

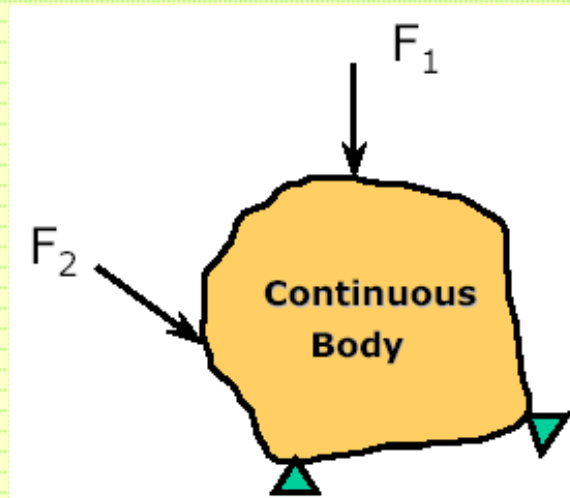
Naprężenia i odkształcenia ***Stress & strain***



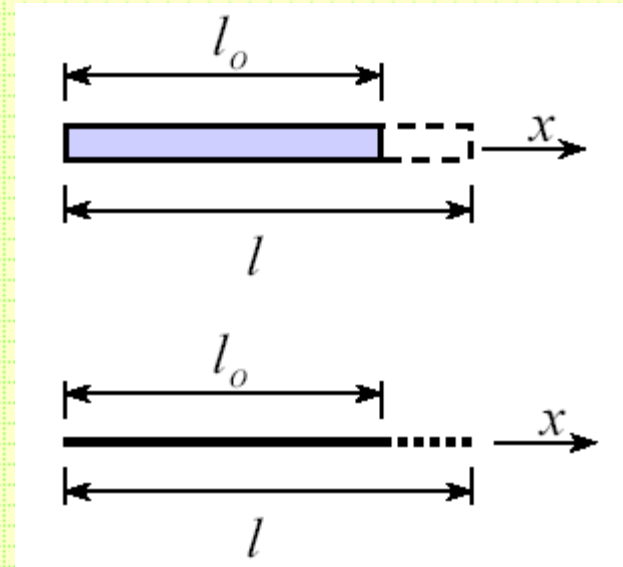
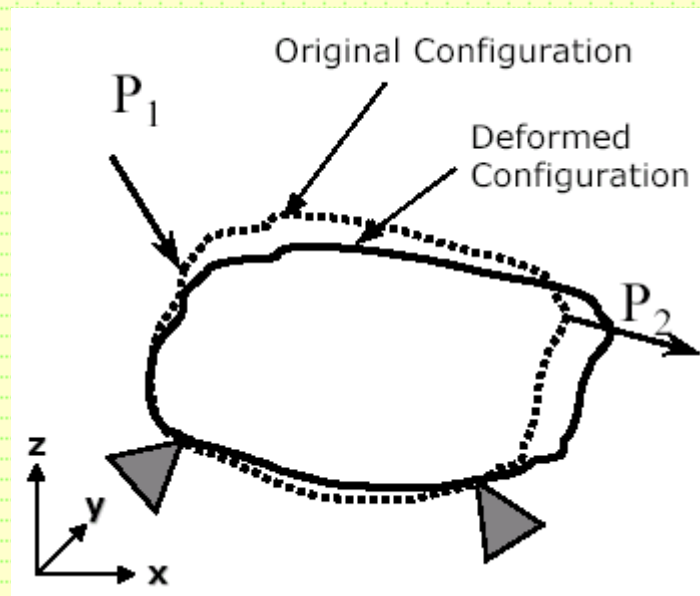
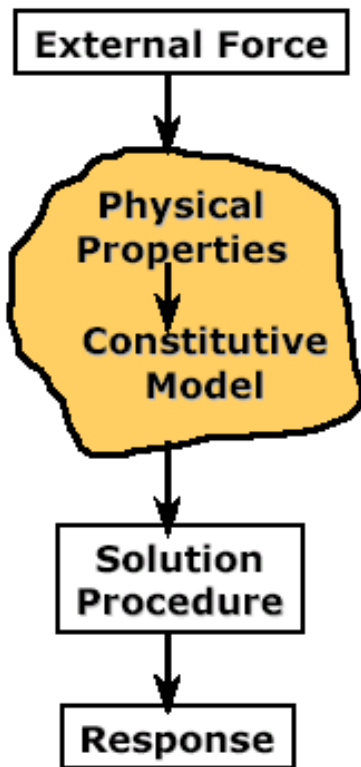
Naprężenia i odkształcenia

Simplifying assumptions:

1. Soil is continuous
2. Soil is homogeneous
3. Soil is isotropic



A continuous body subjected to a system of external forces

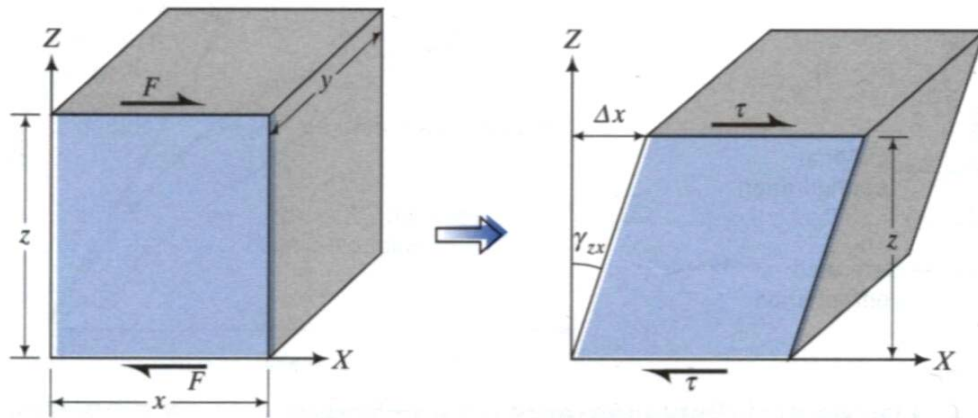


Normal strain definition

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l}$$

Naprężenia i odkształcenia

Shear strain definition

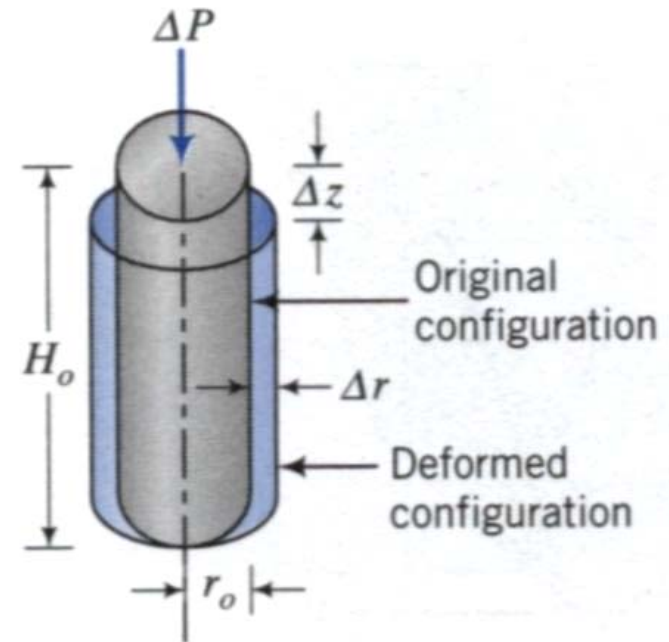


Shear stresses and shear strains.

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_r}{\epsilon_z}$$

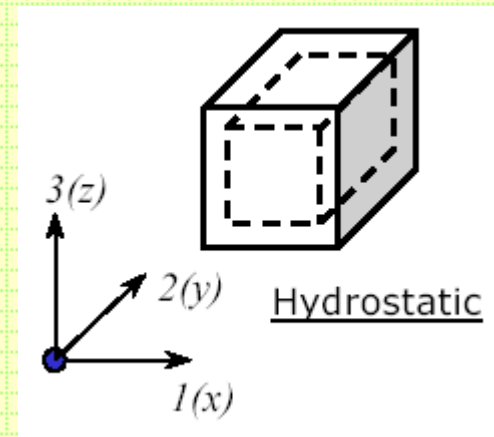
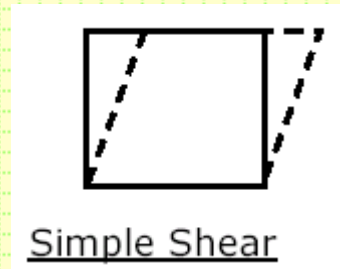
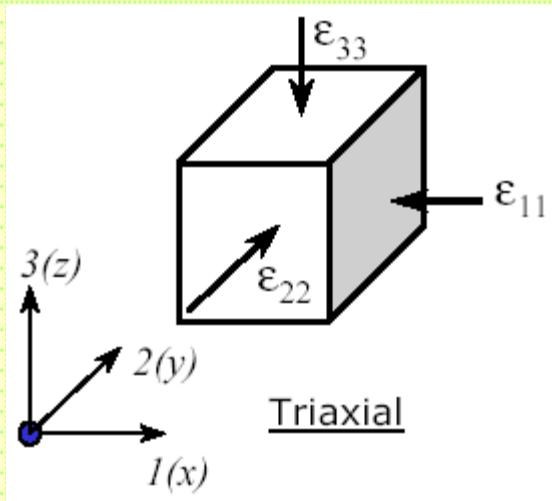
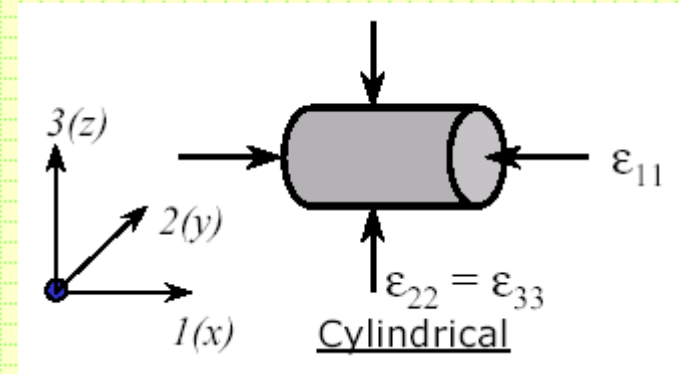
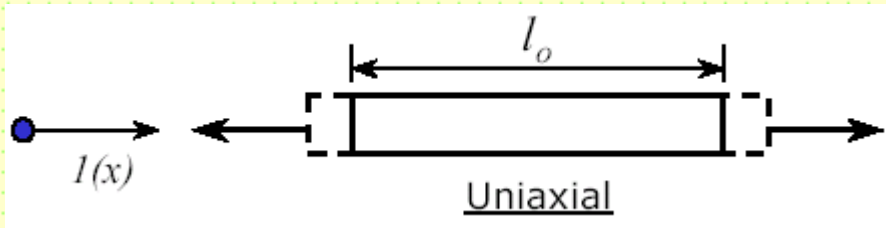
Poisson's ratio definition



Clay	Soft	0.35–0.40
	Medium	0.30–0.35
	Stiff	0.20–0.30
Sand	Loose	0.15–0.25
	Medium	0.25–0.30
	Dense	0.25–0.35

Naprężenia i odkształcenia

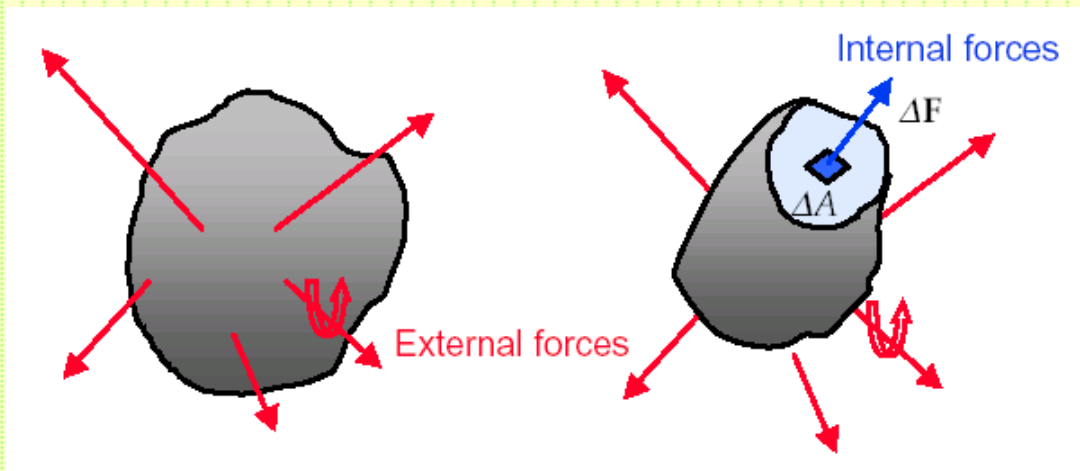
States of strains



Naprężenia i odkształcenia

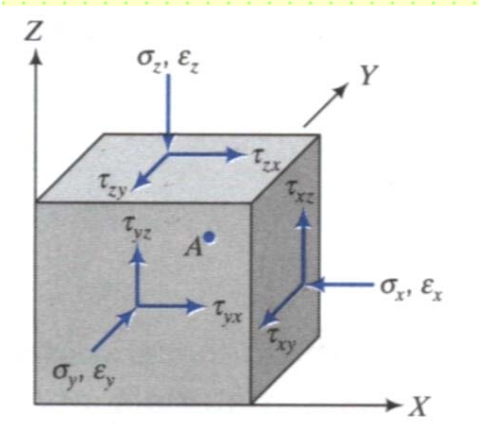
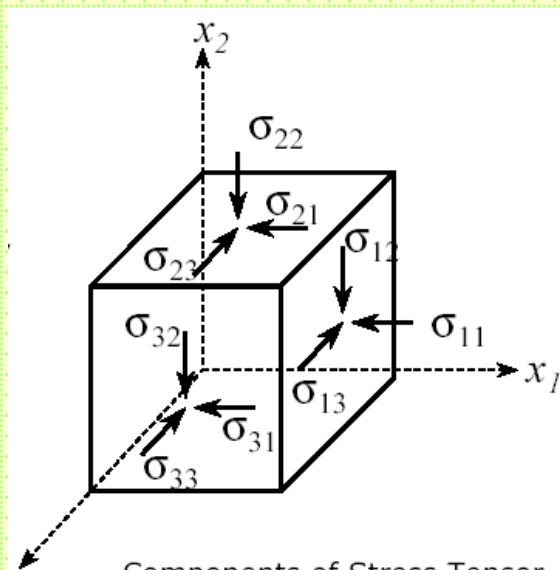
Stress definition

