = 0$

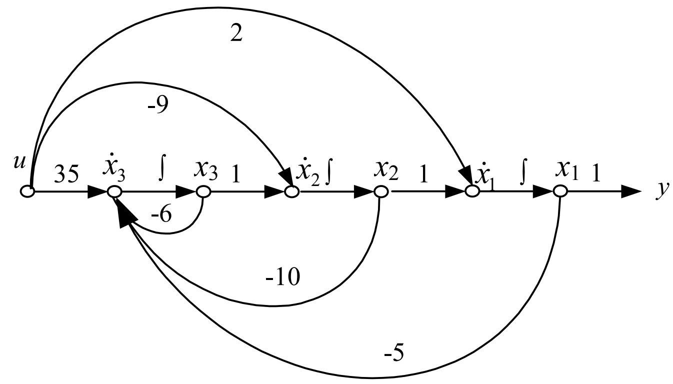
$\beta_1 = b_2 - a_2\beta_0 = b_2 = 2$

$\beta_2 = b_1 - a_1\beta_0 - a_2\beta_1 = b_1 - a_2\beta_1 = 3 - 12 = -9$

$\beta_3 = b_0 - a_0\beta_0 - a_1\beta_1 - a_2\beta_2 = b_0 - a_1\beta_1 - a_2\beta_2 = 1 - 10\cdot 2 - 6(-9) = 35$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -10 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\ -9\\ 35\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \beta_0 u = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$



Rysunek 6.17

Przykład 6.13

Wyznacz równania stanu i wyjścia oraz graf przepływu sygnału dla obiektu opisanego równaniem:

$\dddot{x} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 3\dddot{u} + 2\ddot{u} + \dot{u} + 5u$

$a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad b_3 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0$

$n = 3$

$p = n$

$p = 3$

$\beta_0 = b_3 = 3$

$\beta_1 = b_2 - a_2\beta_0 = 2 - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4$

$\beta_2 = b_1 - a_1\beta_0 - a_2\beta_1 = 1 - 5 \cdot 3 - 2(-4) = 1 - 15 + 8 = -6$

$\beta_3 = b_0 - a_0\beta_0 - a_1\beta_1 - a_2\beta_2 = 5 - 6 \cdot 3 - 5(-4) - 2(-6) = 5 - 18 + 20 + 12 = 19$

Stąd równania stanu mają postać

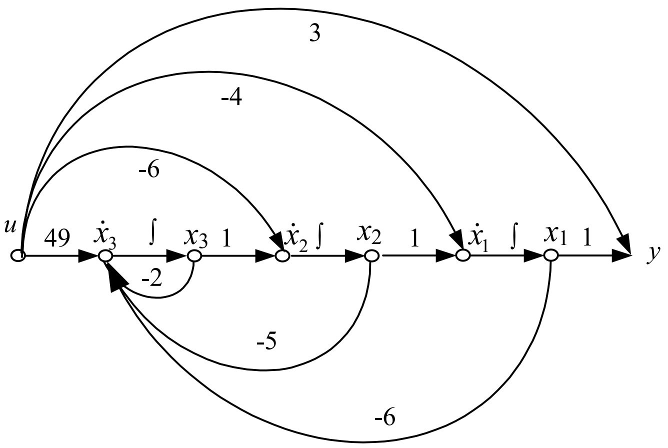
$\dot{x} = Ax + Bu$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 49 \end{bmatrix} u$$

Równanie wyjść

$Y = Cx + Du$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 3u$$



Rysunek 6.18

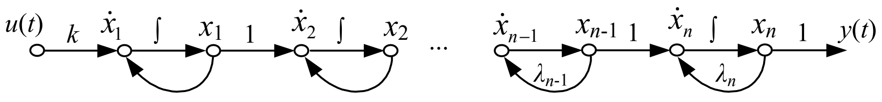
6.5. Wybór zmiennych stanu metodą szeregową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{K}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)} = K\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)^{-1}$$

lub postać zawierająca stałe czasowe

$$G(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{V}{(1+sT_1)(1+sT_2)\ldots(s-sT_n)} = V\prod_{i=1}^{n}(1+sT_i)^{-1}$$

przy czym $\lambda_i = \dfrac{1}{T_i}$, dla $s = 0$ mamy $V = K\prod_{i=1}^{n} T_i$



Rys. 6.19

stąd

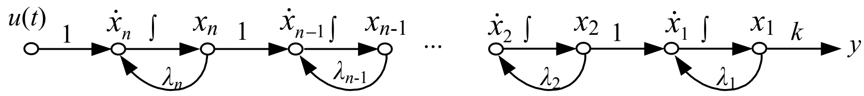
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & \lambda_2 & & & \\ & 1 & \lambda_3 & & \\ & 0 & 1 & \lambda_{n-1} & 0 \\ & & 0 & 1 & \lambda_n\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}k\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

lub

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}k & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}x(t)$$



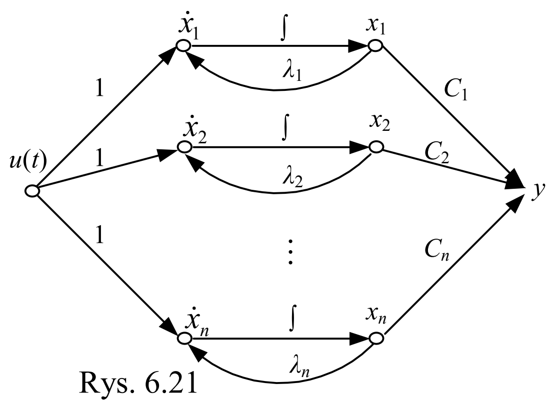
Rys. 6.20

6.6. Wybór zmiennych stanu metodą równoległą

$$G(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{s-\lambda_i} \qquad \text{gdzie} \quad C_i=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)G(s) \qquad (i=1,\dots,n)$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots \\ C_n\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}x(t)$$



