

7. MIEJSCA GEOMETRYCZNE PIERWIASTKÓW (mgp)

7.1. Zasady budowy miejsc geometrycznych pierwiastków (mgp)

1) Zapis funkcji przejścia

mgp dotyczy układu zamkniętego, ale do jego budowy wykorzystuje się funkcję przejścia w układzie otwartym.

$$H(s)G(s) = K_g \frac{(T_{l1}s + 1) \cdots (T_{lv}s + 1)}{s^n (T_{m1}s + 1) \cdots (T_{mu}s + 1)}$$

$$K_g = K_r K K_z$$

$$H(s)G(s) = K_g \frac{T_{l1} \cdots T_{lv}}{T_{m1} \cdots T_{mu}} \frac{\left(s + \frac{1}{T_{l1}}\right) \cdots \left(s + \frac{1}{T_{lv}}\right)}{\underbrace{\left(s + \frac{1}{T_{m1}}\right) \cdots \left(s + \frac{1}{T_{mu}}\right)}_{s^n} \cdot s^n}$$

K_0 – współczynnik czułości statycznej, zmienia się od 0 do ∞

$$H(s)G(s) = K_0 \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_v)}{s^n (s - p_1) \cdots (s - p_u)} \quad z_i - \text{zera funkcji } H(s)G(s) = 0,$$

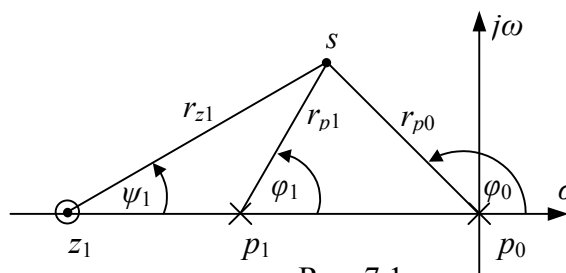
$$z_i = -\frac{1}{T_{li}}$$

$$p_k - \text{bieguny funkcji } H(s)G(s) = \infty, \quad p_k = -\frac{1}{T_{mu}}$$

2) Warunek argumentu i modułu $H(s)G(s)$.

Na podstawie równania charakterystycznego układu zamkniętego, można wyprowadzić warunki jakie powinna spełniać funkcja w układzie otwartym, aby można było budować mgp.

Np. będzie dany układ biegunów i zer w funkcji przejścia układu otwartego.



Rys. 7.1

Jeżeli punkt próbny s należy do mgp, to jest spełniony warunek argumentu:

$$\varphi_0 + \varphi_1 - \psi_1 = (2m + 1)\pi \quad \text{gdzie } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Warunek ten służy do określania mgp metodą prób i ogólnie zapisuje się go wzorem:

$$n\varphi_0 + \sum_{k=1}^{k-u} \varphi_k - \sum_{i=1}^{i=v} \psi_i = (2m + 1)\pi$$

Jeżeli punkt próbny s należy do mgp to wartość czułości statycznej określamy ze wzoru:

$$K_0 = \frac{r_{p0} r_{p1}}{r_{z1}}$$

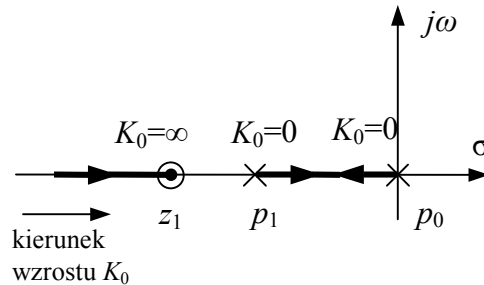
Jest to warunek modułu i służy do skalowania wykresu w wartościach K_0 . Ogólny zapis:

$$K_0 = r_{p0}^n \frac{r_{p1} \cdots r_{pu}}{r_{z1} \cdots r_{zv}} = r_{p0}^n \frac{\prod_{k=1}^{k=u} r_{pk}}{\prod_{i=1}^{i=v} r_{zi}}$$

W praktyce może się zdarzyć, że funkcja nie ma zera, wtedy : $\prod_{i=1}^{i=v} r_{zi} = 1$

3) Część mgp na osi rzeczywistej.

Przyjmując punkt próbny na osi rzeczywistej można wykazać, że jeżeli liczba biegunów i zer leżących po prawej stronie punktu próbnego na osi rzeczywistej jest nieparzysta to punkt ten należy do mgp.



Rys. 7.2

4) Liczba odgałęzień mgp.

Liczba ta jest równa liczbie biegunów $H(s)G(s)$.

5) Punkty początkowe i końcowe MGP.

Punkt początkowy – w biegunie „ k ” $r_{pk} = 0$.

Punkt końcowy – w zerze „ i ” $r_{zi} = 0$.

6) Asymptoty mgp.