$$\sigma_{ij} = \lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A_i}$$



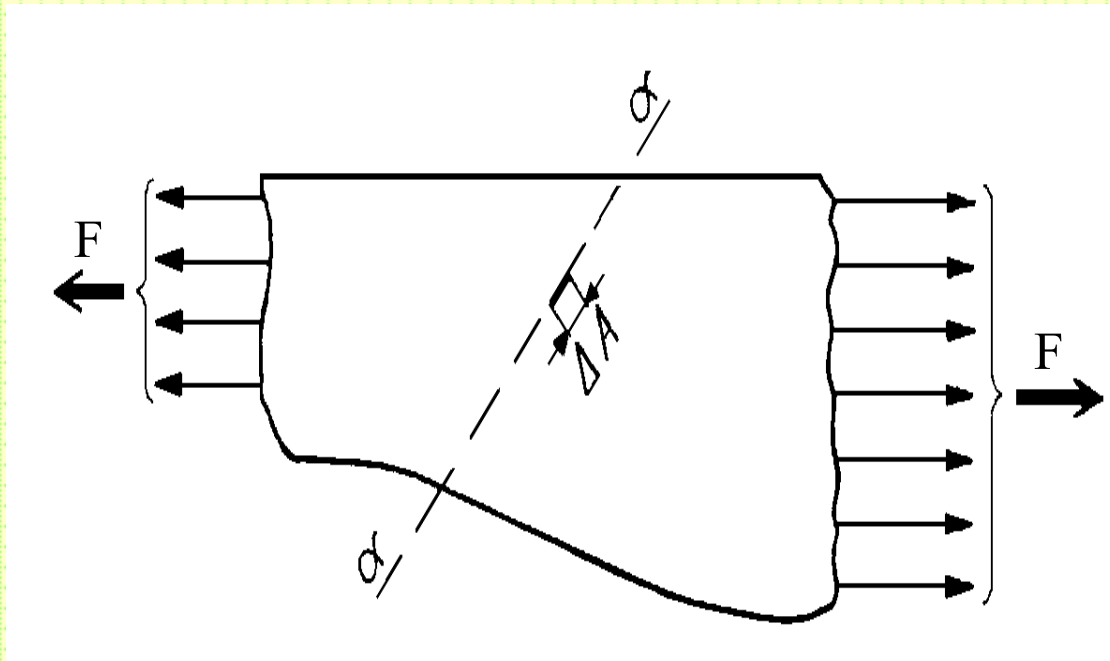
Stress tensor

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Naprężenia i odkształcenia

Naprężenie jest to graniczna wartość stosunku siły działającej na nieskończenie mały element pola przekroju ciała do wymiaru tego pola:



Przekrój ciała sztywnego.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

gdzie: σ - naprężenie

F - siła

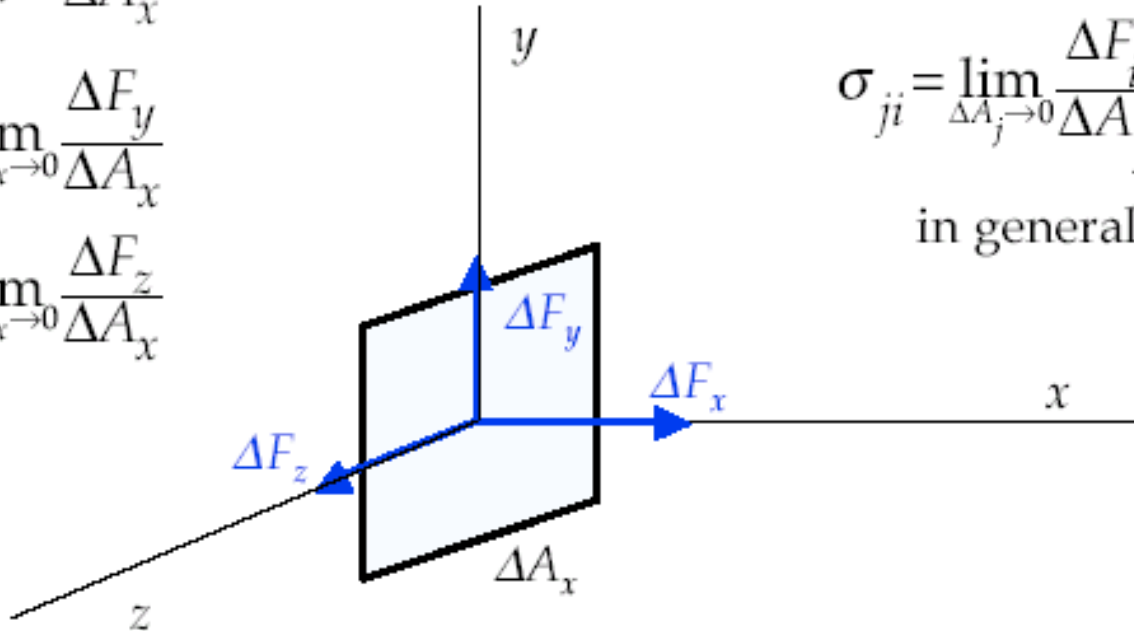
A - pole przekroju

Naprężenia i odkształcenia

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x}$$

$$\sigma_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x}$$

$$\sigma_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x}$$



$$\sigma_{ji} = \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_j}$$

in general

$$\sigma_{ij} = \lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A_i}$$

Naprężenia i odkształcenia

The state of stress at a point according to a “reference coordinate” is (9 components)

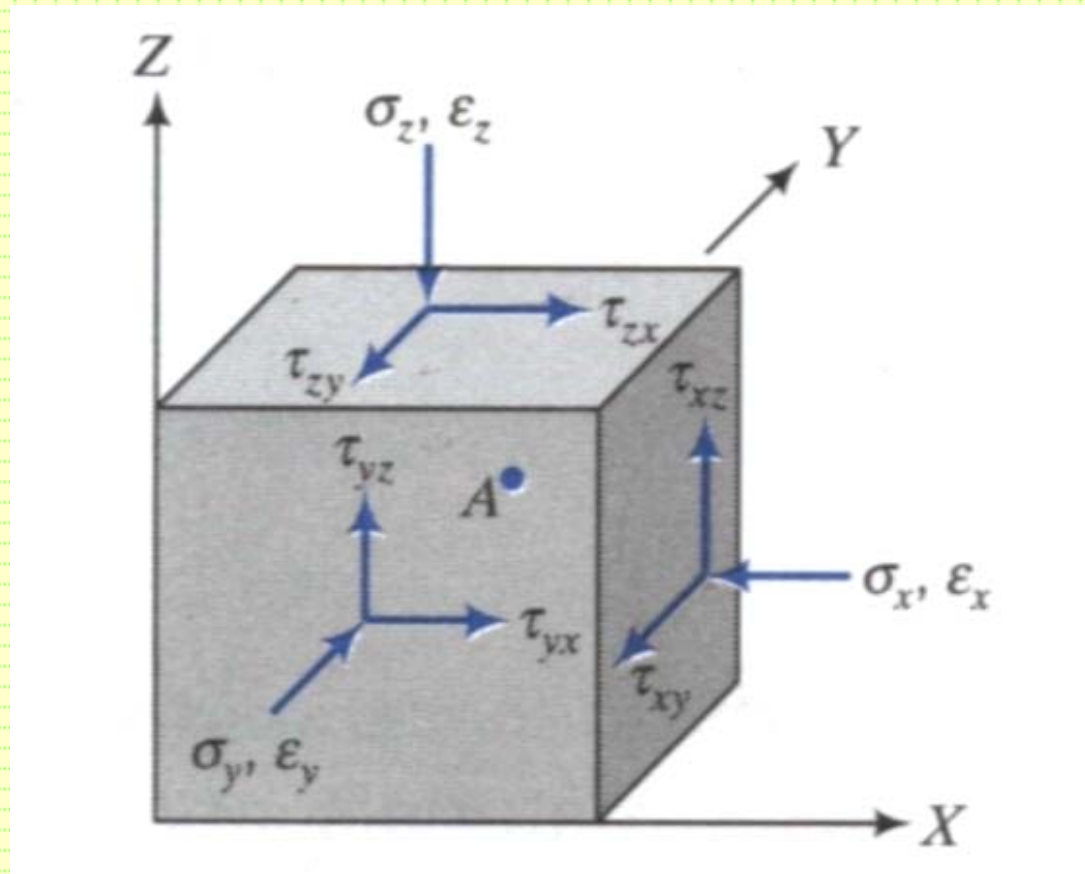
$$\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma_x$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{yy} = \sigma_y$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{xy} = \tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

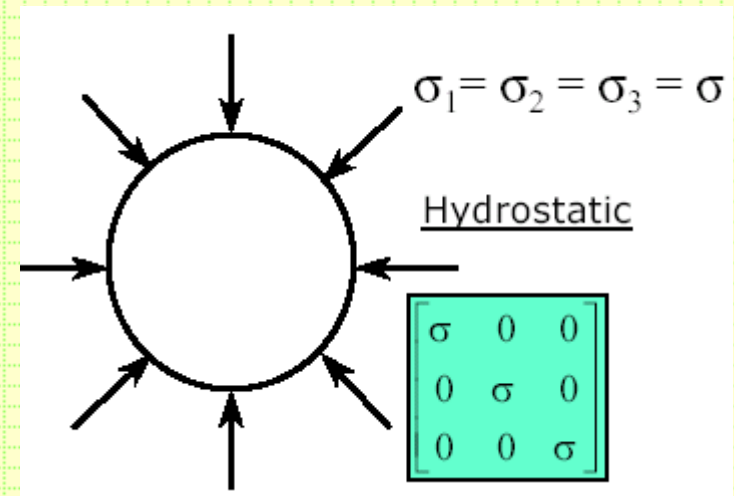
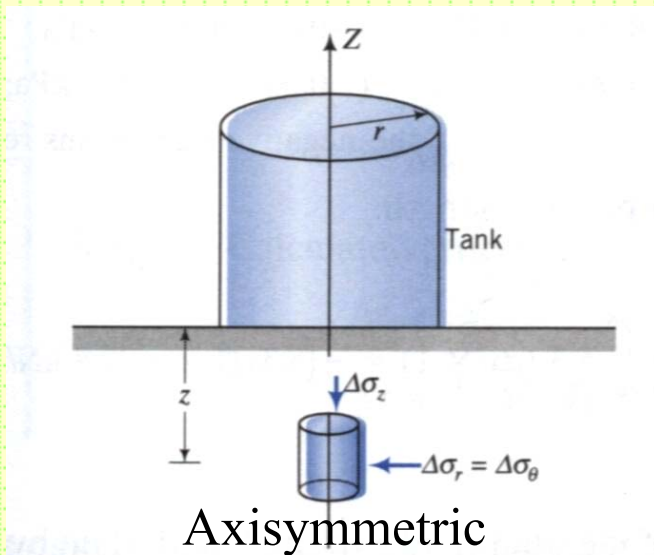
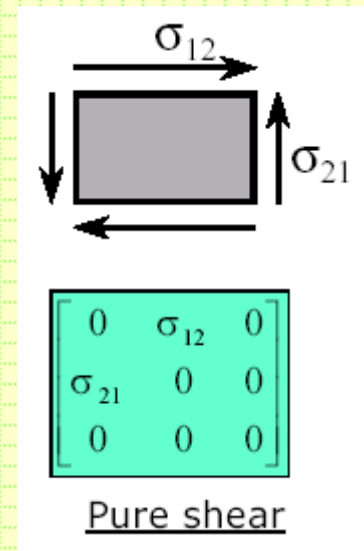
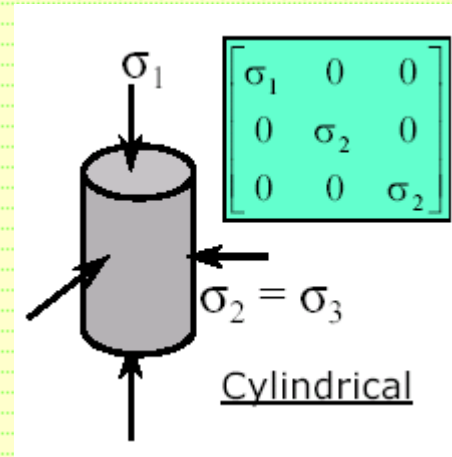
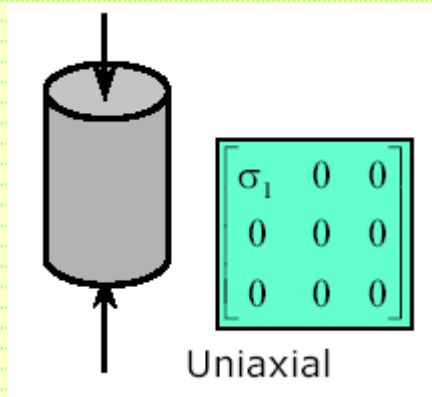
$$\sigma_{13} = \sigma_{xz} = \tau_{xz} = -\tau_{zx}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{yz} = \tau_{yz} = -\tau_{zy}$$