Rys. 6.21

Gdy bieguny wielokrotne:

$$G(s)=\frac{C_{1,1}}{s-\lambda_1}+\frac{C_{1,2}}{(s-\lambda_1)^l}+\dots+\frac{C_{1,k_1}}{(s-\lambda_1)^{k_i}}+\ldots+\frac{C_{r,1}}{s-\lambda_{r1}}+\ldots+\frac{C_{r,k_r}}{(s-\lambda_n)^{k_r}}$$

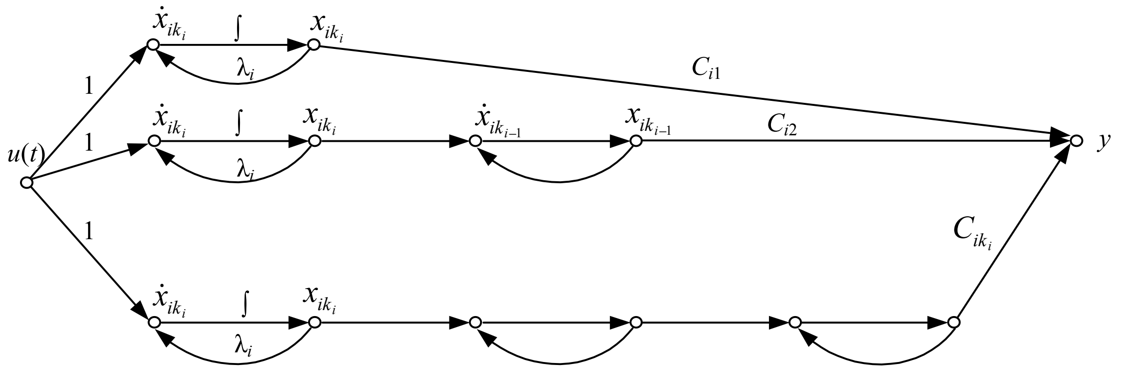
k_i oznacza krotność i – tego bieguna

$$C_{1k} = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{1}{(m-k)!} \left\{ \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \left[(s-\lambda_1)^m G(s) \right] \right\} \Big|_{s=\lambda_1}$$

$$G_{ij} = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{1}{(k_i - j)!} \cdot \frac{d^{k_i - j}}{ds^{k_i - j}} \left[(s-\lambda_i)^{k_i} G(s) \right]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{k-1} \\ \dot{x}_l \\ \dot{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{l+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_l \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_{kl} & C_{1k-1} & \dots & C_{11} & C_{k+1} & \dots & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u + du$$



Rys. 6.22

Przykład 6.14
Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu opisanego poniższą transmitancją

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$A = (s+3)\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}\Bigg|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{d}{ds}(s+1)^2 \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}\right\}\Bigg|_{s=-1} = 1\frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s+3}\right)_{s=-1} = \frac{(s+3)-(s+2)}{(s+3)^2}\Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

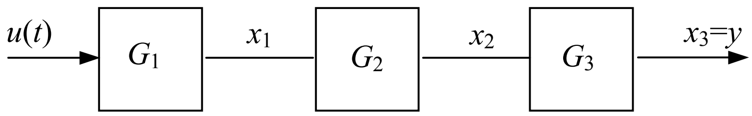
$$C = \frac{s+2}{s+3}\Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

stąd: $G(s)=\frac{-\frac{1}{4}}{s+3}+\frac{\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2}$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Przykład 6.15
Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu opisanego poniższą transmitancją.

$$G(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



Rys. 6.23

Przedstawienie szeregowe:

$$G_1(s)=\frac{x_1}{u}=10\frac{1}{s+1}\qquad G_2(s)=\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{s+2}\qquad G_3(s)=\frac{x_3}{x_2}=\frac{1}{s+3}$$

$$x_1(s+1)=10u\qquad x_2(s+2)=x_1\qquad x_3(s+3)=x_2$$

$$sx_1=-x_1+10u\qquad sx_2=x_1-2x_2\qquad sx_3=x_2-3x_3$$

$$\dot{x}_1=-x_1+10u\qquad \dot{x}_2=x_1-2x_2\qquad \dot{x}_3=x_3-3x_3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Przedstawienie równoległe:

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{5}{s+1}+\frac{-10}{s+2}+\frac{5}{s+3}$$

$$\dot{y}_1=-y_1+5u\qquad \dot{y}_2=-2y_2-10u\qquad \dot{y}_3=-3y_3+5u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5 & -10 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Przykład 6.16

Wyznaczyć równanie stanu i równanie wyjść dla układu opisanego poniższą transmitancją.

$$G(s)=\frac{5}{(s+1)^2(s+2)}$$

Przedstawienie szeregowe:

$$G_1(s)=\frac{x_1}{u}=\frac{5}{s+1} \qquad G_2(s)=\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{s+1} \qquad G_3(s)=\frac{x_3}{x_2}=\frac{1}{s+2}$$

$$\dot{x}_1=-x_1+5u \qquad \dot{x}_2=x_2+x_1 \qquad \dot{x}_3=-2x_3+x_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Przedstawienie równoległe:

$$\frac{5}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{5}{(s+1)^2}+\frac{-5}{s+1}+\frac{5}{s+2}$$

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2 \qquad \dot{x}_2=-x_2+u \qquad \dot{x}_3=-2x_3+u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5 & -5 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

6.7. Wyznaczanie wartości własne macierzy kwadratowej *A*

$|A-\lambda I|=0$ - równanie charakterystyczne, gdzie I to macierz jednostkowa.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=(-1)^n\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0\right)=0$$

Przykład 6.17

Wyznaczyć wartości własne macierzy *A*.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-6=0$$

$\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = -1$.

Wartości własne dogodnie jest uporządkować tak, aby λ_po największej wartości były na początku:

$\mathrm{Re}(\lambda_1) \geq \mathrm{Re}(\lambda_2) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}(\lambda_n)$.