Jeżeli miejsce geometryczne ma asymptoty, to kąt ich nachylenia do osi rzeczywistej wynosi:

$$\gamma_a = \frac{(2m+1)\pi}{u+n-v} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, (u+n-1)$$

$u+n$ – liczba biegunów; v – liczba zer

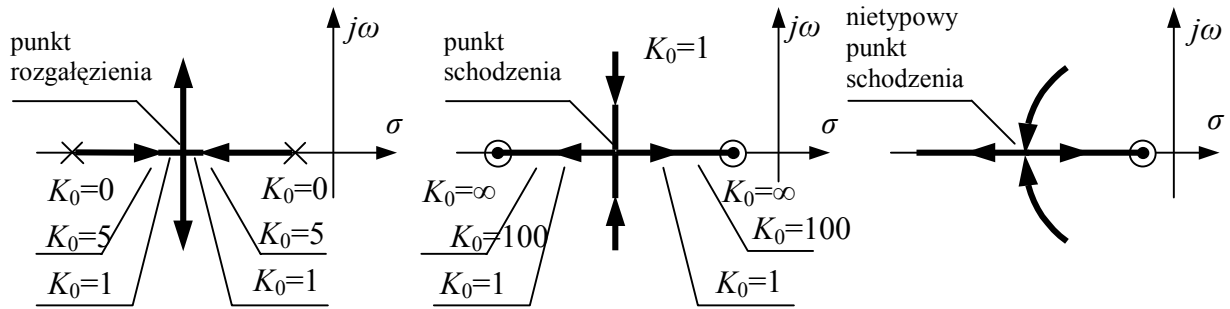
Wszystkie asymptoty MGP przecinają się w jednym punkcie, nazywamy środkiem ciężkości asymptot.

$$\sigma_a = \frac{\sum_1^n p_k - \sum_1^v z_i}{u+n-v}$$

$\sum_1^n p_k$ - suma wartości współrzędnych biegunów

$\sum_1^v z_i$ - suma wartości współrzędnych zer

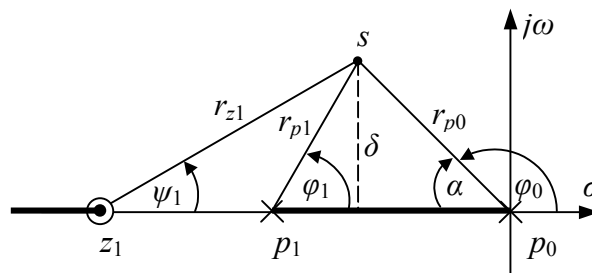
7) Punkty rozgałęzienia i schodzenia mgp.



Rys. 7.3

Punkt rozgałęzienia to punkt, w którym mgp opuszcza oś rzeczywistą przechodząc na płaszczyznę zmiennej zespolonej. Punkt schodzenia to punkt, w którym mgp opuszcza płaszczyznę zmiennej zespolonej na oś rzeczywistą. Oprócz typowych mogą wystąpić również nietypowe rozgałęzienia i schodzenia. O istnieniu tych punktów rozgałęzienia można wnioskować tylko podczas budowy wykresów.

Współrzędne punktów rozgałęzienia lub schodzenia, można na podstawie warunku argumentów. W tym celu rozważa się specjalny punkt próbny będący punktem poszukiwanym, odchylonym od osi σ o bardzo małą odległość (rys.7.4).



δ – bardzo małe odchylenie

Rys. 7.4

Jeżeli punkt próbny ma należeć do mgp to musi być spełniony warunek argumentu:

$$\varphi_0 + \varphi_1 - \psi_1 = (2m + 1)\pi$$

$$\varphi_0 = \pi - \alpha \cong \pi - \sin \alpha \quad \text{dla bardzo małych } \delta$$

$$\varphi_0 = \pi - \frac{\delta}{r_{p0}} \quad ,$$

$$\varphi_1 = \frac{\delta}{r_{p1}} \quad ,$$

$$\psi_1 = \frac{\delta}{r_{z1}}$$

$$\left(\pi - \frac{\delta}{r_{p0}} \right) + \frac{\delta}{r_{p1}} - \frac{\delta}{r_{z1}} = (2m + 1)\pi$$

W otrzymanym równaniu dobieramy taką wartość m aby wyeliminować składniki stałe będące wielokrotnością π . Dla naszego przypadku dla $m = 0$:

$$-\frac{\delta}{r_{p0}} + \frac{\delta}{r_{p1}} - \frac{\delta}{r_{z1}} = 0$$

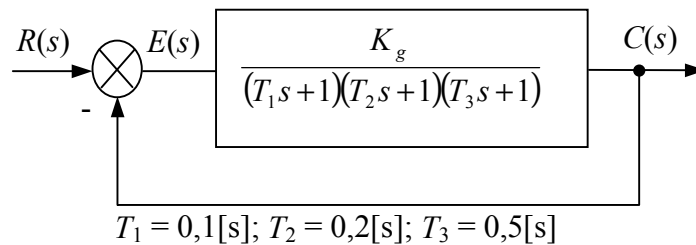
$$\delta \left(-\frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{z1}} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{z1}} = 0$$

Rozwiązanie otrzymanego równania przeprowadzamy metodą prób, zakładając położenie punktu rozgałęzienia i schodzenia. Otrzymujemy w ten sposób wartości promieni, które podstawiamy do wzoru i sprawdzamy zerowanie się lewej strony.