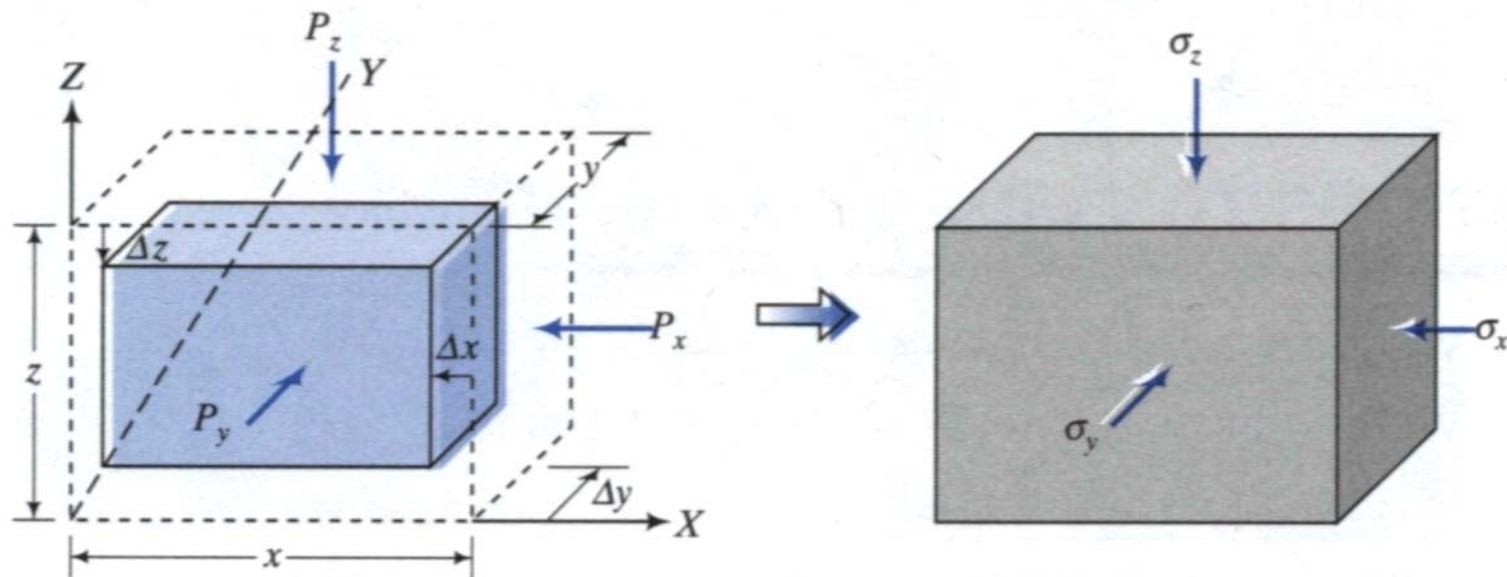


Naprężenia i odkształcenia

States of stress



Naprężenia i odkształcenia



Stresses and displacements due to applied loads.

Normal stresses and strains

$$\sigma_z = \frac{P_z}{xy}, \quad \sigma_x = \frac{P_x}{yz}, \quad \sigma_y = \frac{P_y}{xz}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\Delta z}{z}, \quad \varepsilon_x = -\frac{\Delta x}{x}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\Delta y}{y}$$

Naprężenia i odkształcenia

Volumetric strain

Assume the initial volume is $V_0 = 1$, so the final volume is:

$$V_f = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_f - V_0}{V_0} = \frac{V_f}{V_0} - 1$$

$$\varepsilon_p = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1$$

$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$$

$$\approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \text{ (small strains)}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$



Naprężenia i odkształcenia

Hooke's law

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Shear modulus

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Bulk modulus

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2G + 6K}$$

Typical Values of E and G

Soil type	Description	E^* (MPa)	G^* (MPa)
Clay	Soft	1–15	0.5–5
	Medium	15–30	5–15
	Stiff	30–100	15–40
Sand	Loose	10–20	5–10
	Medium	20–40	10–15
	Dense	40–80	15–35

Naprężenia i odkształcenia

Hooke's law in 3D

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

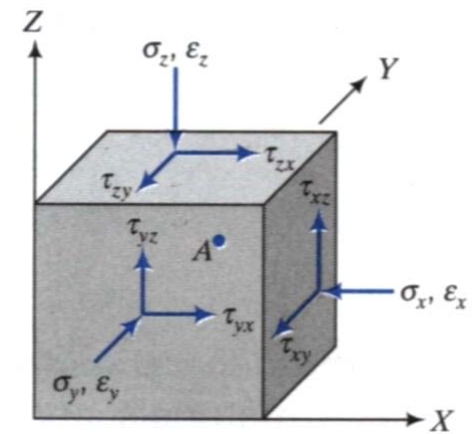
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x))$$

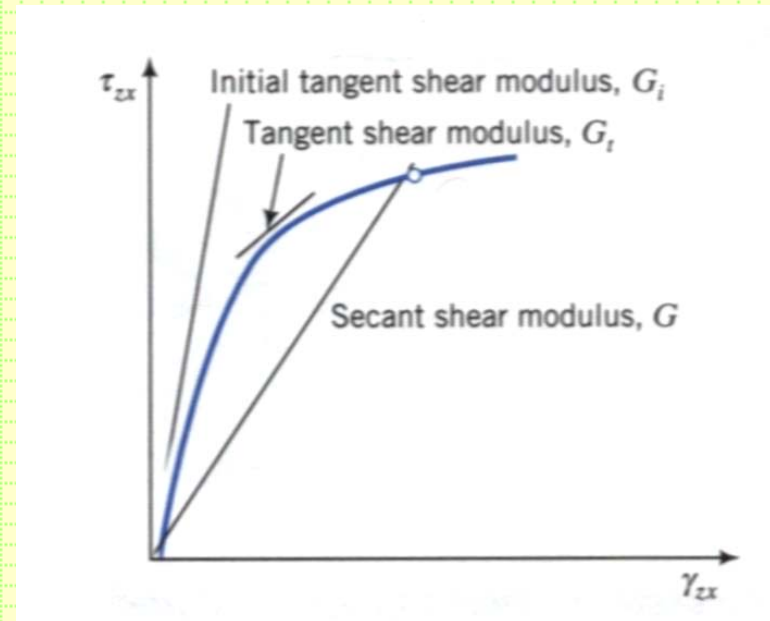
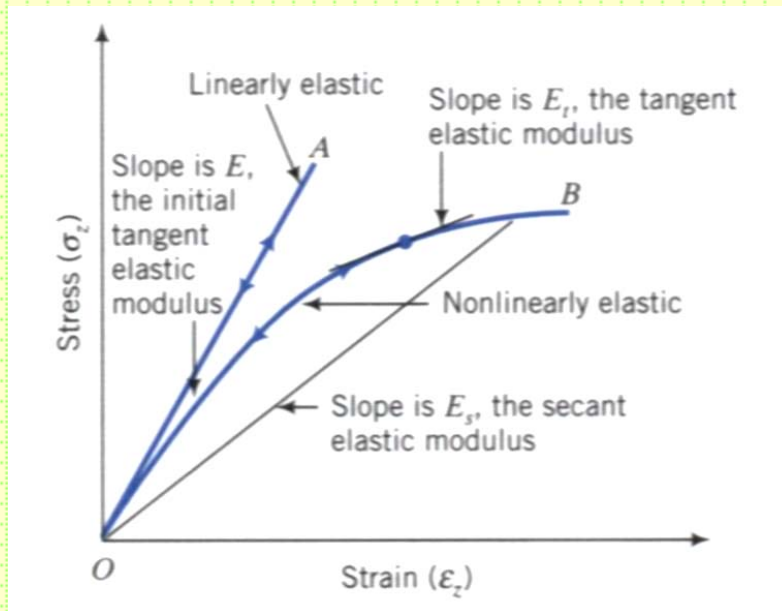
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



Naprężenia i odkształcenia

Elastic materials obey the principle of superposition.

The applied loading order is not important and the equilibrium strain is the same.

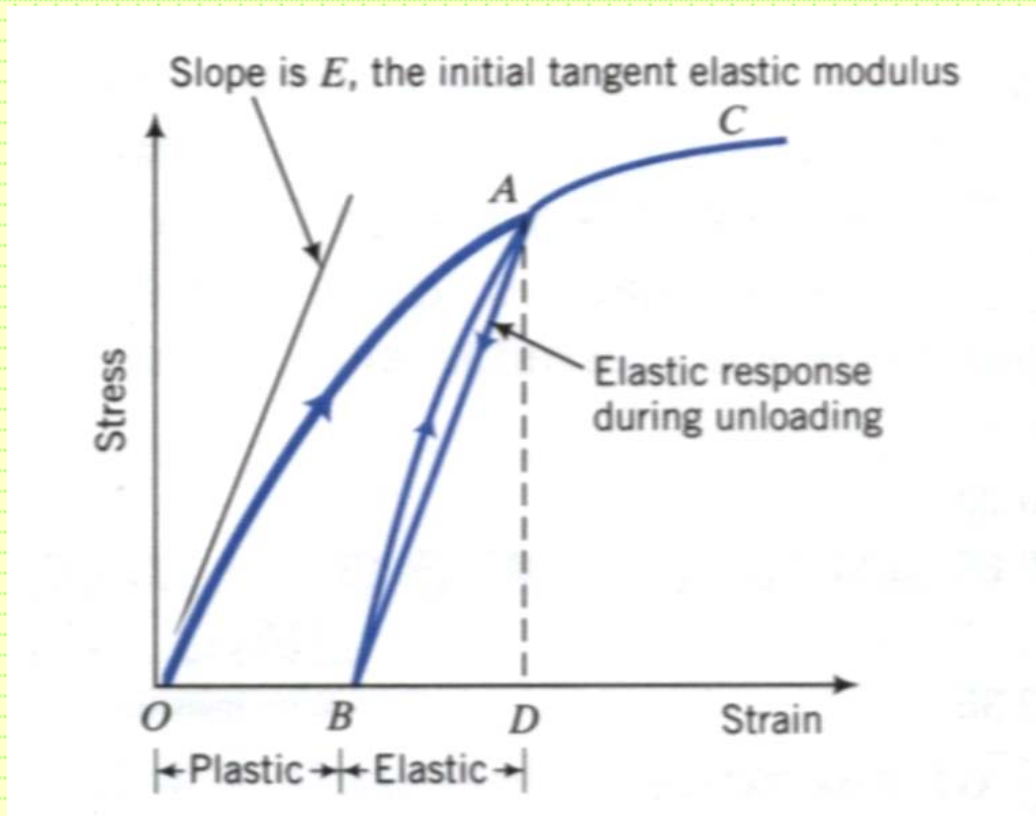


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Naprężenia i odkształcenia

Soils are elastoplastic materials actually,
(*elastic deformation + plastic deformation*)



Naprężenia i odkształcenia

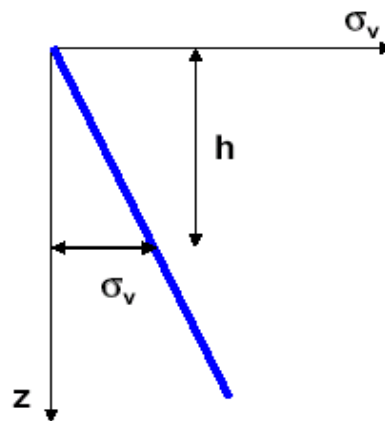
Vertical stress

Vertical stress in soil

- Vertical stress, σ_v in assembly of particles

$$\sigma_v = \rho_{soil} gh = \gamma_{soil} h$$

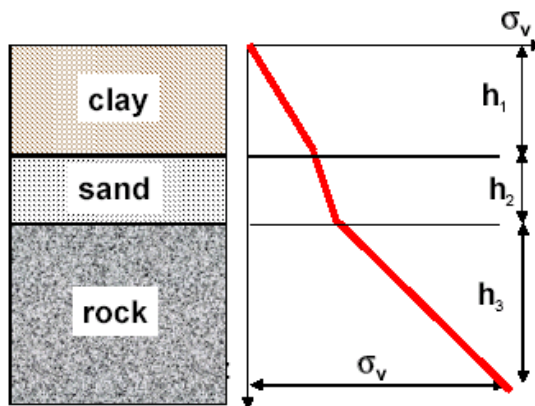
$$\sigma_v = \gamma_i h_i$$



Vertical stress in layered system

- Vertical overburden stress, σ_v

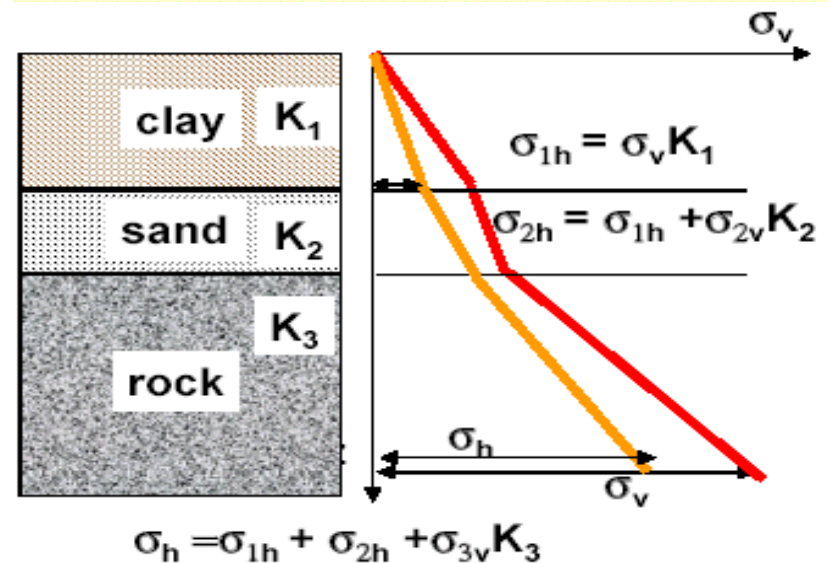
$$\sigma_v = \sum_{i=1}^n \rho_i gh_i$$



Horizontal stress

$$\sigma_h = \sigma_v \cdot K$$

K – lateral earth pressure coefficient



Naprężenia i odkształcenia

Naprężenie pierwotne lub **geostatyczne** $\sigma_{\gamma z}$ to naprężenie istniejące w gruncie od ciężaru wyżej leżących warstw. Zgodnie z zasadą superpozycji **naprężenie całkowite** σ_z w gruncie jest sumą **naprężenia pierwotnego** $\sigma_{\gamma z}$ i **naprężenia od obciążenia zewnętrznego** σ_{qz} :

$$\sigma_z = \sigma_{\gamma z} + \sigma_{qz}$$

W przypadku przyłożenia obciążenia nie na powierzchni półprzestrzeni, lecz na pewnej głębokości po wykonaniu wykopu, naprężenie całkowite σ_z w dowolnym punkcie wyznacza się jako sumę naprężenia pierwotnego geostatycznego $\sigma_{\gamma z}$ zmniejszonego o odciążenie wykopem $\Delta\sigma_{\gamma z}$:

$$\sigma_z = (\sigma_{\gamma z} - \Delta\sigma_{\gamma z}) + \sigma_{qz}$$

Wartość **poziomej składowej naprężenia geostatycznego** $\sigma_{\gamma x}$ oblicza się ze wzoru:

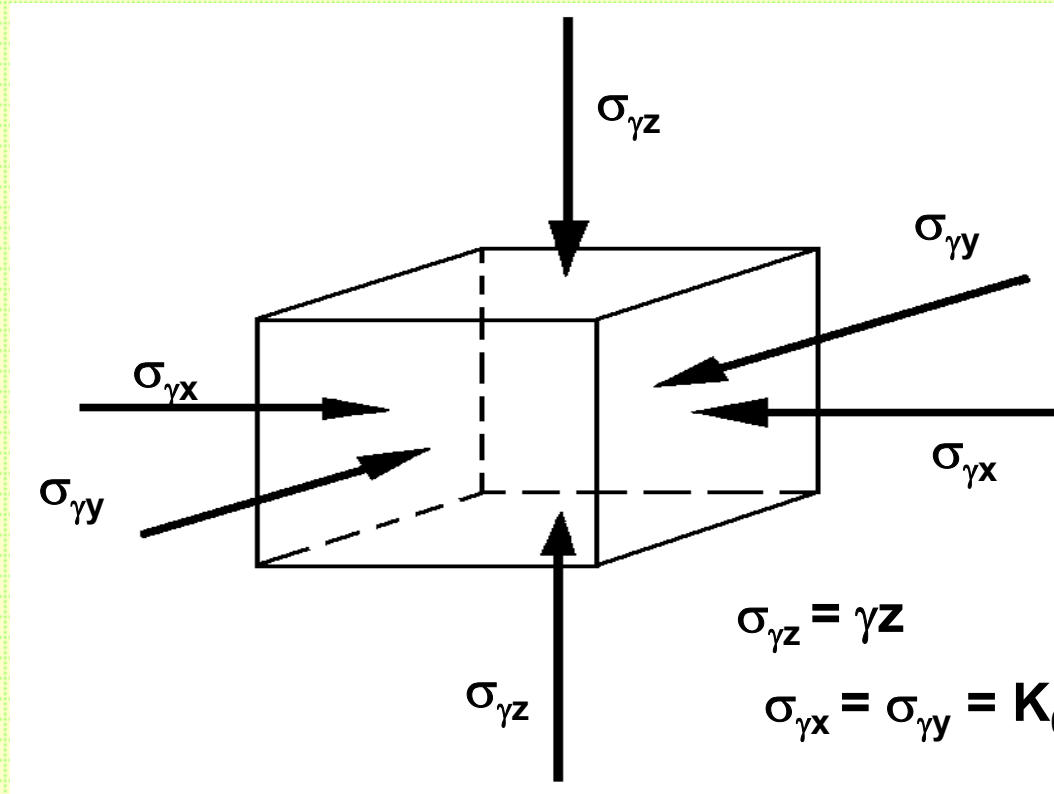
$$\sigma_{\gamma x} = \sigma_{\gamma y} = K_0 \sigma_{\gamma z}$$

gdzie: K_0 - współczynnik parcia bocznego w spoczynku,

$\sigma_{\gamma z}$ - pionowa składowa naprężenia pierwotnego.



Naprężenia i odkształcenia



Składowe naprężenia pierwotnego.

Wartość współczynnika K_0 zależy od rodzaju gruntu i historii jego naprężenia i zmienia się w zakresie **0.2 ÷ 0.6** dla gruntów normalnie skonsolidowanych i **0.8 ÷ 2.0** dla gruntów prekonsolidowanych.

Naprężenia i odkształcenia

Boussinesq solution

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{3x^2 z}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{x^2 - y^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{y^2 z}{R^3 r^2} \right) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{3y^2 z}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{y^2 - x^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{x^2 z}{R^3 r^2} \right) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}$$

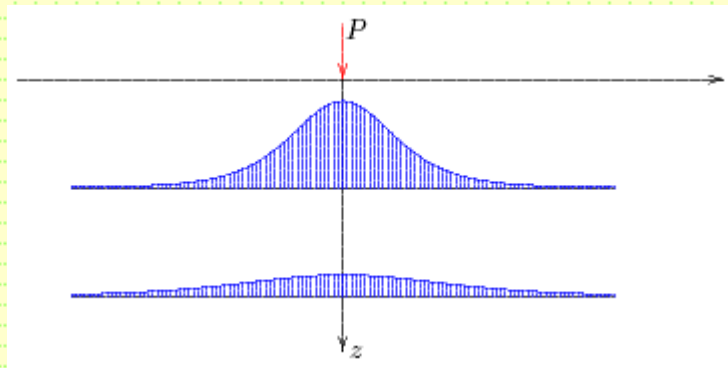
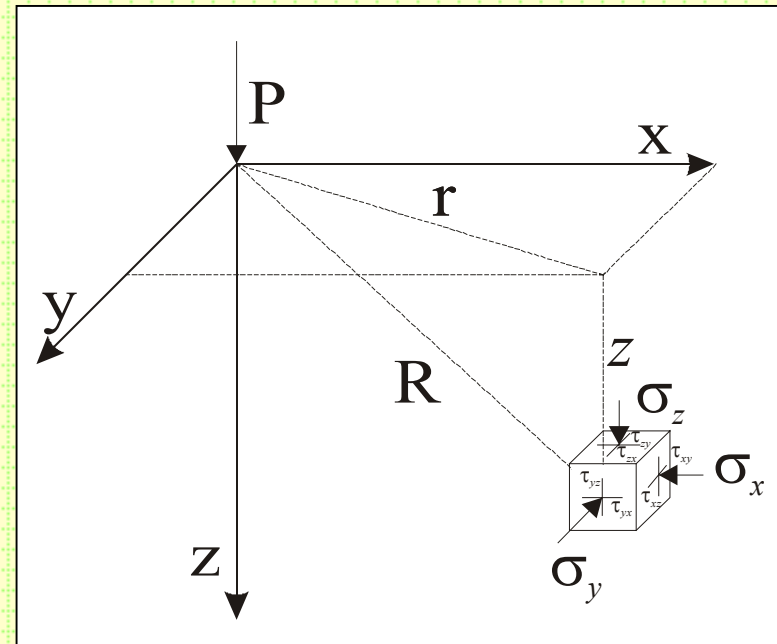
$$\tau_{zx} = -\tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 x}{R^5}$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{3xyz}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{(2R+2)xy}{(R+z^2)R^3} \right) \right]$$

$$\tau_{zy} = -\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 y}{R^5}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Naprężenia i odkształcenia

Przykład: Znaleźć naprężenia w gruncie wywołane przyłożeniem siły skupionej równej $P = 50 \text{ kN}$ w punkcie o współrzędnych $x = 3\text{m}$, $y = 0\text{m}$, $z = 4\text{m}$; $\nu=0.3$.

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{3x^2 z}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{x^2 - y^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{y^2 z}{R^3 r^2} \right) \right] = 0.266 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{3y^2 z}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{y^2 - x^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{x^2 z}{R^3 r^2} \right) \right] = -0.031 \text{ kPa}$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} = 0.49 \text{ kPa}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

$$\tau_{zx} = -\tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 x}{R^5} = 0.367 \text{ kPa}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{3xyz}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{(2R+z)xy}{(R+z^2)R^3} \right) \right] = 0$$

$$\tau_{zy} = -\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 y}{R^5} = 0$$

Naprężenia i odkształcenia

Flamant's solution – extension to **line loads**

$$\sigma_z = \frac{2Pz^3}{\pi(x^2 + z^2)^2} \quad \sigma_x = \frac{2Px^2z}{\pi(x^2 + z^2)^2}$$

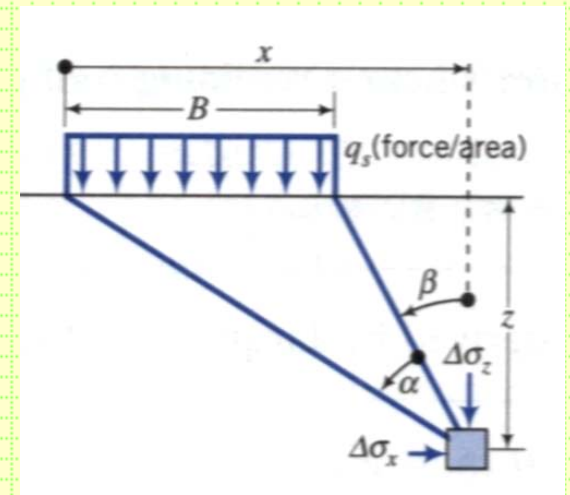
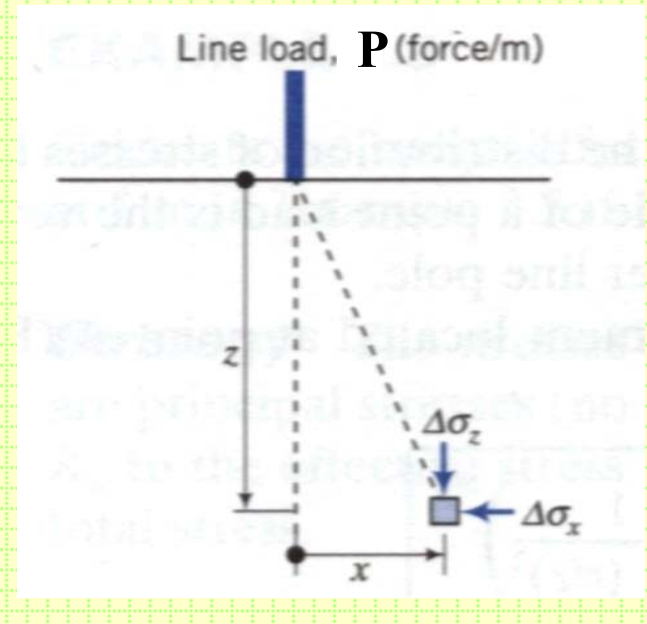
$$\sigma_y = \frac{2P\nu}{\pi(x^2 + z^2)} \quad \tau_{xz} = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}$$

A **strip load** is the load transmitted by a structure of finite width and infinite length on a soil surface. The increase in stresses due to a surface stress q_s (force/area) is as follows:

$$\sigma_z = \frac{q_s}{\pi} [\alpha + \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta)]$$

$$\sigma_x = \frac{q_s}{\pi} [\alpha - \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta)]$$

$$\tau_{zx} = \frac{q_s}{\pi} [\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + 2\beta)]$$

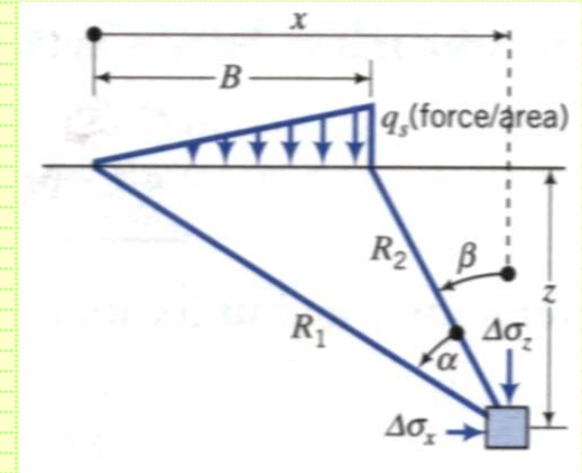


Naprężenia i odkształcenia

$$\sigma_z = \frac{q_s}{\pi} \left[\frac{x}{B} \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right]$$

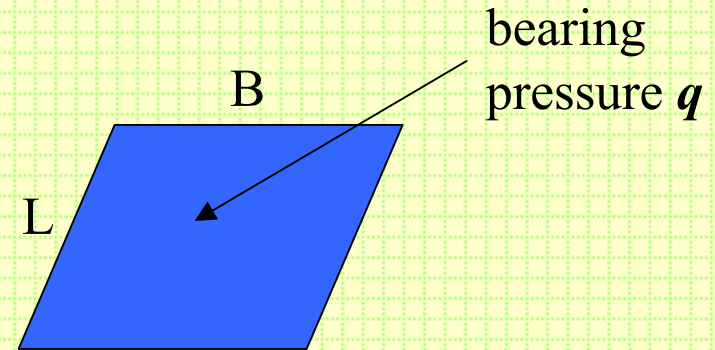
$$\sigma_x = \frac{q_s}{\pi} \left[\frac{x}{B} \alpha - \frac{z}{B} \ln \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right]$$

$$\tau_{zx} = \frac{q_s}{2\pi} \left[1 + \cos 2\beta - 2 \frac{z}{B} \alpha \right]$$



Simplified solution for rectangular loaded areas beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{B}{2z} \right)^{1.38 + 0.62 \frac{B}{L}}} \right)^{2.6 - 0.84 \frac{B}{L}}$$



Naprężenia i odkształcenia

Metoda punktów narożnych umożliwia wyznaczanie naprężenia pionowego oraz sumy naprężeń głównych pod narożem prostokątnego obciążonego obszaru według wzorów:

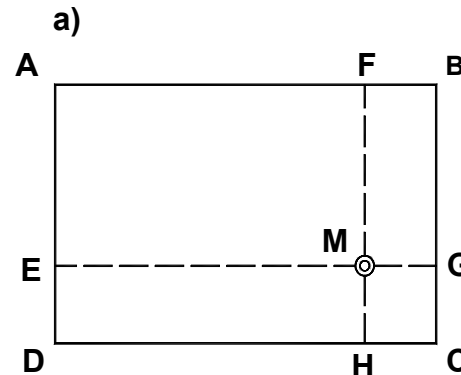
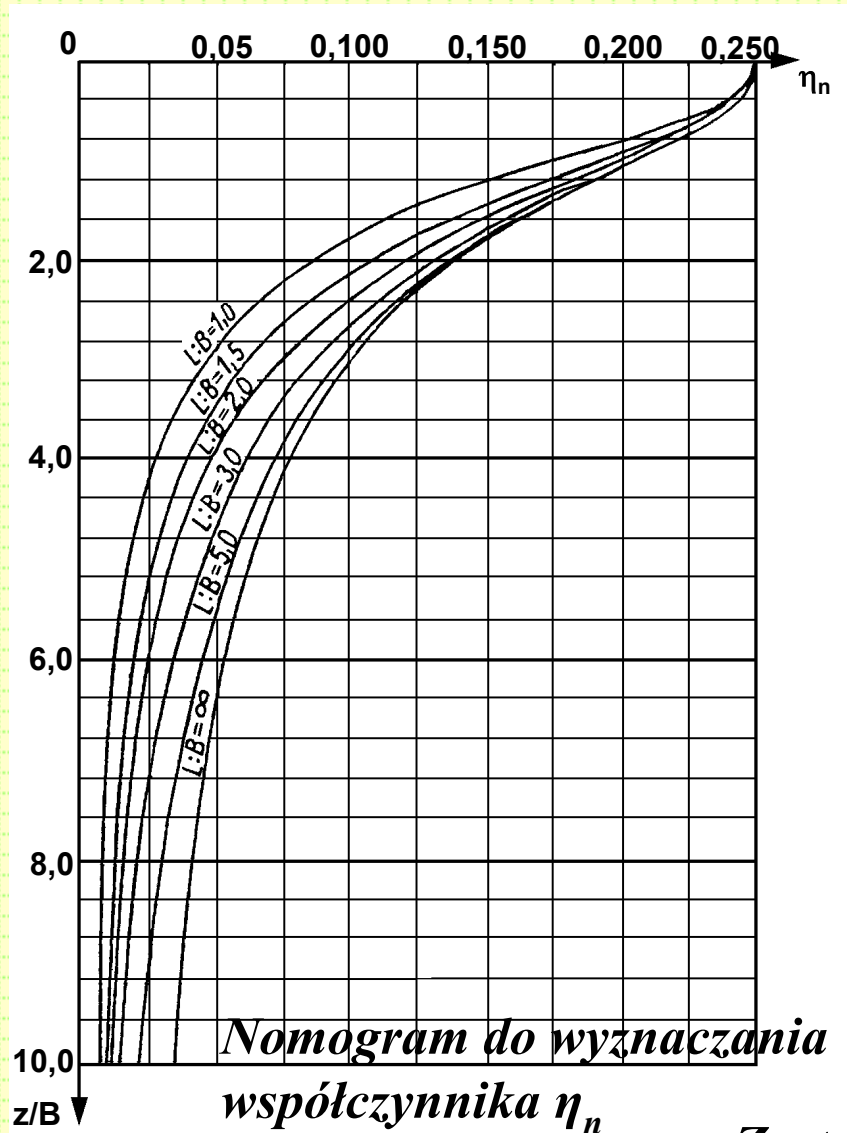
$$\sigma_{zn} = \frac{q}{2} \frac{LBz(L^2 + B^2 + 2z^2)}{(L^2 + z^2)(B^2 + z^2)\sqrt{L^2 + B^2 + z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{LB}{z\sqrt{L^2 + B^2 + z^2}} = q\eta_n$$

gdzie:

η_n - współczynnik wyznaczany z nomogramu w zależności od stosunku L/B (długość obszaru obciążonego do jego szerokości) oraz od stosunku z/B (zagłębienie punktu poniżej powierzchni do szerokości),

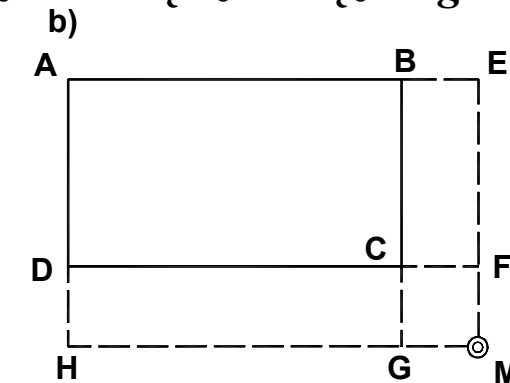
q - obciążenie ciągłe.

Naprężenia i odkształcenia



$$\sigma_{zq} = (\eta_n^{AFME} + \eta_n^{FBGM} + \eta_n^{EMHD} + \eta_n^{MGCH}) \cdot q$$

naroże wewnątrz obciążonego obszaru



$$\sigma_{zq} = (\eta_n^{AEMH} - \eta_n^{BEMG} - \eta_n^{DFMH} + \eta_n^{CFMG}) \cdot q$$

naroże na zewnątrz obciążonego obszaru.

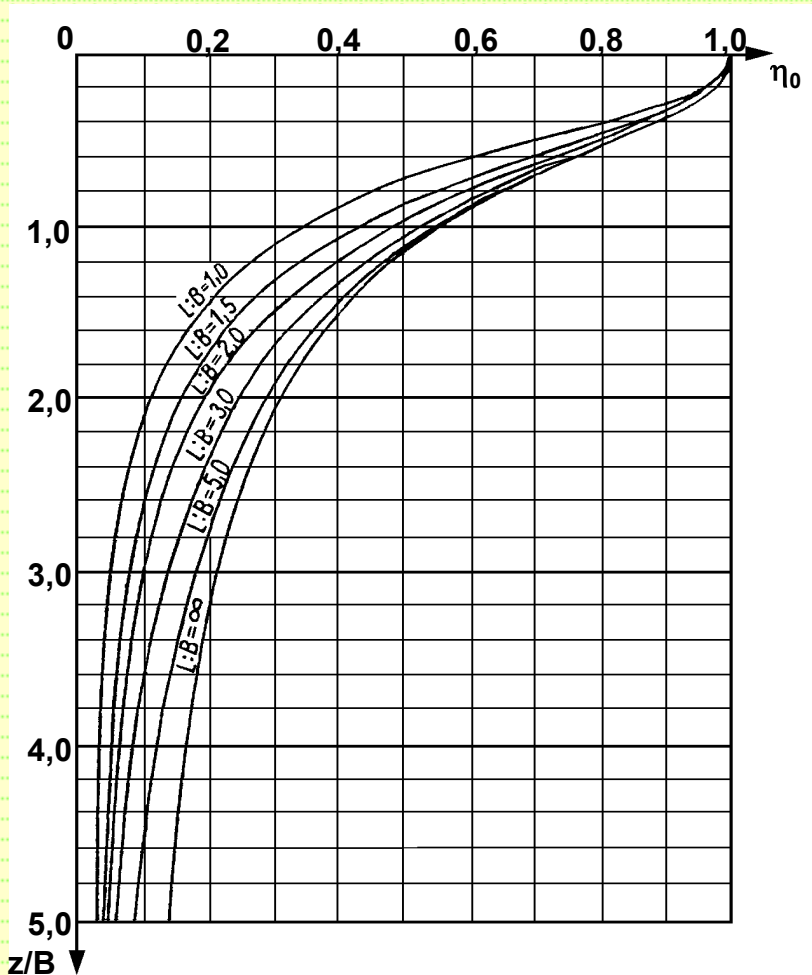
Zastosowanie metody punktów narożnych do obliczania naprężeń w dowolnym punkcie podłoża.

Naprężenia i odkształcenia

Metodą punktów środkowych można wyznaczyć naprężenie pionowe pod środkiem prostokątnego obszaru obciążonego, posługując się wzorem:

$$\sigma_z = \eta_0 q$$

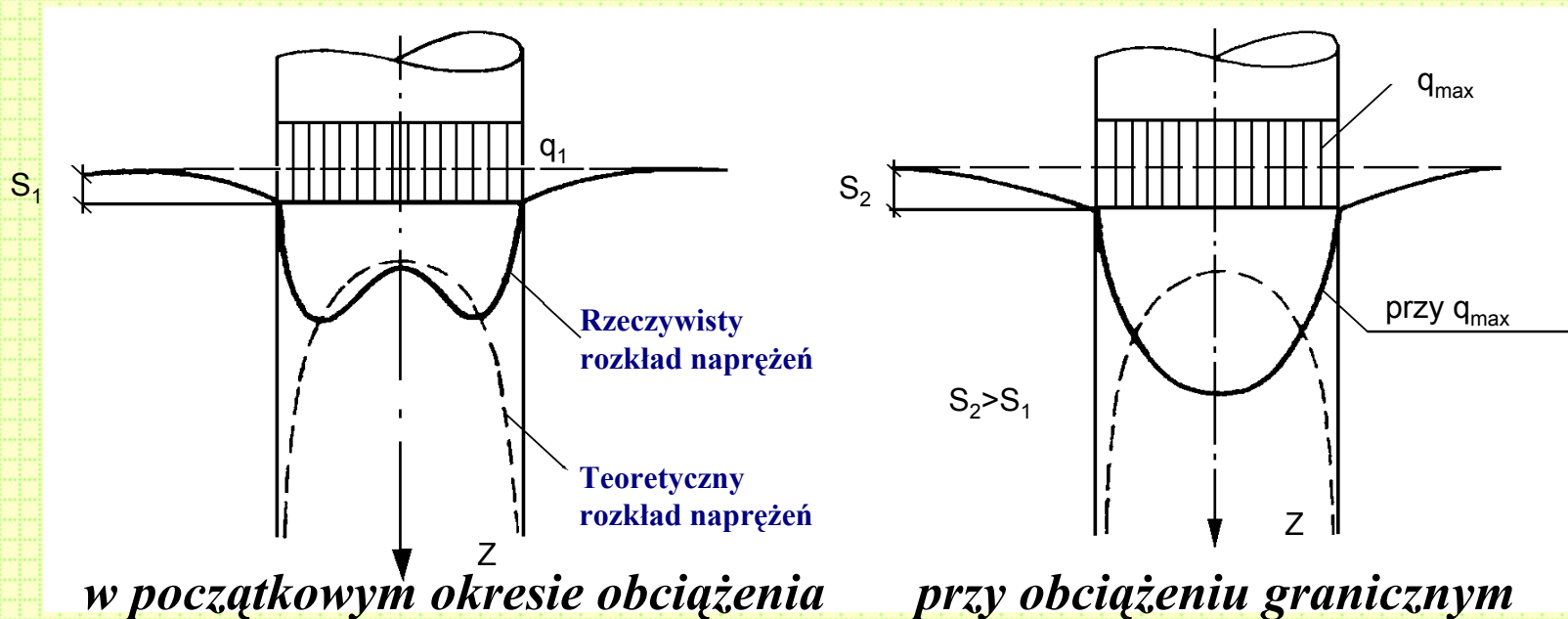
Wartość σ_z można również wyznaczyć, stosując superpozycję naprężeń pod wspólnym narożem czterech obciążonych prostokątów o bokach $L/2$ i $B/2$.



Nomogram do wyznaczania współczynnika η_0

Naprężenia i odkształcenia

Rozkład Naprężenia Pod Fundamentami Sztywnymi



Rozkład naprężenia pionowego w poziomie posadowienia absolutnie sztywnego fundamentu

Teoretyczny rozkład naprężenia w poziomie posadowienia wyznacza się ze wzoru

$$\sigma = \frac{q}{2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

gdzie:

ρ - odległość rozpatrywanego punktu od środka fundamentu,

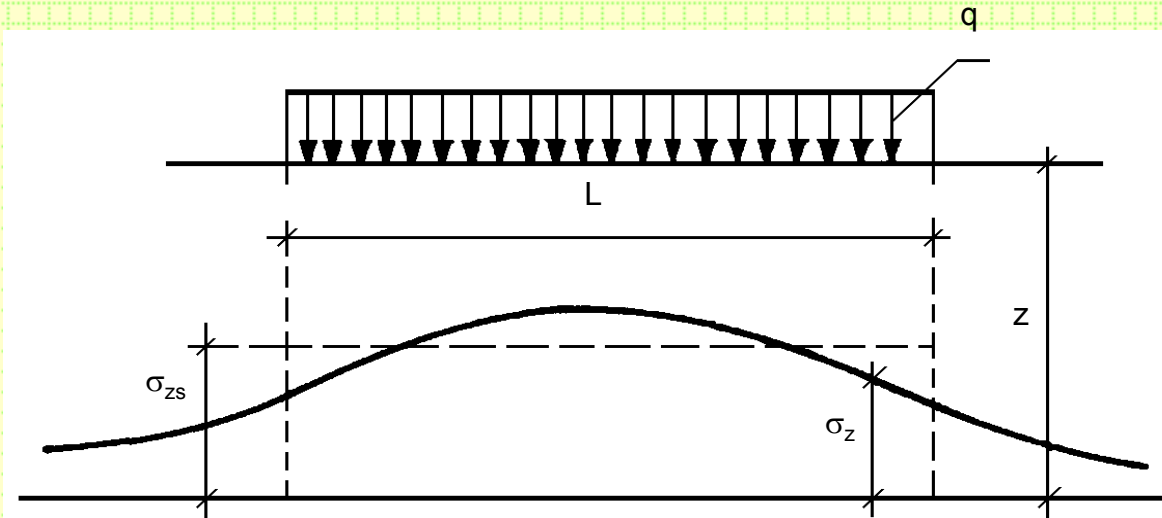
r - promień podstawy fundamentu

Naprężenia i odkształcenia

Naprężenia pionowe na głębokości z (poniżej poziomu posadowienia) wyznacza się jako **naprężenia średnie (całkowe)** w obrębie prostokąta znajdującego się pod obszarem obciążanym wg wzoru:

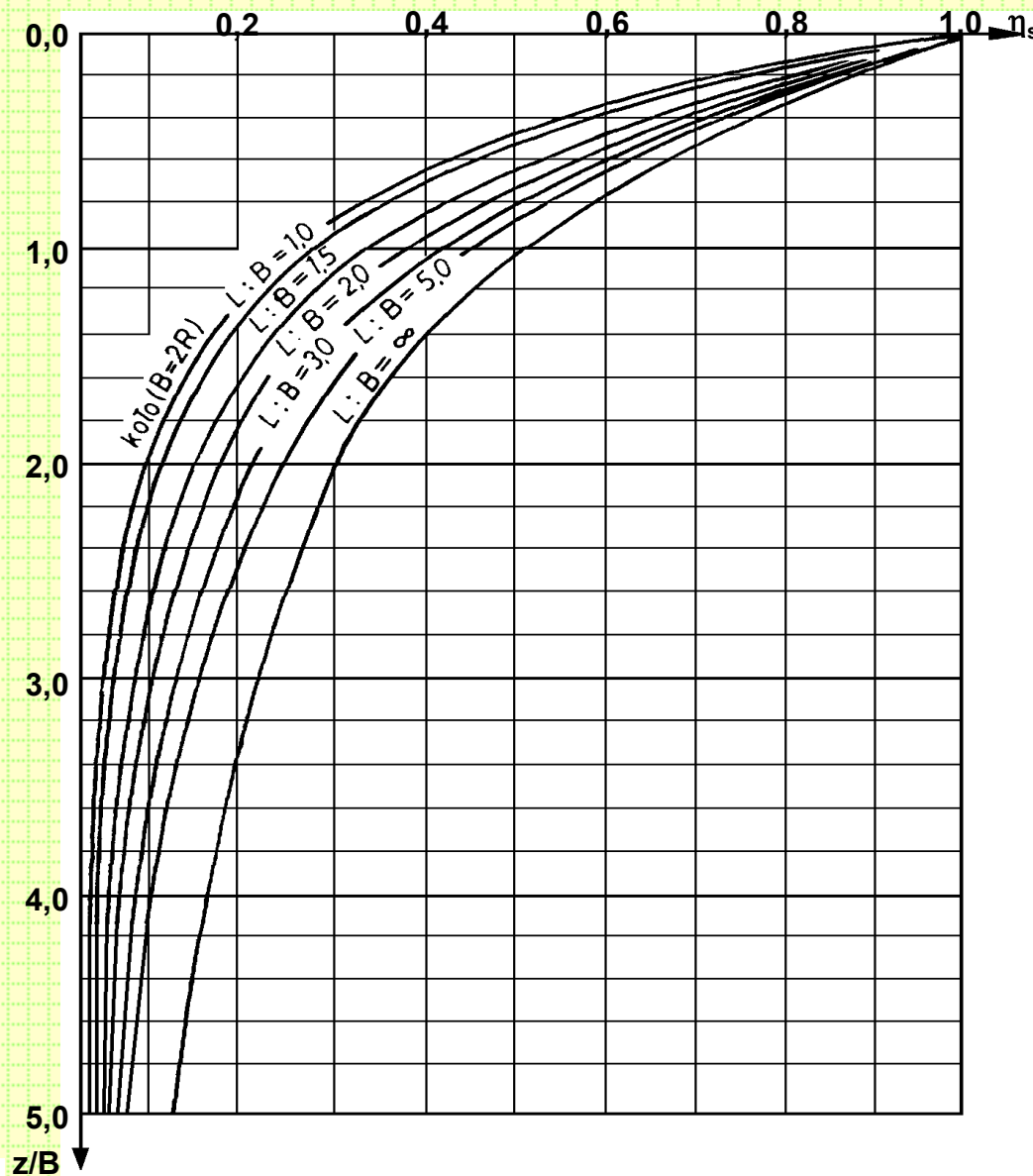
$$\sigma_{zs} = q \eta_s$$

gdzie: η_s - współczynnik rozkładu naprężenia



Rozkład naprężenia σ_z i naprężenie średnie σ_{zs} na głębokości z pod obszarem prostokątnym obciążonym równomiernie

Naprężenia i odkształcenia

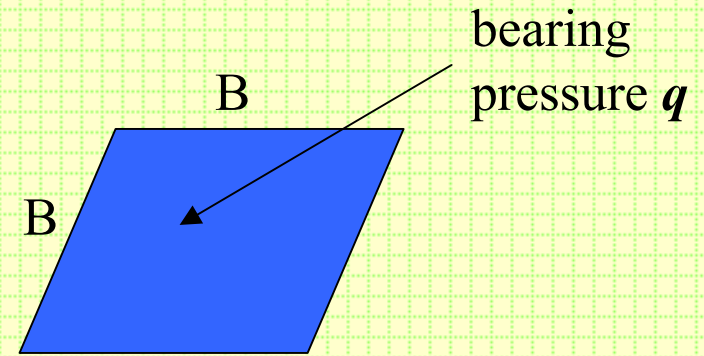


Nomogram do wyznaczania współczynnika η

Naprężenia i odkształcenia

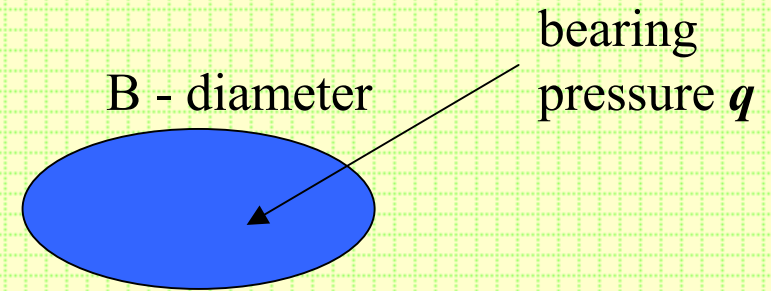
Simplified solution for square loaded areas
beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{B}{2z} \right)^2 \right)^{1.76}} \right]$$



Simplified solution for circular loaded areas
beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{B}{2z} \right)^2 \right)^{1.50}} \right]$$



Naprężenia i odkształcenia

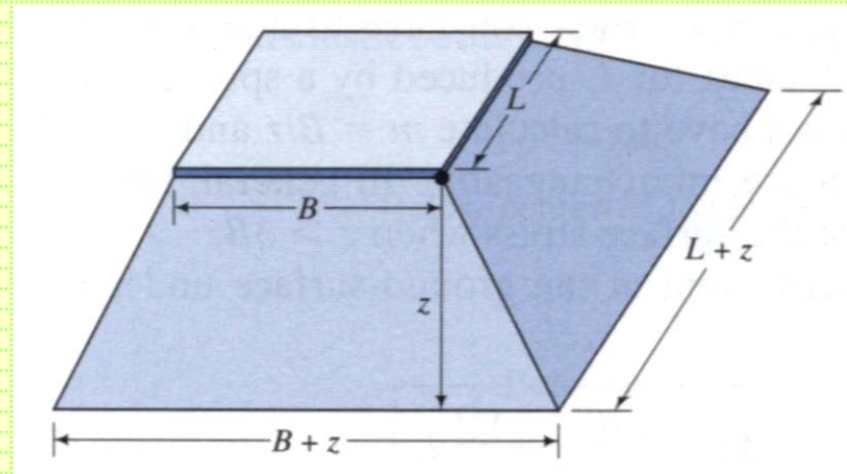
Simplified solution for continuous loaded areas (strip loads) of width B and infinite length beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{B}{2z} \right)^{1.38}} \right]^{2.6}$$

In preliminary analyses of vertical stress increase under the center of rectangular loads, geotechnical engineers often use an approximate method (sometimes called the 2:1 method). The vertical stress increase under the center of the load is:

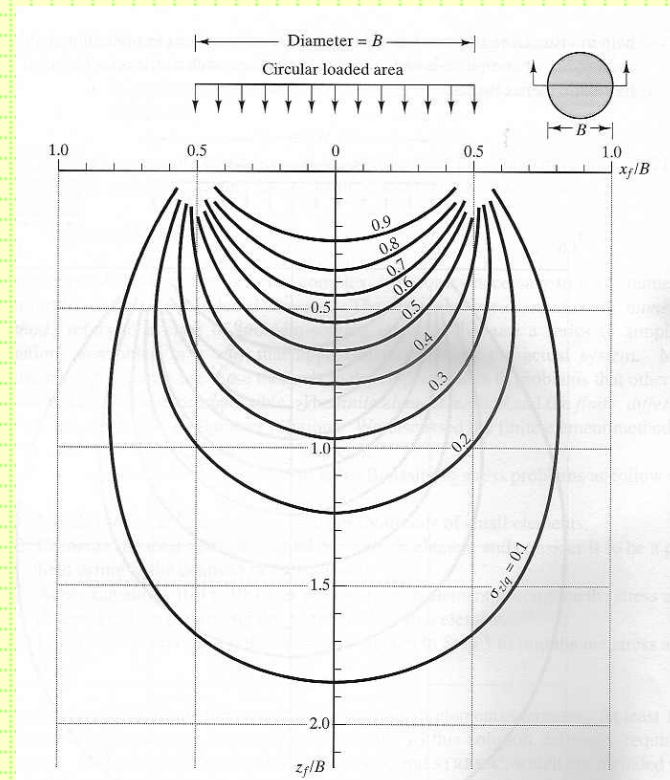
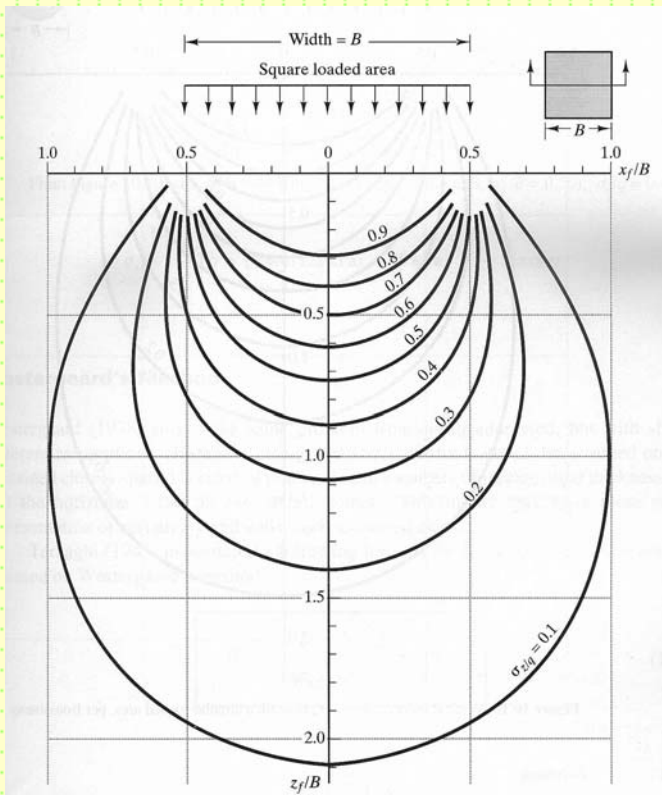
$$\sigma_z = \frac{q_s BL}{(B + z)(L + z)}$$

The approximate method is reasonably accurate (compared with Boussinesq's elastic solution) when $z > B$



Naprężenia i odkształcenia

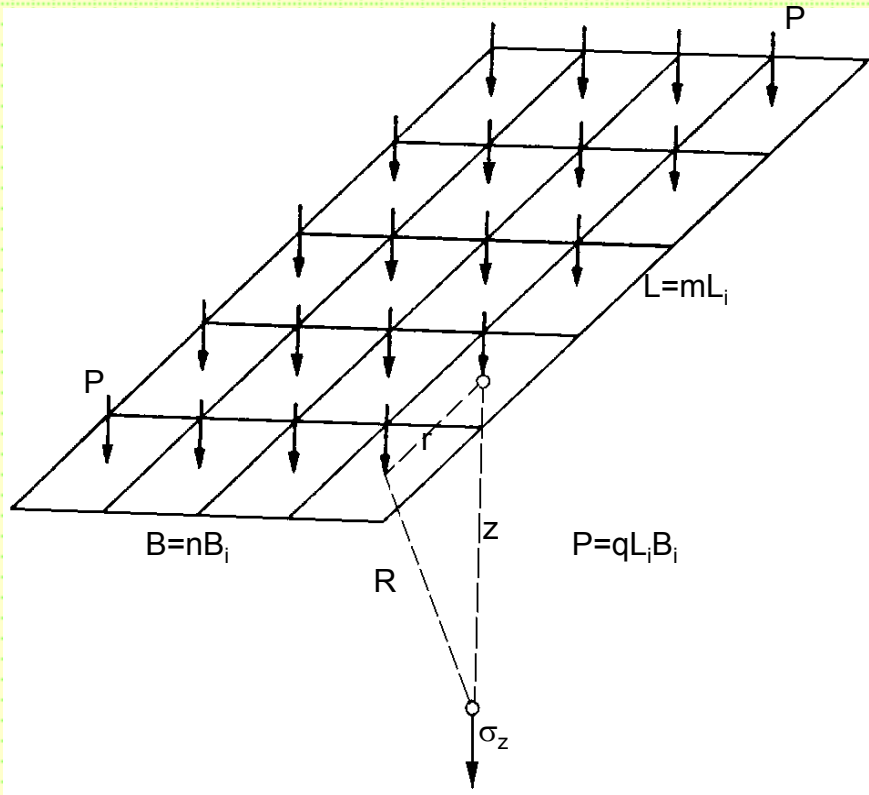
Chart solutions for rectangular and circular loaded area - pressure bulbs (stress bulbs).



Naprężenia i odkształcenia

Rozkład naprężenia w gruncie od działania obciążenia ciągłego

Zastosowanie superpozycji do wyznaczania naprężenia od obciążenia ciągłego.