6.8. Diagonalizacja macierzy

Głównym celem diagonalizacji jest taki zapis macierzy *A,* aby wartości własne były tylko na przekątnej.

A) Dla dowolnej macierzy *A,* : $V^{-1}AV = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

a) Przypadek gdy mamy pojedyncze wartości własne.

Każdy niezerowy wektor x_i, spełniający równanie $Ax_i = \lambda_i x_i$ nazywamy wektorem własnym.

Macierz modalna (macierz przekształcenia) $V = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]$, tworzymy ją w następujący sposób:

$$V = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{11}^2 & \ldots & A_{11}^n \\ A_{12}^1 & A_{12}^2 & \ldots & A_{12}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^1 & A_{1n}^2 & \ldots & A_{1n}^n \end{bmatrix}$$ macierz diagonalna D_λ

Każda z kolumn jest wektorem własnym, liniowo niezależnym. Aby uzyskać pierwszą kolumnę budujemy macierz: $[A - \lambda_1 I]$ i wyznaczamy $A_{11}^1, A_{12}^1, A_{1n}^1$, należy pamiętać, że $A_{12} = (-1)^{1+2=3} \quad X = -1X$. Aby uzyskać drugą kolumnę budujemy macierz $[A - \lambda_2 I]$ i wyznaczamy $A_{11}^2, A_{12}^2, A_{1n}^2$ itd.

b) Przypadek, gdy mamy wielokrotne wartości własne $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4$

$$V = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & \left(A_{11}^1\right) & \frac{1}{2!}\left(A_{11}^1\right)' & A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{12}^1 & \left(A_{12}^1\right) & \frac{1}{2!}\left(A_{12}^1\right)' & A_{12}^4 & A_{12}^5 \\ A_{13}^1 & \left(A_{13}^1\right) & \frac{1}{2!}\left(A_{13}^1\right)' & A_{13}^4 & A_{13}^5 \\ A_{14}^1 & \left(A_{14}^1\right) & \frac{1}{2!}\left(A_{14}^1\right)' & A_{14}^4 & A_{14}^5 \\ A_{15}^1 & \left(A_{15}^1\right) & \frac{1}{2!}\left(A_{15}^1\right)' & A_{15}^4 & A_{15}^5 \end{bmatrix}$$ macierz kanoniczna Jordana

$$\left(A_{ij}^1\right) = \frac{d}{d\lambda_1} A_{ij}^1(\lambda_1); \qquad \left(A_{ij}^1\right)' = \frac{d^2}{d\lambda_1^2} A_{ij}^1(\lambda_1); \quad j = 1 \ldots 5$$

Każda z kolumn jest wektorem własnym, z tym że pierwiastek wielokrotny daje tylko jeden wektor liniowo niezależny.

B) Dla obiektu opisanego transmitancją lub równaniem różniczkowym – wykorzystanie macierzy Frobeniusa, diagonalizację przeprowadza się przy użyciu macierzy Vandermonda

a) Przypadek gdy mamy pojedyncze wartości własne.
Macierz modalna ma postać macierzy Vandermonde'a:

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{otrzymujemy macierz diagonalną } D_\lambda = V^{-1}AV$$

Macierz Jordana ma postać:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

b) Przypadek gdy mamy wielokrotne wartości własne $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5$

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 \\ \lambda_1^4 & 4\lambda_1^3 & 6\lambda_1^2 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 \end{bmatrix} \text{ otrzymujemy macierz Jordana } \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Druga kolumna jest pochodną pierwszej podzieloną przez 1!, trzecia kolumna jest pochodną drugiej kolumny podzieloną przez 2!.
Dla dowolnej macierzy A można wyznaczyć macierz Frobeniusa, gdyż obie mają ten sam wielomian charakterystyczny, wyznaczniki i ślad.

Przykład 6.18
Dla poniższej macierzy A wyznaczyć macierz Frobeniusa.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \lambda^3 - 14\lambda^2 - 27\lambda + 188$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -188 & 27 & 14 \end{bmatrix}$$

Przykład 6.19
Wyznacz wartości własne dla obiektu opisanego poniższą transmitancją.

$$G(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+2s}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\0&-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad -\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\left(3\lambda+\lambda^2+2\right)$$

$$\lambda_1=0 \qquad \lambda_2=-2 \qquad \lambda_3=-1$$

$$V=\begin{bmatrix}1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&4&1\end{bmatrix}=1\begin{vmatrix}-2&-1\\4&1\end{vmatrix}=2=\det V$$

$$V^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&2&-1\end{bmatrix} \qquad\rightarrow\qquad V^{-1}AV=D_\lambda$$

Dla macierzy Frobeniusa $D_\lambda=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

Przykład 6.20

Wykonaj diagonalizację następującej macierzy A.

$$A=\begin{bmatrix}4&2\\-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\-3&-1-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad (4-\lambda)(-1-\lambda)-(-3)2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^2-3\lambda+2=0$$

$$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=2$$

$$A_1=\begin{vmatrix}4-1&2\\-3&-1-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\-3&-2\end{vmatrix}$$

$$A_{11}^1=(-1)^{1+1}(-2)=-2$$

$$A_{12}^1=(-1)^{1+2}(-3)=3$$

$$A_2=\begin{vmatrix}2&2\\-3&-3\end{vmatrix}$$

$$A_{11}^2=(-1)^2(-3)=-3$$

$$A_{12}^2=(-1)^3(-3)=3$$

$$V = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 3 = \det V$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie: $V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Przykład 6.21
Wykonaj diagonalizację następującej macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix}$$

wektorów własnych tyle, ile wektorów własnych

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} A_{11}^1 = 1 \\ A_{12}^1 = -2 \\ A_{13}^1 = -5 \end{matrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} A_{11}^2 = 0 \\ A_{12}^2 = 0 \\ A_{13}^2 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_{21}^2 = 0 \\ A_{22}^2 = 0 \\ A_{23}^2 = 5 \end{matrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} A_{11}^3 = 4 \\ A_{12}^3 = 4 \\ A_{13}^3 = 10 \end{matrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = -10 = \det M$$