Przykład 7.1.

Dany jest UAR pokazany na rysunku 7.5



Rys. 7.5

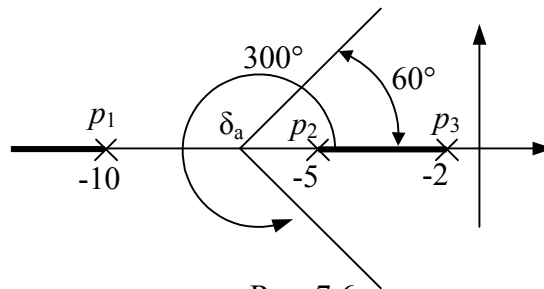
Zbudować miejsce geometryczne pierwiastków układu zamkniętego.

1. Zapis funkcji przejścia:

$$H(s)G(s) = K_g \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right) \left(s + \frac{1}{T_3}\right)} = \frac{K_0}{(s+10)(s+5)(s+2)}$$

2. Zera i bieguny $H(s)G(s)$ oraz mgp na osi rzeczywistej:

$$p_1 = -2; p_2 = -5; p_3 = -10.$$



Rys. 7.6

3. Wyznaczenie asymptot (kąta) i środka ciężkości asymptot.

$$\gamma_a = \frac{(2m+1)\pi}{u+n-v} = \frac{(2m+1)\pi}{3+0-0} = (2m+1)\frac{\pi}{3} \text{ stąd:}$$

m	0	1	2	3
γ_a	60°	180°	300°	420°

$$\sigma_a = \frac{\sum_1^u p_k - \sum_1^v z_i}{u + n - v} = \frac{-2 - 5 - 10}{3} \cong -5,67$$

4. Współrzędne punktu rozgałęzienia:

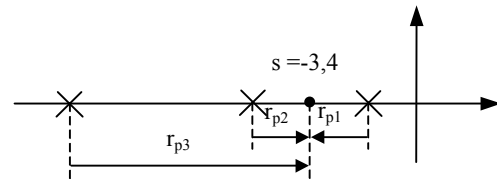
$$\varphi_0 + \varphi_1 - \psi_1 = (2m + 1)\pi$$

$$\left(\pi - \frac{\delta}{r_{p1}} \right) + \frac{\delta}{r_{p2}} - \frac{\delta}{r_{p3}} = (2m + 1)\pi$$

$$-\frac{1}{r_{p1}} + \frac{1}{r_{p2}} - \frac{1}{r_{p3}} = 0$$

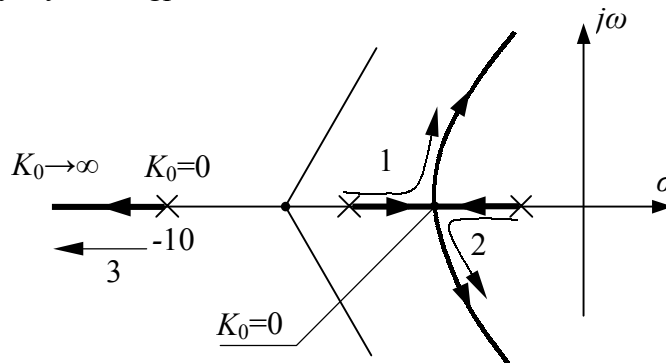
r_p – szacujemy z wykresu mgp i powyższego równania.

s	-3	-4	-3,5	-3,4
r_{p1}	1	2	1,5	1,4
r_{p2}	2	1	1,5	1,6
r_{p3}	7	6	6,5	6,6
lewa strona rów.	-0,36	0,67	0,15	0,06



Rys. 7.7

5. Liczba gałęzi MGP = 3
6. Ostateczny wykres mgp.



Rys. 7.8

Z powyższego wykresu wynika, że:

- a) dla $0 \leq K_0 \leq 14,8$ pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego są rzeczywiste ujemne;
- b) dla $K_0 > 14,8$ równanie charakterystyczne ma:
 - dwa pierwiastki zespolone na gałęziach 1 i 2;
 - jeden pierwiastek rzeczywisty na gałęzi 3.

W celu znalezienia pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego, dla zadanej czułości statycznej, należy:

- a) znaleźć punkty mgp (metodą prób), w którym czułość statyczna odpowiada czułości zadanej;
- b) współrzędne tych punktów są poszukiwanymi pierwiastkami.