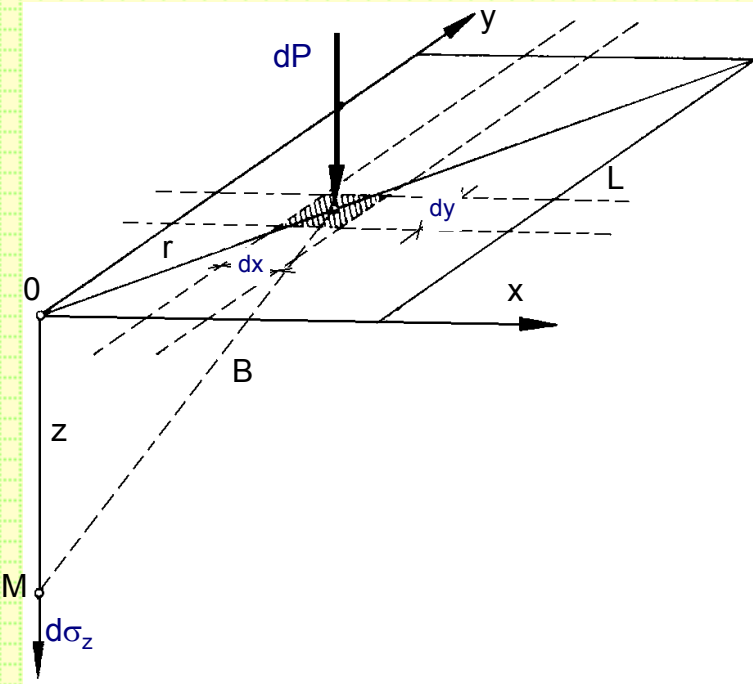
Obszar obciążony dzieli się na mniejsze elementy, w środku elementów przykłada się zastępcze siły skupione.

Wartość naprężenia **pionowego normalnego** w dowolnym punkcie ośrodka gruntowego obciążonego wyznacza się na podstawie wzoru **Boussinesqa**:

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi z^2 \left[1 + \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right]^{5/2}}$$

Naprężenia i odkształcenia

Wyznaczanie naprężenia pod narożem prostokątnego obszaru obciążonego



Wyznaczanie naprężeń pionowych od obciążenia ciągłego za pomocą elementarnych zastępczych sił skupionych.

Na danym obszarze A wydziela się nieskończenie mały element o polu $dA = dx dy$; elementarna siła $dP = qdA$ wywołuje w rozpatrywanym punkcie M na głębokości z poniżej powierzchni półprzestrzeni elementarne naprężenie:

$$d\sigma_z = \frac{3 dP}{2\pi z^2 \left[1 + \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right]^{5/2}}$$

Naprężenie pionowe w rozpatrywanym punkcie M od obciążenia ciągłego działającego w obszarze A wynosi:

$$\sigma_z = \int_0^L \int_0^B \frac{3q dx dy}{2\pi z^2 \left[1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right]^{5/2}}$$

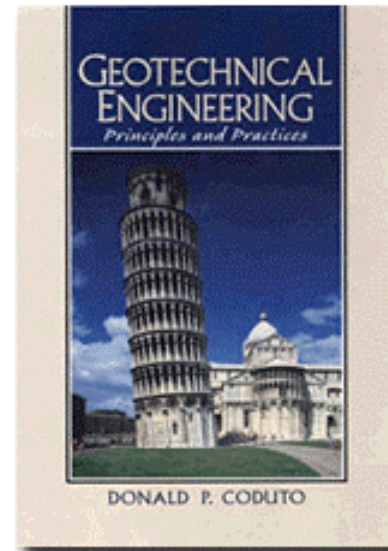
Naprężenia i odkształcenia

Welcome To

GEOTECHNICAL ENGINEERING

Principles and Practices

DONALD P. CODUTO



<http://www.prenhall.com/coduto/html/Geotechnical/Software.htm>

Geotechnical Engineering: Principles and Practices includes the following computer software:

STRESSP - Geostatic and induced stresses beneath a point load

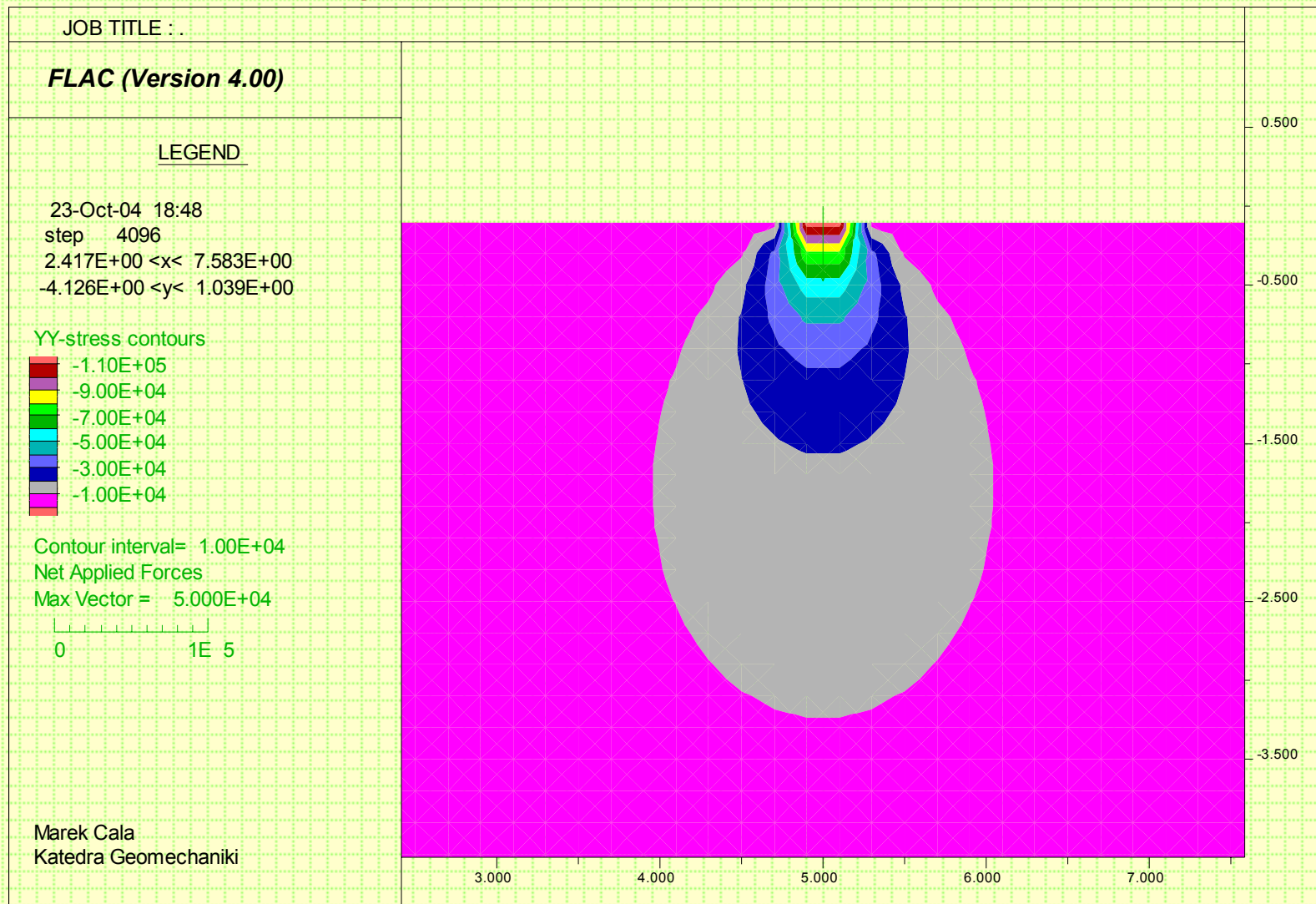
STRESSL - Geostatic and induced stresses beneath a line load

STRESSR - Geostatic and induced stresses beneath a rectangular area load

STRESSC - Geostatic and induced stresses beneath a circular area load



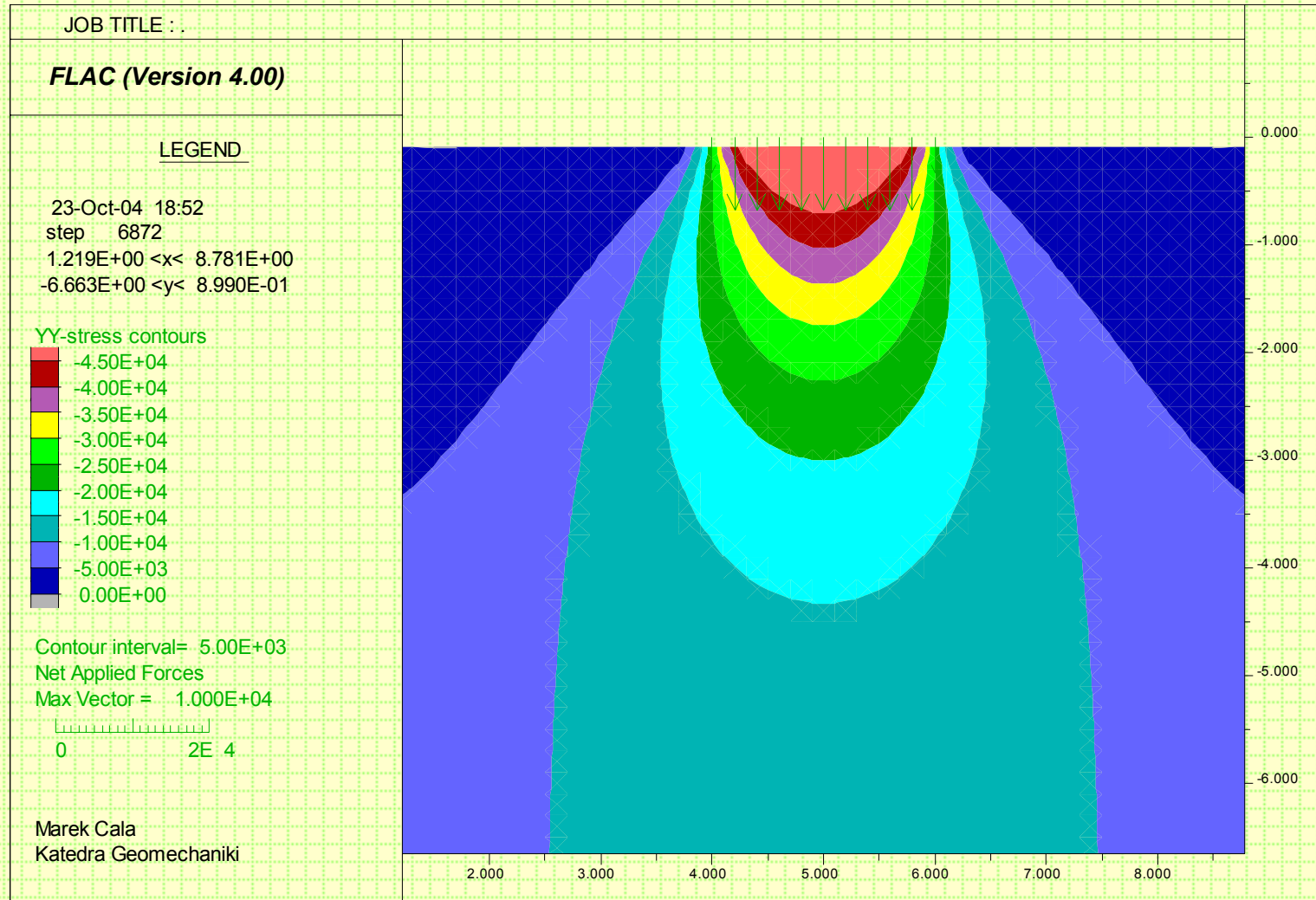
Naprężenia i odkształcenia



Naprężenia pionowe wywołane siłą $P = 50 \text{ kN}$.



Naprężenia i odkształcenia

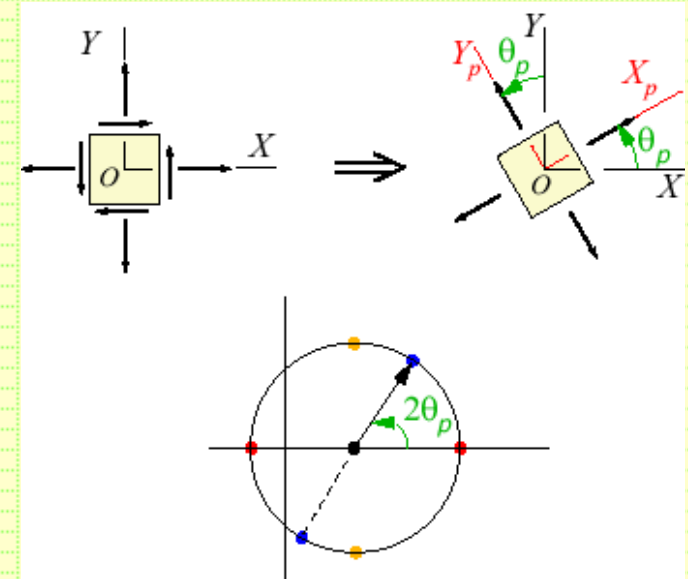
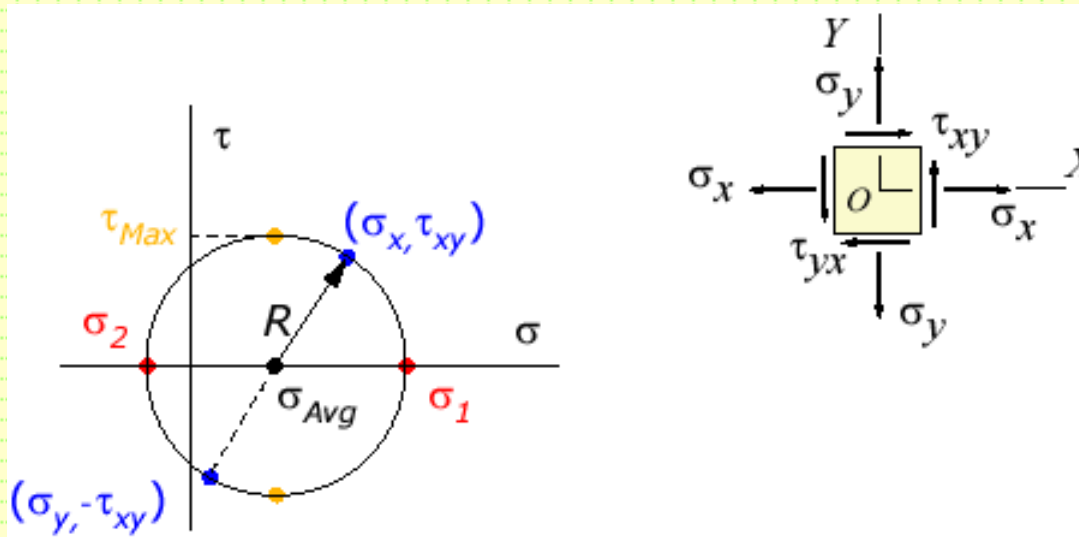