Przykład 6.22
Wykonaj diagonalizację następującej macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & -5 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[A - \lambda I] = (-4-\lambda)\lambda^2 - 2 - 5\lambda = -4\lambda^2 - \lambda^3 - 2 - 5\lambda = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

	–1	–4	–5	–2
–1	–1	–3	–2	0

$$-\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -1$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Przykład 6.23
Wykonaj diagonalizację poniższej macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det[A - \lambda I] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 \\ -12 & -7 & -6-\lambda \end{bmatrix} = H$$

$$\det[A - \lambda I] = (-6-\lambda)\lambda^2 - 24 - 14\lambda - 3(-3-\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

	−1	−6	−11	−6
−1	−1	−5	−6	0

$$-\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -3$$

Do macierzy H podstawiamy $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -12 & -7 & -5 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 12 & -7 & -4 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ -12 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \left[(-1)^2(-5+14) \quad -1(-15+24) \quad (-1)^4(-21+12)\right]\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 12 & -7 & -9 \end{bmatrix} =$$

$$= [9 \quad -9 \quad -9]$$

$$V_2 = \left[(-1)^2(-8+14) \quad -1(-12+24) \quad 1(-21+24)\right] = [6 \quad -12 \quad -3]$$

$$V_3 = \left[(-8+14) \quad -(-9+2) \quad (-21+36)\right] = [5 \quad -15 \quad 15]$$

$$V = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 5 \\ -9 & -12 & -15 \\ -9 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

Przykład 6.24
Wykonaj diagonalizacje następującej macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[A - \lambda I] = \lambda^2(3-\lambda) + 1 - 3\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

	–1	3	–3	1
1	–1	2	–1	0

$$-\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \text{stąd} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

Przykład 6.25
Sprawdzić, czy dla macierzy A zachodni związek, że:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = -(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$(A_{11})' = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}'_{\lambda=3} = (-3+2\lambda)\big|_{\lambda=3} = 3$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} A_{11}^1 = 2 \\ A_{12}^1 = 2 \\ A_{13}^1 = 2 \end{matrix} \qquad (A_{12})' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}'_{\lambda=3} = 1$$

$$(A_{13})' = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}'_{\lambda=3} = 1$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} A_{11}^3 = 0 \\ A_{12}^3 = 0 \\ A_{13}^3 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_{21}^3 = 0 \\ A_{22}^1 = 8 \\ A_{23}^3 = 4 \end{matrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Przykład 6.26

Wykonaj diagonalizację poniższej macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 52 & -29 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 2+3j \\ \lambda_2 = 2-3j \\ \lambda_3 = 4 \end{matrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3j & 2-3j & 4 \\ (2+3j)^2 & (2-3j)^2 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow J = \begin{bmatrix} 2+3j & & 0 \\ & 2-3j & \\ 0 & & 4 \end{bmatrix}$$

Jeżeli obliczenia wykonywane są na EMC, przedstawienie macierzy A w postaci kanonicznej z liczbami zespolonymi jest niekorzystne. Dokonuje się dodatkowej transformacji przy pomocy macierzy T i otrzymujemy macierz J' o elementach rzeczywistych.

6.9. Metody rozwiązywania równań stanu

A). Układy stacjonarne

a) układ swobodny tzn. $\overline{u}=0$

równania:
$$\dot{x}(t)=Ax(t)$$
$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0$$

b) układ nieswobodny tzn. $\overline{u}\neq 0$

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
równania:
$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Jeżeli równania stanu są typu:

a) diagonalnego,

b) trójkątnego (postać Jordana)

mówimy wtedy, że równania stanu mają postać kanoniczną. W związku z czym diagonalizuje się macierz A przy pomocy macierzy modalnej M i otrzymujemy:

$$x(t)=Ve^{D_\lambda t}V^{-1}x_0+\int_0^t Ve^{D_\lambda(t-\tau)}V^{-1}Bu(\tau)d\tau$$

B). Układy niestacjonarne

$$x(t)=\underbrace{\Phi(t,t_0)x(t_0)}_{\substack{rozwiaznieukladu\\ jednorodnego}}+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Większość układów jest mniej lub więcej niestacjonarna, wiele z nich można opisać równaniami stacjonarnymi. Przybliżenie to jest dobre, jeżeli charakterystyki układu zmieniają się bardzo wolno w stosunku do prędkości zmian sygnałów wejściowych. Przez to w układach stacjonarnych odpowiedź nie zależy od t_0, miejsca przyłożenia wymuszenia, więc można założyć $t_0=0$.

Podstawowym zagadnieniem przy rozwiązywaniu równań stanu jest wyznaczenie *macierzy podstawowej $\Phi(t)$* dla układów stacjonarnych. Jest to poszukiwanie rozwiązania równania $\dot{x}=Ax$ czyli równania stanu z zerowym sterowaniem.