Równanie charakterystyczne zapisane w postaci wynikowej, można wykorzystać do analizy zachowania się układu zamkniętego np.: do wyznaczenia charakterystyki czasowej.

$$K_0 = \frac{KK_z}{T_1 T_2} = 70 [1/s^3]$$

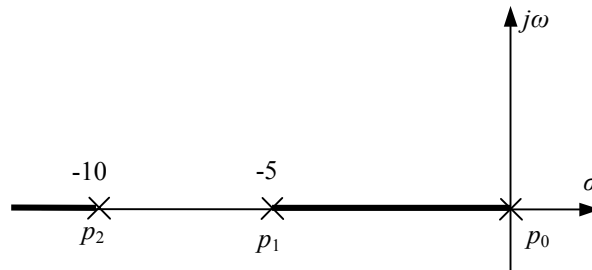
p_0, p_1, p_2 – bieguny funkcji przejścia w układzie otwartym mające wartości

$$p_0 = 0 [1/s]$$

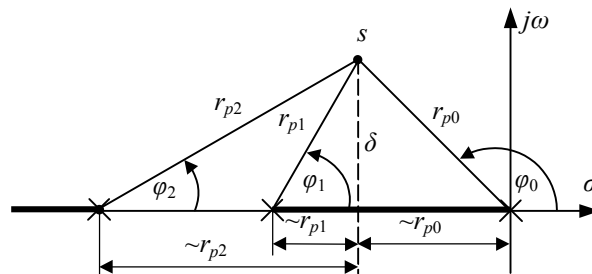
$$p_1 = -\frac{1}{T_1} = -5 [1/s]$$

$$p_2 = -\frac{1}{T_2} = -10 [1/s]$$

Następnie wyznaczone wartości biegunów nanosimy na płaszczyznę Gaussa i badamy, które części osi rzeczywistej należą do mgp. W tym wypadku będą to części zawarte między p_0 i p_1 oraz na lewo od p_2 , pokazane na rysunku 7.10. Z tego rysunku wynika, że między biegunami p_0 i p_1 znajduje się typowy punkt rozgałęzienia. Dla znalezienia tego punktu układamy równanie pomocnicze wynikające z warunku argumentu (rys. 7.11).



Rys. 7.10



Rys. 7.11

Wymienione równanie ma postać:

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = (2m + 1)\pi$$

Ponieważ

$$\varphi_0 \approx \pi - \frac{\delta}{r_{p0}}$$

$$\varphi_1 \approx \frac{\delta}{r_{p1}}$$

$$\varphi_2 \approx \frac{\delta}{r_{p2}}$$

więc otrzymamy

$$\pi - \frac{\delta}{r_{p0}} + \frac{\delta}{r_{p1}} + \frac{\delta}{r_{p2}} = (2m + 1)\pi .$$

7. Miejsca geometryczne pierwiastków

Następnie dobieramy taką wartość m , aby wyeliminować składniki stałe, będące wielokrotnością liczby π . W tym przypadku dla $m = 0$ po uproszczeniu otrzymamy:

$$-\frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{p1}} + \frac{1}{r_{p2}} = 0$$

Rozwiązanie tego równania przeprowadzamy metodą prób zakładając konkretne wartości promieni. Wyniki obliczeń dla wygody można zestawić w tabeli, w której oblicza się wartość lewej strony równania (Tab. 7.1.).

Tabela 7.1.

r_{p0}	r_{p1}	r_{p2}	Lewa strona równania
3	2	7	0,31
2	3	8	-0,042
2,1	2,9	7,9	-0,005

Przyjmując, że dokładność wyzerowania się lewej strony równania jest w trzecim wierszu wystarczająca dla praktyki, można przyjąć, że:

$$r_{p0} \approx 2,1 \text{ [1/s]}$$

$$r_{p1} \approx 2,9 \text{ [1/s]}$$

$$r_{p2} \approx 7,9 \text{ [1/s]}$$

Tak więc odcięta punktu rozgałęzienia wynosi $-2,1$ [1/s]. Następnie wyznaczamy kąt nachylenia asymptot, ze wzoru:

$$\gamma_a = \frac{(2m+1)\pi}{u+n-v}$$

W rozpatrywanym przypadku liczby biegunów i zer wynoszą:

$$u = 2$$

$$n = 1$$

$$v = 0$$

a zatem asymptoty mgp będą nachylone pod kątem:

$$\gamma_a = (2m+1)\frac{\pi}{3} = (2m+1) \cdot 60^\circ$$

Wyniki obliczeń zwykle zestawia się w tabeli dla kilku wartości m (Tab. 7.2.).

Tabela 7.2.

m	0	1	2	3
γ_a [°]	60	180	300	420

Z tabeli wybieramy kąty będące rozwiązaniem zadania, czyli:

$$\gamma_a = 60^\circ$$

$$\gamma_a = 300^\circ$$

Środek ciężkości asymptot wyznaczamy ze wzoru:

$$\sigma_a = \frac{\sum_1^u p_k - \sum_1^v z_i}{u+n-v} = \frac{-5-10}{3} = -5 \text{ [1/s]}$$

Obecnie możemy przystąpić do wykreślenia części mgp znajdującej się poza osią rzeczywistą. W tym celu będziemy stosować warunek argumentu, który dla każdego

7. Miejsca geometryczne pierwiastków

punktu próbnego na płaszczyźnie Gaussa, należącego do mgp, ma w tym przypadku postać:

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = (2m + 1)180^\circ$$

Przykładowo, dla punktu s_{p1} (rys. 7.12.) otrzymamy:

$$\varphi_0 \approx 119 [^\circ]$$

$$\varphi_1 \approx 41 [^\circ]$$

$$\varphi_2 \approx 20 [^\circ]$$

$$m = 0$$

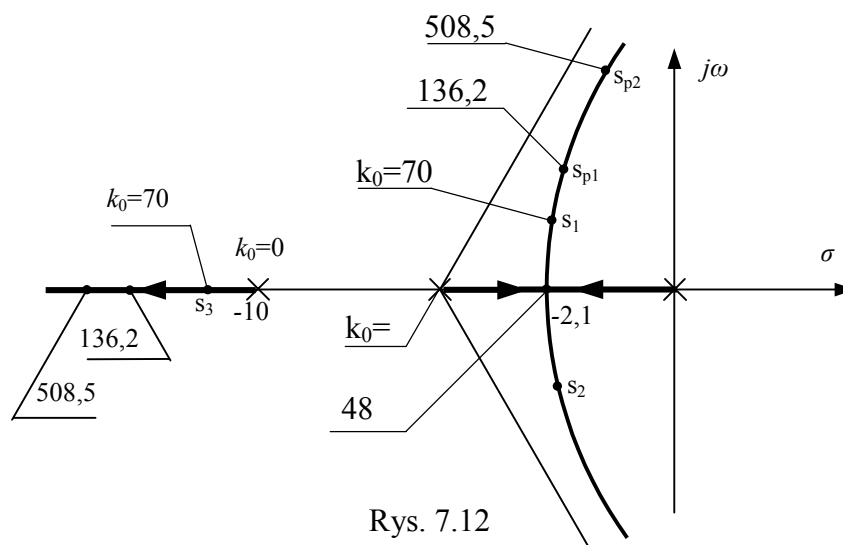
podobnie dla punktu s_{p2} (rys. 7.12.) będzie:

$$\varphi_0 \approx 95 [^\circ]$$

$$\varphi_1 \approx 52 [^\circ]$$

$$\varphi_2 \approx 33 [^\circ]$$

$$m = 0$$



Rys. 7.12

Po wykreśleniu mgp, możemy przystąpić do wyskalowania wykresu w wartościach czułości statycznej K_0 . W tym celu zastosujemy warunek modułu, który dla każdego punktu mgp ma w tym przypadku postać:

$$K_0 = r_{p0}r_{p1}r_{p2}$$

Przykładowo dla punktu s_{p1} (rys. 7.12.) otrzymamy:

$$r_{p0} \approx 3,4 [1/s]$$

$$r_{p1} \approx 4,5 [1/s]$$

$$r_{p2} \approx 8,9 [1/s]$$

$$K_0 \approx 136,2 [1/s]$$

Analogicznie dla punktu s_{p2} (rys. 7.12.) będzie:

$$r_{p0} \approx 6 [1/s]$$

$$r_{p1} \approx 7,5 [1/s]$$

$$r_{p2} \approx 11,3 [1/s]$$

$$K_0 \approx 508,5 [1/s]$$

Ponieważ współczynniki wzmocnienia i stałe czasowe układu mają konkretne wartości, więc czułość statyczna wynikająca z tematu zadania będzie równa:

$$K_0 = \frac{KK_z}{T_1T_2} = \frac{1,4}{0,2 \cdot 0,1} = 70 [1/s^3]$$

7. Miejsca geometryczne pierwiastków

W związku z tym metodą prób znajdujemy na mgp punkty mające obliczoną wyżej czułość statyczną. W punktach tych znajdują się pierwiastki równania charakterystycznego układu, odpowiadające danym liczbowym z tematu zadania. Dwa pierwiastki znajdują się poza osią rzeczywistą i wynoszą:

$$s_1 \approx -1,95 + j1,55 \text{ [1/s]}$$

$$s_2 \approx -1,95 - j1,55 \text{ [1/s]}$$

trzeci pierwiastek znajduje się na osi rzeczywistej i jest równy:

$$s_3 \approx -11,05 \text{ [1/s]}$$

Na podstawie mgp stwierdziliśmy zatem, że równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki dominujące zespolone s_1 i s_2 . Stała czasowa i liczba tłumienia, wynikająca z obecności tych pierwiastków, wynoszą odpowiednio:

$$T_z = \frac{1}{r_k} = \frac{1}{2,5} = 0,4 \text{ [s]}$$

$$\xi_z = \cos \eta = \cos 37^\circ \approx 0,8$$

Bezpieczna praca układu regulacji oraz właściwy kształt jego charakterystyk czasowych wymagają spełnienia nierówności:

$$0,4 \leq \xi \leq 0,8$$

W rozpatrywanym przypadku można powiedzieć, że zapas stabilności jest w granicach normy, a ponadto można oszacować własności dynamiczne układu:

$$\Delta c_{mr} \approx 2 \text{ [%]}$$

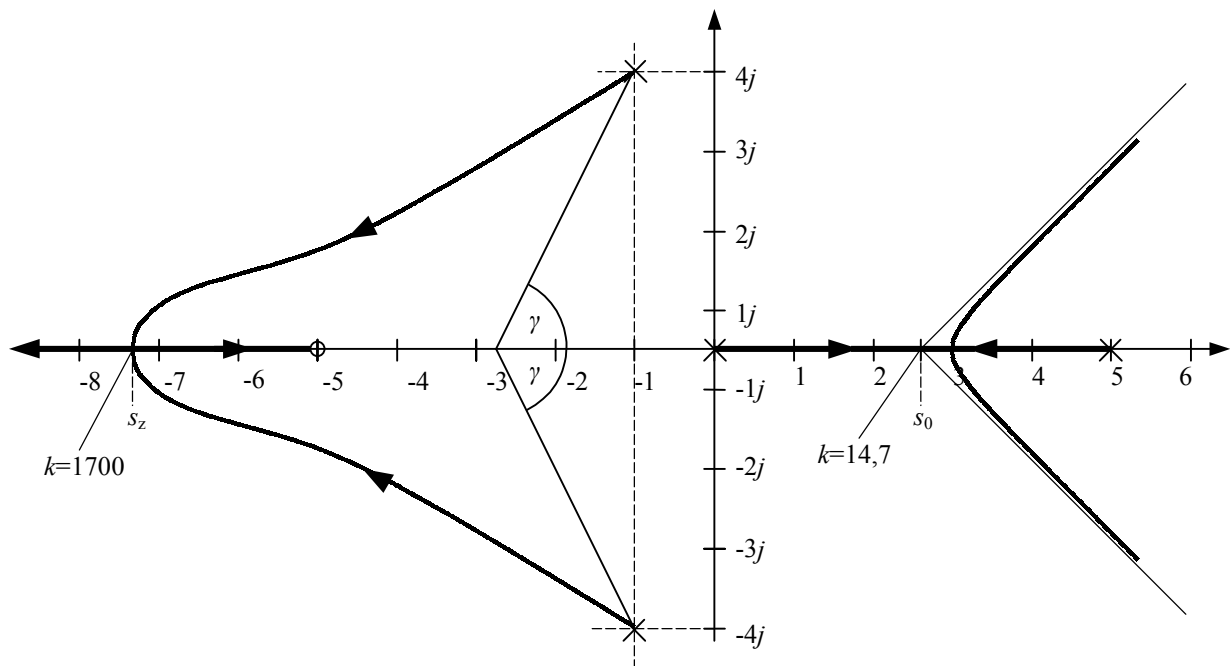
$$t_r \approx 3,6T_z = 3,6 \cdot 0,4 = 1,44 \text{ [s]}$$

Przykład 7.3. Wyznaczyć mgp dla następującego obiektu:

$$H(s)G(s) = \frac{k(s+5)}{s(s-5)(s^2+2s+5)}$$

bieguny: $s_{1,2} = -1 \pm j4$, $s_3 = 5$, $s_4 = 0$

zera: $s = -5$

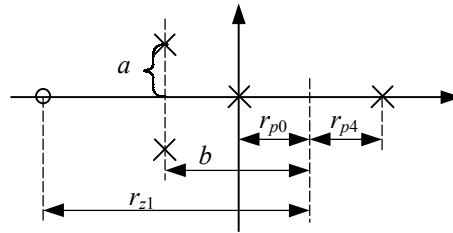


Rys. 7.13

a) Asymptoty:

$$\gamma = \frac{(2m+1)180^\circ}{n-\nu} = 60^\circ, \quad z_0 = \frac{0+5-1-1+5}{3} = \frac{8}{3} = 2,66$$

b) Punkt rozgałęzienia



Rys. 7.14

$$-\frac{1}{r_{p1}} + \frac{1}{r_{p0}} - \frac{1}{r_{z1}} + \frac{2b}{a^2 + b^2} = 0$$

$$s_0 = 2,85$$

c) Punkt zejścia

$$-\frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{z1}} - \frac{2b}{a^2 + b^2} = 0$$

$$s_z = -7,25$$

d) Czulość statyczna:

$$\text{dla } s_0 = 2,85 \rightarrow K_0 = 14,7$$

$$\text{dla } s_z = -7,25, \quad K_0 = 1700$$

e) Punkt przecięcia z osią $j\omega$:

$$s^4 - 3s^3 - 5s^2 + (k-25)s + 5k = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \qquad -5 \qquad 5k \\ -3 \qquad k-25 \\ \hline k-40 \qquad 5k \\ \hline 3 \\ \hline k^2 - 20k + 1000 \\ \hline k-40 \\ \hline 5k \end{array}$$

$$k^2 - 20k + 1000 = 0$$

$\Delta < 0$ - nie ma takiego wzmocnienia, aby układ był na granicy stabilności tzn. charakterystyka przecinała oś $j\omega$.