Naprężenia pionowe wywołane obciążeniem ciągłym $q = 50 \text{ kN/m}$ o szerokości 2 m



Naprężenia i odkształcenia

Bardzo przydatnym i pogładowym sposobem przedstawienia stanu naprężenia jest **koło Mohra**. Znając wartość i kierunek składowych naprężenia σ_1 i σ_3 , można wyznaczyć **naprężenia normalne i styczne** w dowolnym kierunku, stosując następujące związki:



$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\theta = \sigma_1 \cdot \cos^2 \theta + \sigma_2 \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\theta \qquad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Naprężenia i odkształcenia

Wzory na naprężenia główne oraz ich kierunek:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

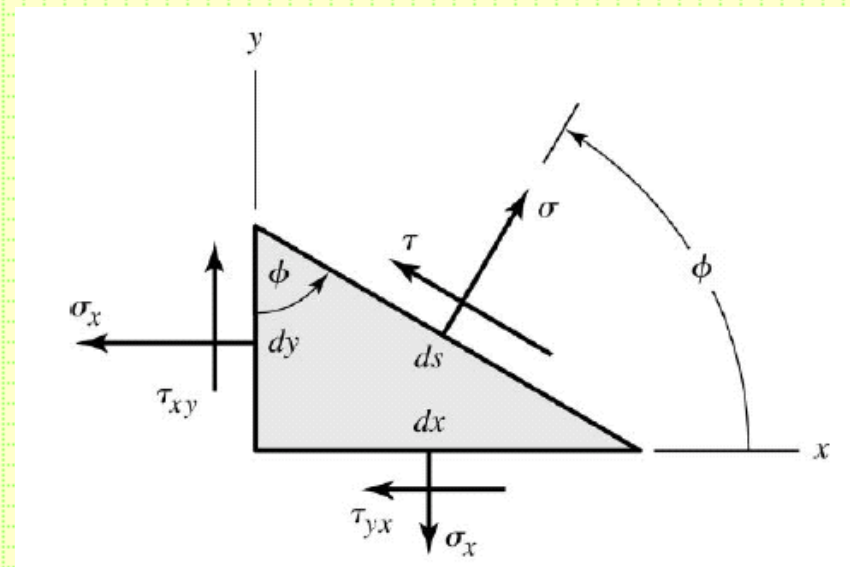
$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Transformacja składowych stanu naprężenia.

Wartości składowych stanu naprężenia można określić z następujących wzorów:

$$\tau = \tau_{xy} \cos 2\varphi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$



Naprężenia i odkształcenia

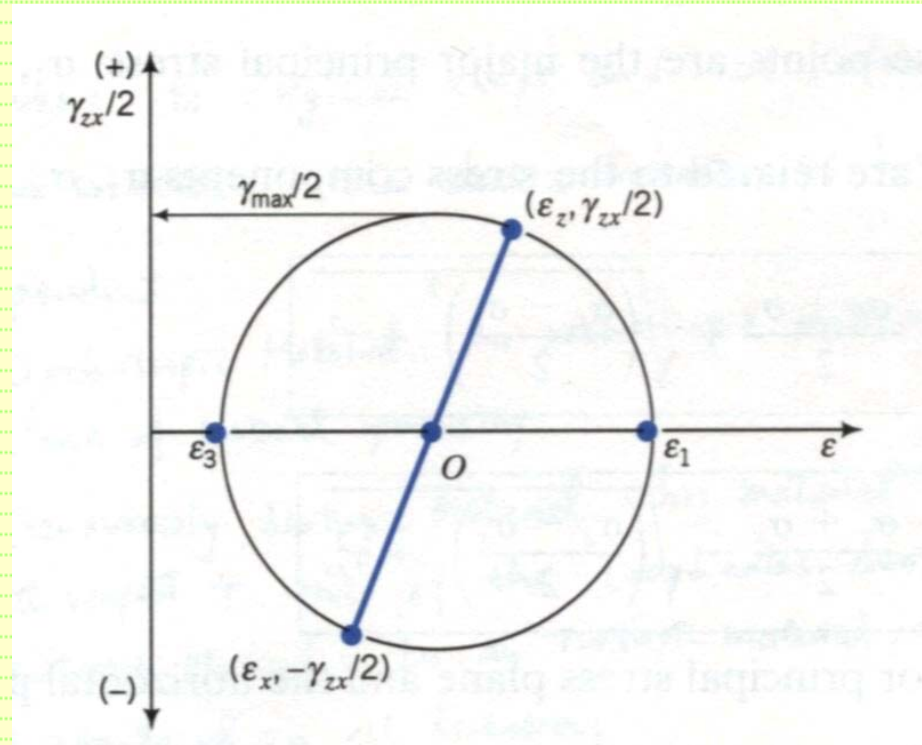
Koło Mohra dla odkształceń

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

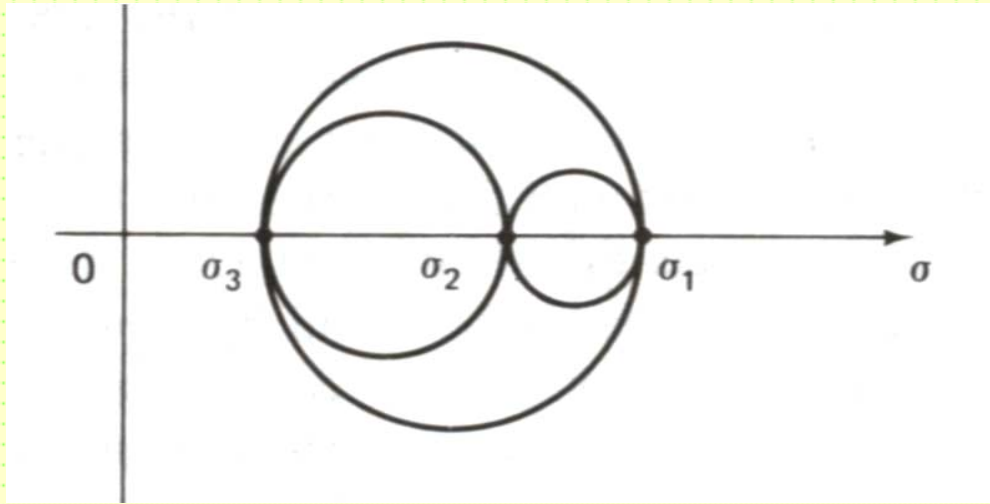
$$\gamma_\theta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\theta = \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \theta$$



Naprężenia i odkształcenia

Koło Mohra dla przestrzennego stanu naprężenia i odkształcenia



If all the principal stresses are considered (3-D), there are three Mohr's circles. However, in general we concern the maximum shear mostly and therefore the major and the minor are only important. (σ_2 - intermediate principal stress).

Naprężenia i odkształcenia

Odwzorowanie Stanu Naprężenia w Układzie p – q

Przedstawienie na jednym wykresie wielu stanów naprężenia dokonuje się poprzez nanoszenie punktu, którego współrzędne są równe:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad q = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

W większości przypadków naprężenia główne występują na pionowych bądź na poziomych płaszczyznach, a zatem równania można napisać w postaci:

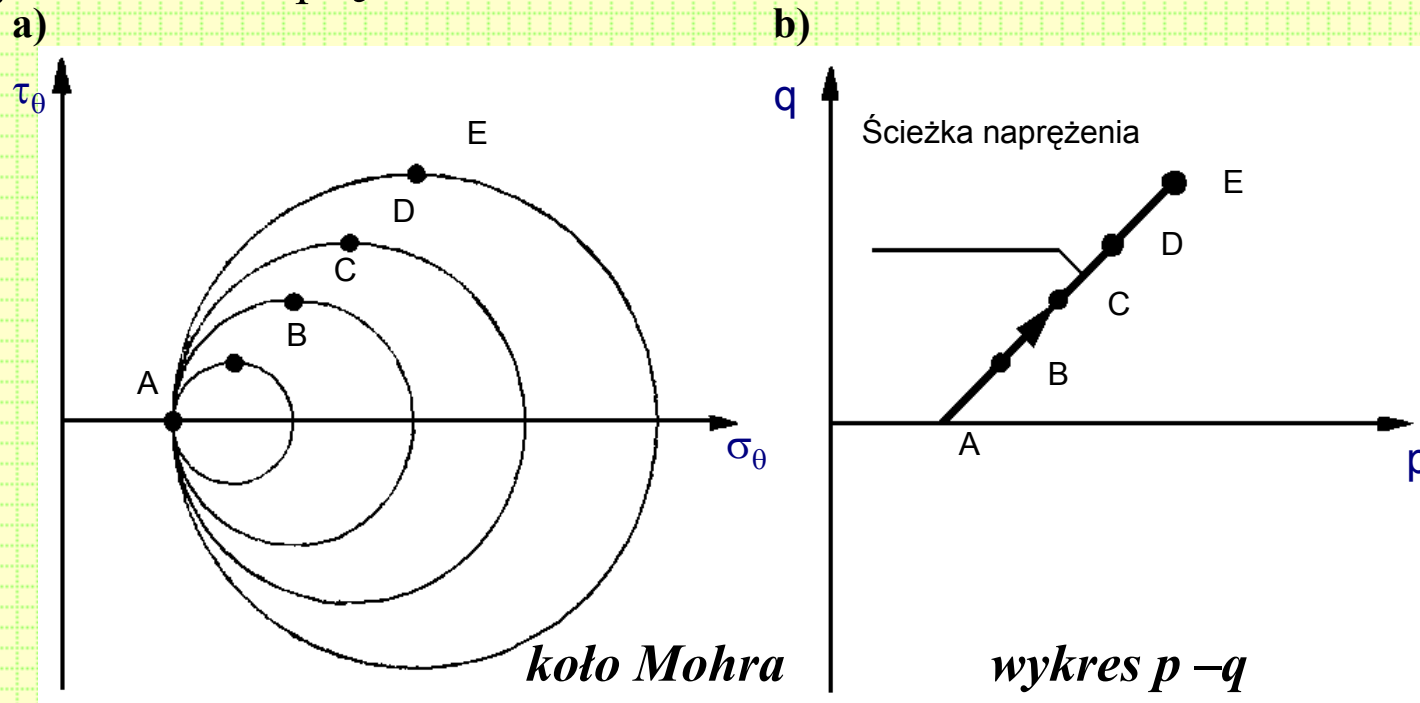
$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad q = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

Ten sposób przedstawienia stanu naprężenia w gruncie sprowadza się do naniesienia jednego najwyżej leżącego punktu dla **q dodatniego** lub najniżej leżącego punktu dla **q ujemnego** na kole Mohra.

Naprężenia i odkształcenia

Ścieżki Naprężenia

Ścieżka naprężenia to linia prosta lub krzywa powstała w wyniku połączenia szeregu punktów stanu naprężenia naniesionych na wykres, przedstawia ciągłość kolejnych stanów naprężenia.

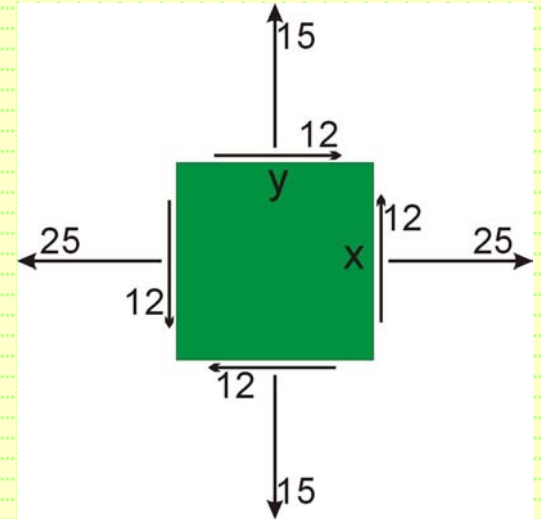


Przedstawienie kolejnych stanów naprężenia przy zwiększeniu pionowej składowej naprężenia σ_1 i stałej wartości składowej σ_3

Naprężenia i odkształcenia

Example problem:

At some point on the free surface of a machine element, the Cartesian stresses were determined. Construct the Mohr's circle for this state of plane stress to determine the principal stresses and principal directions.



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 7 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 2.4 \quad \theta = 67.38^\circ$$

Literatura

- Szymański A. – **Wykłady z mechaniki gruntów i budownictwa ziemnego**
- Wiłun Z. – **Zarys geotechniki**
- Lambe T. W. Whitman R.V (1976, 1977) **Mechanika gruntów**, Tom I i II, Arkady, Warszawa
- Verruijt A. 2001. Soil Mechanics
- Coduto D.P. 1999. Geotechnical Engineering.
- Coduto D.P. 2001. Foundation design.
- Jarominiak A. 1999. Lekkie konstrukcje oporowe.
- Myślińska E. 2001. Laboratoryjne badania gruntów.
- Obrycki M., Pisarczyk S. 1999. Zbiór zadań z mechaniki gruntów.