Metody rozwiązań:

I.

$$e^{At}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t\\ 0 & -2t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -t^2\\ 0 & -2t^2\end{bmatrix}+\ldots=\begin{bmatrix}1 & t-t^2\\ 0 & 1-2t+2t^2\end{bmatrix}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

$$t-t^2=1-1+t-t^2=\frac{1}{2}-\left(1-2t+2t^2\right)\frac{1}{2}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

II.

$$\alpha[\theta(t)]=(sI-A)^{-1}$$

$$\theta(t)=\alpha^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

$$Ds=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}$$

$$C=sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\left[C^{D}\right]^{T}$$

$$\det C=s^2+2s=s(s+2)$$

$$C^{D}=\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 1 & s\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+2s}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\theta(t)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$A(s+2)+Bs=1$$

dla $s=0$ dla $s=-2$

$2A+0=1$ $-2B=1$

$A=\frac{1}{2}$ $B=-\frac{1}{2}$

III.

$$e^{At}=\theta(t)=Ve^{\Lambda t}V^{-1}$$

$$e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(-2-\lambda) - 0 = \lambda^2 + 2\lambda$$

$\Delta = 4$

$$\lambda_1 = \frac{-2+2}{2} = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-2-2}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

dla $\lambda_1 = 0$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} V_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$

dla $\lambda_2 = -2$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$V = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V}\left[V^D\right]^T$$

$\det V = -4$

$$V^D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix};\ \left[V^D\right]^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};\ V^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$e^0 = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\left[V^{-1}\right] = \begin{bmatrix} -2 & -e^{-2t} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

IV.

$$R(s) = (sI - A)^{-1} = C^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = R(s)$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t}R_1 + e^{\lambda_2 t}R_2 + \ldots + e^{\lambda_n t}R_n$$

u nas $n = 2$ — rząd macierzy

$R_k = (s-\lambda_k)R(s)$ — dla jednokrotnych wartości własnych

$s = \lambda_k$

$$R_1=(s-0)\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s}{s+2}\end{bmatrix}$$

$s=0$

$$R_1=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_2=(s+2)\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$s=-2$

$$R_2=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=e^0\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+e^{-2t}\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+e^{-2t}\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}B & AB & \dots & A^{n-1} & B\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T & \dots & \left(A^T\right)^{n-1}C^T\end{bmatrix}$$

6.10. Sterowalność i obserwowalność

Dany jest liniowy układ dynamiczny w stanie nieustalonym. Każda współrzędna stanu tego układu składa się z sumy przebiegów wykładniczych.

Układ jest *obserwowalny,* jeżeli w przebiegu wyjściowym są reprezentowane wszystkie krzywe wykładnicze występujące we współrzędnych stanu. Można dać podobną interpretacją częstotliwościową, zgodnie z którą w sygnale wyjściowym muszą być reprezentowane wszystkie harmoniczne występujące we współrzędnych stanu.

Układ jest *sterowalny*, jeżeli za pomocą sygnału sterującego można oddziaływać na wszystkie składowe (wykładnicze lub harmoniczne) występujące we współrzędnych stanu. Układ sterowalny można za pomocą odpowiedniego sterowania sprowadzić do dowolnego punktu w przestrzeni stanu.

Mając równania: $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$ przez podstawienia: $\begin{matrix}x=Mz\\ \dot{x}=M\dot{z}\end{matrix}$

Doprowadzamy do postaci

$$\begin{cases}\dot{z}=D_\lambda z+M^{-1}Bu\\ y=CMz+Du(t)\end{cases}$$

Układ jest sterowalny względem stanu, gdy macierz kolumnowa $M^{-1}B$ nie zawiera wierszy złożonych z samych zer.

Układ jest obserwowalny, gdy macierz wierszowa CM nie będzie zawierała kolumn złożonych z samych zer.

W pierwszym przypadku będzie to układ częściowo sterowalny lub obserwowalny.

Twierdzenie Cayleya – Hamiltona

Układ jest *sterowalny*, gdy rząd macierzy $Q_s = \left[B \quad (AB) \quad (A^2B) \quad \ldots \quad (A^{n-1}B)\right]$ jest równy rzędowi macierzy A. (czyli wektory B i AB są liniowo niezależne, zatem Q_s jest nieosobliwa).

Układ jest obserwowalny gdy, rząd macierzy

$Q_o = \left[C^T \quad A^TC^T \quad \left(A^T\right)^2 C^T \quad \ldots \quad \left(A^T\right)^{n-1} C^T\right]$ jest równy rzędowi macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} -(b+c) & 1 & 0 \\ -bc & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a-b-c \\ -bc \\ 1 \end{bmatrix} \quad A^2B = \begin{bmatrix} b^2 + (c-a)(b+c) \\ bc(b+c-a) \\ -(b+c) \end{bmatrix} \quad Q_s = \begin{bmatrix} 1 & a-bc & b^2+(c-a)(b+c) \\ a & -bc & bc(b+c-a) \\ 0 & 1 & -(b+c) \end{bmatrix}$$

Więc układ jest niecałkowicie sterowalny. Rząd macierzy $Q_s \neq 0$ wynosi dwa, więc część sterowalna układu jest rzędu drugiego.

Sprawdzamy układ przy założeniu, że wielkością wejściową jest jedynie y_2 więc macierz C ma postać $C = [0 \quad 0 \quad 1]$.

$$A^TC^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \qquad \left(A^T\right)^2 C^T = \begin{bmatrix} -(b+c+a) \\ 1 \\ a^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -(b+c+a) \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \end{bmatrix} \qquad \det Q_0 = 1$$

Układ jest więc obserwowalny.

Tabela. 6.1

Niesterowalny	Nieobserwowalny
$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{s-1}{s+2}} \xrightarrow{x} \boxed{\frac{1}{s-1}} \longrightarrow Y(s)$	$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s-1}} \xrightarrow{x} \boxed{\frac{s-1}{s+2}} \longrightarrow Y(s)$
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$	$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$
$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad CM = [1 \quad 1]$ $AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\lvert B \; AB \rvert = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$	$M^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad CM = [0 \quad 1]$ $\left\lvert C^T \; A^TC^T = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right\rvert$