f) Kąt wyjścia gałęzi:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_\omega - \psi = (2m+1)180$$

$$\varphi_\omega = -115^\circ 20'$$

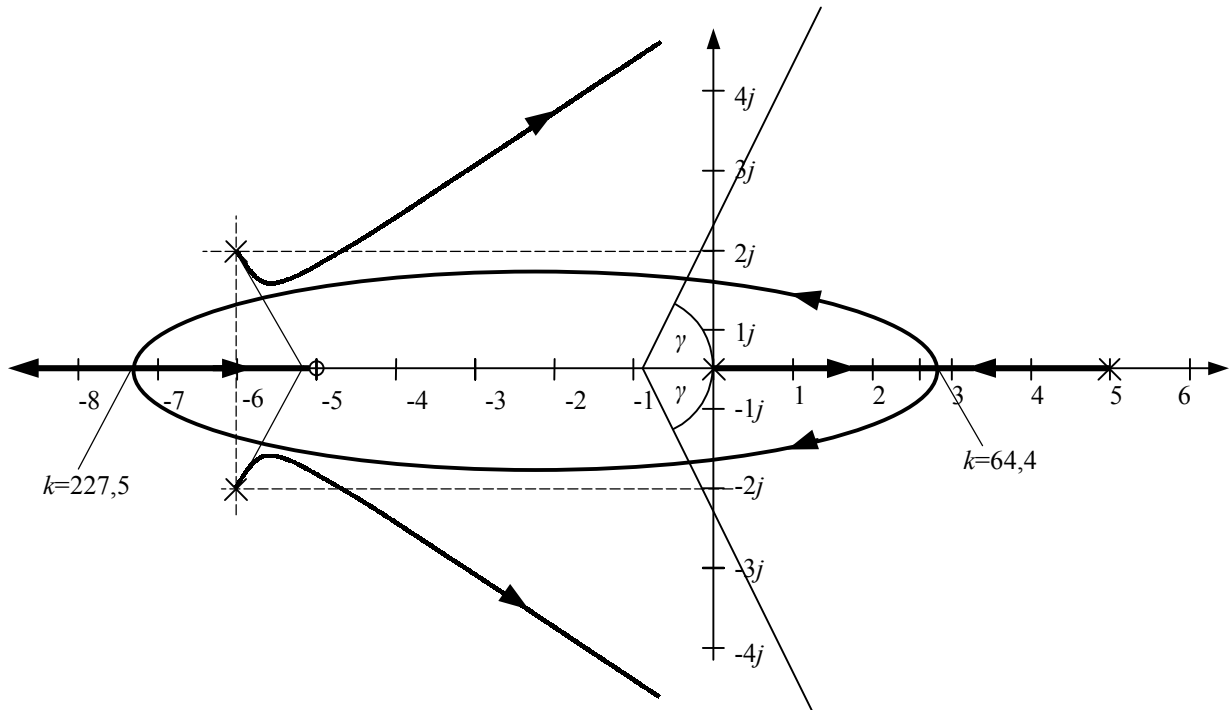
Przykład 7.4. Wyznaczyć mgp dla następującego obiektu:

$$H(s)G(s) = \frac{k(s+5)}{s(s-5)(s^2+12s+40)}$$

7. Miejsca geometryczne pierwiastków

bieguny: $s_{1,2} = -6 \pm j4$, $s_3 = 5$, $s_4 = 0$

zera: $s = -5$

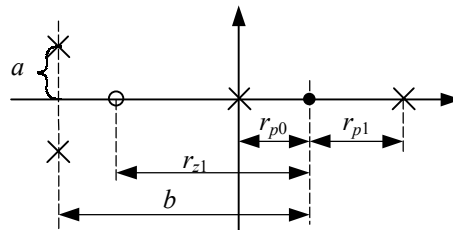


Rys. 7.15

a) Asymptoty:

$$\gamma = \frac{(2m+1)180^\circ}{n-v} = 60^\circ, \quad z_0 = \frac{0+5-6-6+5}{3} = \frac{2}{3} = 0,66$$

b) Punkt rozgałęzienia:



Rys. 7.16

$$-\frac{1}{r_{p1}} + \frac{1}{r_{p0}} - \frac{1}{r_{z1}} + \frac{2b}{a^2 + b^2} = 0$$

$$r_{p0} = 2,75$$

c) Czulość w punkcie rozgałęzienia:

$$k = -\frac{s(s-5)(s^2+12s+40)}{s+5} = -\frac{2,75(-2,25)(7,59+33+40)}{7,75} = 64,4$$

d) Punkt schodzenia:

$$-\frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{z1}} - \frac{2b}{a^2 + b^2} = 0$$

$$r_{p0} = -7,45$$

7. Miejsca geometryczne pierwiastków

e) Czulość w punkcie schodzenia:

$$k = -\frac{7,45(-12,45)(55,5 - 89,5 + 40)}{-2,45} = 227,5$$

f) Kąt pod jakim wychodzą gałęzie:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_\omega - \psi = (2m + 1)180$$

$$\varphi_\omega = -88^\circ 15'$$

g) Punkt przecięcia z osią $j\omega$:

$$ks + 5k + (s^2 - 5s)(s^2 + 12s + 40) = 0$$

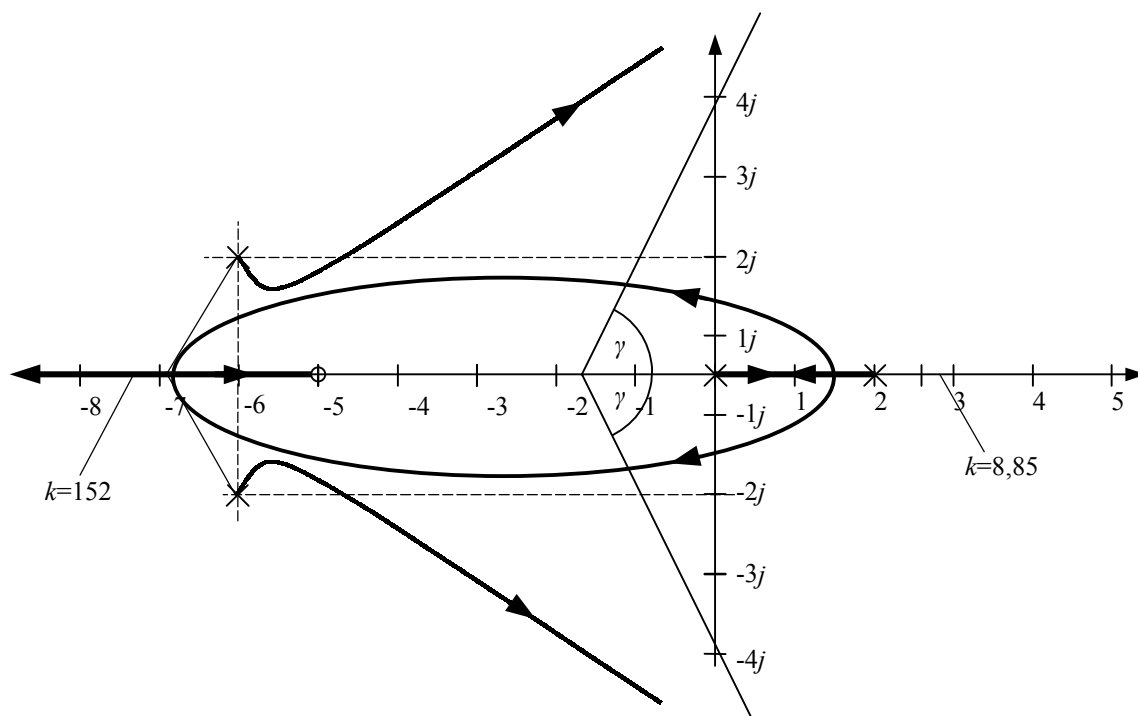
$$s^4 + 7s^3 - 20s^2 + (k - 200)s + 5k = 0$$

1	-20	$5k$	
7	$k - 200$		$k^2 - 505k + 12000 = 0$
$-k + 60$	$5k$		$\sqrt{\Delta} = 455$
7			$k_1 = 25 \quad k_2 = 480$
$-k^2 + 505k - 12000$			
$k + 60$			
$5k$			

Przykład 7.5

Wyznaczyć mgp dla następującego obiektu:

$$H(s)G(s) = \frac{k(s+5)}{s(s-2)(s^2+12s+40)} = \frac{k(s+5)}{s(s-2)[s+(6+2j)][s+(6-2j)]}$$

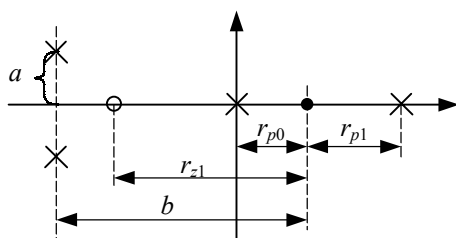


Rys. 7.17

a) Asymptoty:

$$\gamma = \frac{(2m+1)180^\circ}{n-v} = 60^\circ, \quad z_0 = \frac{0+2-6-6+5}{3} = -\frac{5}{3} = -1,66$$

b) Punkt rozgałęzienia:



Rys. 7.18

$$-\frac{1}{r_{p1}} + \frac{1}{r_{p0}} - \frac{1}{r_{z1}} + \frac{2b}{a^2 + b^2} = 0$$

$$r_{p0} = 1,05$$

c) Czulość w punkcie rozgałęzienia:

$$k = -\frac{s(s-2)(s^2 + 12s + 40)}{s+5} = -\frac{1,05(-0,95)(1,1+12,6+40)}{6,05} = 8,85$$

d) Punkt schodzenia:

$$-\frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{z1}} - \frac{2b}{a^2 + b^2} = 0$$

$$r_{p0} = 6,75$$

e) Czulość w punkcie schodzenia:

$$k = -\frac{(-6,75)(-8,75)(45,5 - 81 + 40)}{-1,75} = 152$$

f) Kąt pod jakim wychodzą gałęzie:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_\omega - \psi = (2m+1)180$$

$$\varphi_\omega = 121^\circ$$

g) Punkt przecięcia z osią $j\omega$:

$$s^4 + 10s^3 + 16s^2 + (k-80)s + 5k = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \qquad \qquad \qquad 16 \quad 5k \\ 10 \qquad \qquad \qquad k-80 \\ \hline -k+240 \qquad \qquad \qquad 5k \\ 10 \\ \hline -k^2 - 180k - 19,200 \\ \hline -k+240 \\ 5k \end{array}$$

$$k^2 - 180k + 19,200 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 1780$$

$$k_1 = 800 \quad k_2 = -980$$