Przykład 6.27
Czy poniższy układ jest obserwowalny:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$n = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T C^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^T\right)^2 C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta| = 0 + 0 + 0 + 5$$ — układ całkowicie obserwowalny

$$|\Delta| = 5$$

6.11. Analiza modalna w systemach sterowania

Analiza modalna dla jednokrotnych wartości własnych

$$\dot{x} = Ax$$

$$x = Vz$$

$$z = V^{-1}x$$

$$V\dot{z} = AVz$$

$$\dot{z} = V^{-1}AVz$$

$$\dot{z} = Jz$$

$$A \to \lambda_i \qquad V_i$$

$$A^T \to \lambda_i \qquad W_i$$

Wyznaczamy równanie ruchu swobodnego

$$x(t)=Vz(t)=VQ(t)z(0)=VQ(t)V^{-1}x(0)=z(t)=Q(t)z(0)$$

$$z(0)=V^{-1}x(0)$$

$$Q=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}=VQ(t)W^T x(0)$$

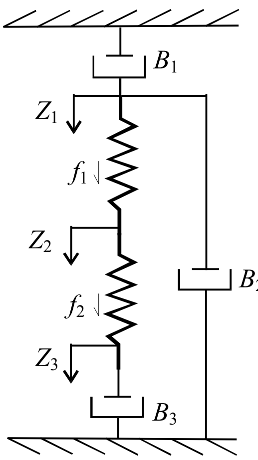
$$W=\left(V^{-1}\right)^T$$

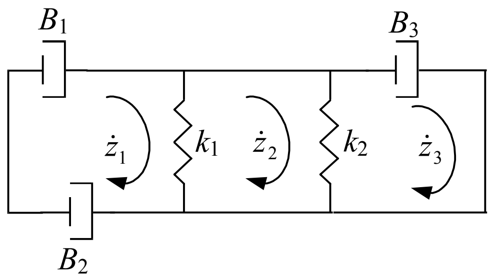
$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} W_i^T x(0) e^{\lambda_i t} V_i$$

Przykład 6.28

Określić postacie ruchu swobodnego i trajektorię stanu wykorzystując wektory własne jako osie układu współrzędnych. Jako zmienne stanu przyjąć siły sprężyste f_1 i f_2. Współczynniki B_1, B_2, B_3, K_1 i K_2 są jednakowe.

Warunki początkowe $f_1(0)=1$, $f_2(0)=2$.





Rys. 6.24

$$\begin{cases} B_1\dot z_1 + B_2\dot z_1 + k_1(z_1 - z_2) = 0 \Rightarrow \dot z_1 \\ k_1(z_2 - z_1) + k_2(z_2 - z_3) = 0 \quad \text{różniczkujemy} \\ k_2(z_3 - z_2) + B_3\dot z_3 = 0 \Rightarrow \dot z_3 \end{cases}$$

Siły sprężystości:

$$\begin{cases} f_1 = k_1(z_1 - z_2) \\ f_2 = k_2(z_2 - z_3) \end{cases}$$

$$\dot x = Ax + Bu$$

$$\dot f = Af + Bu$$

$$\dot f_1 = k_1(\dot z_1 - \dot z_2)$$

$$\dot f_2 = k_2(\dot z_2 - \dot z_2)$$

$$\dot z_1 = \frac{k_1(z_2 - z_1)}{B_1 + B_2} = -\frac{f_1}{B_1 + B_2}$$

$$\dot z_3 = -\frac{k_2(z_3 - z_2)}{B_3} = \frac{f_2}{B_3}$$

$$k_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) = 0$$

$$k_1\dot{z}_2 - k_1\dot{z}_1 + k_2\dot{z}_2 - k_2\dot{z}_3 = 0$$

$$(k_2 + k_1)\dot{z}_2 - k_1\dot{z}_1 - k_2\dot{z}_3 = 0$$

$$\dot{z}_2 = \frac{k_1\dot{z}_1 - k_2\dot{z}_3}{k_2 + k_1}$$

$$\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3 \rightarrow \begin{cases} \dot{f}_1 = k_1\left(-\dfrac{f_1}{B_1 + B_2} - \dfrac{k_1\dot{z}_1 + k_2\dot{z}_3}{k_1 + k_2}\right) \\ \dot{f}_2 = k_2\left(\dfrac{k_1\dot{z}_1 + k_2\dot{z}_3}{k_1 + k_2} - \dfrac{f_2}{B_3}\right) \end{cases}$$

$$\dot{f}_1 = k_1\left[-\frac{f_1}{B_1 + B_2} - \frac{k_1\left(-\dfrac{f_1}{B_1 + B_2}\right) + k_2\dfrac{f_2}{B_2}}{k_1 + k_2}\right]$$

$$\dot{f}_2 = k_2\left[\frac{k_1\left(-\dfrac{f_1}{B_1 + B_2}\right) + k_2\dfrac{f_2}{B_3}}{k_1 + k_2} - \frac{f_2}{B_3}\right]$$

$$B_1 = B_2 = 1$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$\dot{f}_1 = -\frac{1}{4}f_1 - \frac{1}{2}f_2$$

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{4}f_1 - \frac{1}{2}f_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} - \lambda & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det|A - \lambda I| = \left(-\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{8}$$

$$\det|A - \lambda I| = \lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{4}$$

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{0\cdot t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-\frac{3}{4}t} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$f_1(t) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 1 \left(-\frac{1}{2} \right) + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-\frac{3}{4}t} \frac{1}{4}$$

$$f_2(t) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 1 \cdot \frac{1}{4} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-\frac{3}{4}t} \frac{1}{4}$$

$$f_1(t) = -\frac{2}{3} e^{0t} + \frac{5}{3} e^{-\frac{3}{4}t}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{3} e^{0t} + \frac{5}{3} e^{-\frac{3}{4}t}$$

Przykład 6.29
Określić postacie ruchu swobodnego dla systemu opisanego macierzami A i B, oraz wyznaczyć przy jakich warunkach początkowych $x_1(0)$ i $x_2(0)$ jedna z postaci ruchu zostanie wyeliminowana.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy wartości własne:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & \frac{1}{6} - \lambda \end{vmatrix} \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{4}{3}$$

Stąd postacie ruchu mają postać: $e^{-\frac{1}{2}t}$ i $e^{-\frac{4}{3}t}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\omega}_i x(0) \rangle e^{\lambda_i} + \overline{V}_i$$

$$\overline{\omega}_i |A - \lambda_i I| = 0 \qquad |A - \lambda I| \overline{V}_i = 0$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} -2 + \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \rightarrow \overline{V}_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 \\ a_{12}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} -2+\frac{4}{3} & 1 \\ -1 & \frac{1}{6}+\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \overline{V}_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 \\ a_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \left[\overline{V}_1 \quad \overline{V}_2\right]$$

$$V^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}}{-\frac{5}{6}} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \overline{\omega}_1 \\ \longleftarrow \overline{\omega}_2 \end{array}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{\omega}_1 \\ \overline{\omega}_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \overline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \qquad \overline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\overline{\omega}_1 \overline{V}_1 = 1$$

$$\left|A - \lambda_1 I\right| \overline{V}_1 \text{ lub } \overline{V}_2 = 0 \qquad \overline{\omega}_1 \text{ lub } \overline{\omega}_2 \left|A - \lambda_1 I\right| = 0$$

$$x_1(t) = \left(-\frac{6}{5}x_1(0) + \frac{9}{5}x_2(0)\right)e^{-\frac{1}{2}t}\,\frac{2}{3} + \left(\frac{6}{5}x_1(0) - \frac{4}{5}x_2(0)\right)e^{-\frac{4}{3}t}\,\frac{3}{2}$$

$$x_2(t) = \left(-\frac{6}{5}x_1(0) + \frac{9}{5}x_2(0)\right)e^{-\frac{1}{2}t}\,1 + \left(\frac{6}{5}x_1(0) - \frac{4}{5}x_2(0)\right)e^{-\frac{4}{3}t}\,1$$

lub

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{9} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} e^{-\frac{4}{3}t} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zakładamy $\dfrac{x_1(0)}{x_2(0)} = \dfrac{\frac{2}{3}}{1}$ dla pierwszej postaci ruchu $\rightarrow$ $x_1(0) = \dfrac{2}{3}x_2(0)$ po wprowadzeniu tego do równania na $x_1(t)$ druga postać ruchu eliminuje się $x_1(t) = x_2(0)e^{-\frac{1}{2}t}\dfrac{2}{3}$.

Przykład 6.30

Określić postacie ruchu swobodnego i wykazać, że stan ruchu jest określony następująco:

$$x(t) = e^{-2t}\left\{(\cos 2t - \sin 2t)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - (\cos 2t - \sin 2t)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

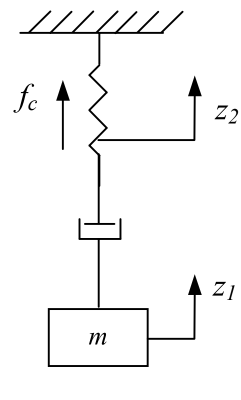
B=0,5

m=0,25

C=0,5

$F_c(0)$=2

$\dot{z}_1(0) = 2$



Rys. 6.25

Zakładamy: $\begin{matrix} f_c = x_2 \\ \dot{z}_1 = x_1 \end{matrix}$

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 + B(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \\ \dfrac{1}{C} z_2 + B(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = 0 \end{cases}$$

$$f_c = x_2 = \frac{1}{C} z_2 \quad \rightarrow \quad z_2 = f_c C$$

$$\begin{cases} m\dot{x}_1 + Bx_1 - BCf_c = 0 \\ f_c + Bf_c C - Bx_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\dot{x}_1 + Bx_1 - BC\dot{x}_2 = 0 \\ x_2 + BC\dot{x}_2 - Bx_1 = 0 \end{cases}$$

$$m\dot{x}_1 + Bx_1 - (Bx_1 - x_2) = 0$$

$$\begin{cases} m\dot{x}_1 + x_2 = 0 \\ BC\dot{x}_2 + x_2 - Bx_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{m} x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C} x_1 - \dfrac{1}{BC} x_2 \end{cases}$$

Po podstawieniu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2 + 2j \quad \lambda_2 = -2 - 2j$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} -2-2j & 2 \\ -4 & 2-2j \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -2+2j & 2 \\ -4 & 2+2j \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} -2-2j & 2+2j \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{vmatrix} 1-j \\ 2 \end{vmatrix} \quad V_2 = \begin{vmatrix} 1+j \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} j \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} j \end{bmatrix} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} j \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} j \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(1+j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} e^{(-2+2j)t} \begin{bmatrix} 1-j \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(1+j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} e^{(-2-2j)t} \begin{bmatrix} 1+j \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-j) \end{bmatrix} e^{-2t} e^{2jt} (1-j) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} j \end{bmatrix} e^{-2t} e^{-2jt} (1+j)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Wyznaczyć postacie ruchu przy wymuszeniu skokowym $u = 1$.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} x_1(0) + \int_0^t e^{\lambda_1 (t-\tau)} 1 u(\tau)\, d\tau$$

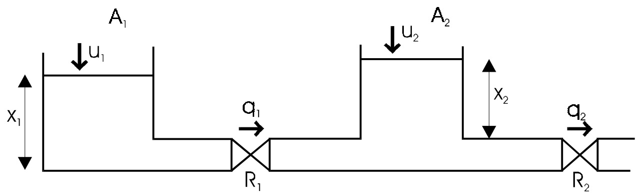
$$x_1(t) = e^{-t} x_1(0) + \int_0^t e^{-t+\tau} d\tau = e^{-t} x_1(0) + \left(1-e^{-t}\right)$$

Rozwiązanie ogólne dla wymuszenia skokowego jest $u(t)=k$

$$x(t) = e^{At} x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bk d\tau = e^{At} x_0 + \left[A^{-1}\left(e^{At} - I\right)\right] Bk$$

Przykład 6.31

Określić postacie ruchu obiektu jak na rysunku 6.26.



Rys. 6.26

$$q_1 = \frac{x_1 - x_2}{R_1}$$

$$q_2 = \frac{x_2}{R_2}$$

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dx_1}{dt} = U_1 - q_1 \\ A_2 \dfrac{dx_2}{dt} = U_2 - q_2 + q_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dx_1}{dt} = U_1 - \dfrac{x_1 - x_2}{R_1} \\ A_2 \dfrac{dx_2}{dt} = U_2 - \dfrac{x_2}{R_2} + \dfrac{x_1 - x_2}{R_1} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{U_1}{A_1} - \frac{x_1 - x_2}{A_1 R_1} = \frac{U_1}{A_1} - \frac{1}{A_1 R_1} x_1 + \frac{1}{A_1 R_1} x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{U_2}{A_2} - \frac{x_2}{A_2 R_2} + \frac{x_1 - x_2}{A_2 R_1} = \frac{U_2}{A_2} - \frac{1}{A_2 R_2} x_2 + \frac{1}{A_2 R_1} x_1 - \frac{1}{A_2 R_1} x_2 =$$

$$= \frac{U_2}{A_2} + \frac{1}{A_2 R_1} x_1 - \left(\frac{1}{A_2 R_2} + \frac{1}{A_2 R_1}\right) x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 R_1} & \frac{1}{A_1 R_1} \\ \frac{1}{A_2 R_1} & \left(\frac{1}{A_2 R_2} + \frac{1}{A_2 R_1} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A_2 = 10\left[dm^2\right]$$

$$R_1 = R_2 = 0{,}1\left[\frac{sek}{dm}\right]$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = 2 + \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 1 =$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$\Delta = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} = -0{,}381$$

$$\lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} = -2{,}618$$

dla λ_1 $\begin{bmatrix} -0{,}618 & 1 \\ 1 & -1{,}618 \end{bmatrix}$

dla λ_2 $\begin{bmatrix} 1{,}618 & 1 \\ 1 & 0{,}618 \end{bmatrix}$

$$V_1 = [1 \quad -0{,}618]$$

$$V_2 = [1 \quad -1{,}618]$$

$$\rho_1 = -15$$

$$\rho_2 = -10$$

$$e^{-10t}$$

$$e^{-15t}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u(t) = k\omega^T x(t)$$

$$k = \frac{\rho_i - \lambda_i}{p_i}$$

$$p_i = \omega_i^T b_i$$

p_i — element macierzy sterowania modalnego

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}618 & -1{,}618 \end{bmatrix}$$

$$|V| = -2{,}23$$

$$W_1^T = V^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}723 & 0{,}447 \\ 0{,}276 & -0{,}447 \end{bmatrix}$$

$$\left(V^D\right)^T = \begin{bmatrix} -1{,}618 & -1 \\ -0{,}612 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W^T = [0{,}723 \quad 0{,}447]$$

$$p_1 = [0{,}723 \quad 0{,}447]\begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0{,}0723$$

$$k_1 = \frac{\rho_1 - \lambda_1}{\rho_1} = \frac{-15 + 2{,}618}{0{,}0723} = -171{,}25$$

$$V_1(t) = k_1 \omega_1^T x_1(t) = -171{,}25[0{,}723 \quad 0{,}447]x_1(t) = [-123{,}814 \quad -76{,}54]x_1(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} [-123{,}814 \quad -76{,}54]x(t) + b_2 u_2$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12{,}38 & -7{,}65 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) x(t) = \begin{bmatrix} -13{,}38 & -6{,}65 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + b_2 u_2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -13{,}38 & -6{,}65 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

liczymy wartości własne z A_1

$$\lambda_1 = -15$$

$$\lambda_2 = -0{,}3$$

$$V = \begin{bmatrix} -4{,}949 & -4{,}949 \\ 0{,}618 & 8 \end{bmatrix} \; dla \, \lambda_2 = -0{,}3$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}211 & -0{,}1135 \\ 0{,}0186 & 0{,}135 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$$

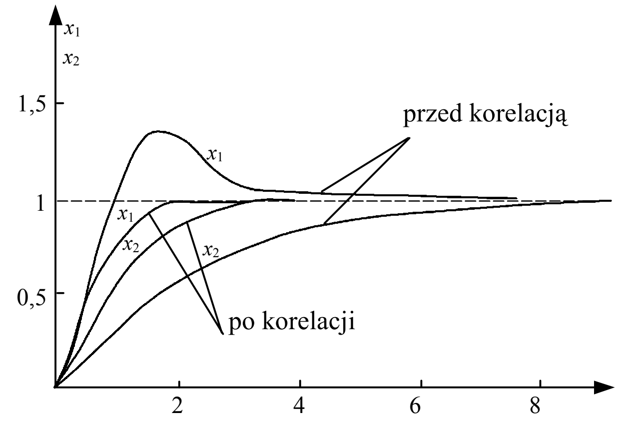
$$W_2^T = [0{,}0186 \quad 0{,}135]$$

$$p_2 = [0{,}016 \quad 0{,}135]\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} = 0{,}0135$$

$$k_2 = \frac{\rho_2 - \lambda_2}{p_2} = \frac{-10 + 0{,}3}{0{,}0135} = -718{,}5$$

$$V_2(t) = k_2 W_2^T x(t) = -718{,}5[0{,}0186 \quad 0{,}135]x(t) = [-13{,}36 \quad -97]x(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} [-123{,}814 \quad -76{,}54]x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} [-13{,}36 \quad -97]x(t)$$



Przykład 6.32

Określić $u(t) = F(x)$ aby niestabilna wartość własna wynosiła $\rho_2 = -5$.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_2 = 3 \text{ - wartość własna niestabilna}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} \qquad V_D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det V = -5 \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \overline{\omega}_2^T \bar{b} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$u(t) = \frac{\rho_2 - \lambda_2}{p_2} \omega_2^T x(t) = \frac{-5-3}{\frac{3}{5}} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{8}{3}(2x_1 + x_2)$$