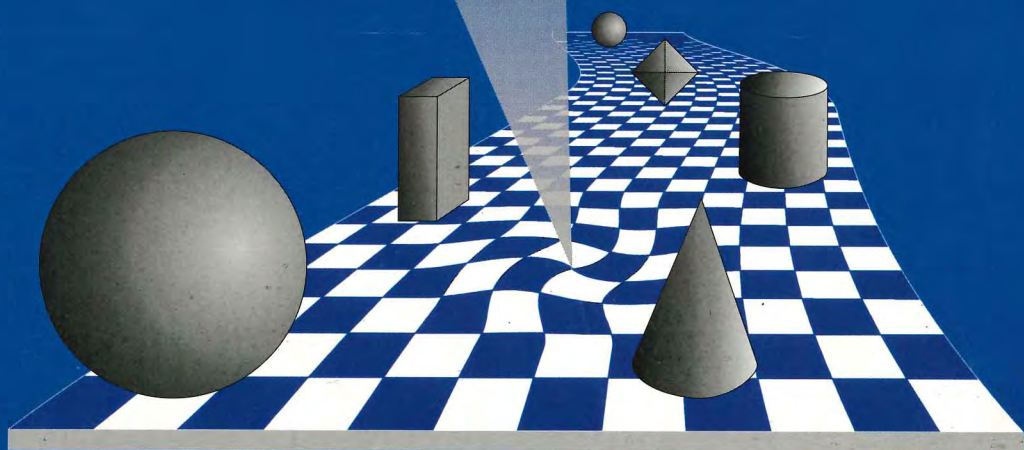


Piotr Kulczycki

Wykrywanie uszkodzeń w systemach zautomatyzowanych metodami statystycznymi

z elementami
losowego sterowania czasooptymalnego



ALFA

**Wykrywanie uszkodzeń
w systemach zautomatyzowanych
metodami statystycznymi**

**z elementami
losowego sterowania czasooptymalnego**



Piotr Kulczycki

**Wykrywanie uszkodzeń
w systemach zautomatyzowanych
metodami statystycznymi**

**z elementami
losowego sterowania czasooptymalnego**



Wydawnictwo ALFA
Warszawa 1998

Recenzenci:

dr hab. Antoni L. Dawidowicz
prof. dr hab. inż. Ryszard Koziol
prof. dr hab. inż. Krzysztof Kuźmiński

Redaktor naukowy pracy:

prof. dr hab. inż. Władysław Hejmo

Redaktor: **mgr Danuta Nikiel-Wroczyńska**

Redaktor techniczny: **Teresa Jędra**

Projekt okładki: **inż. Mariusz Baran**

Skład i łamanie: **inż. Bogusław Piątek**

Wydanie I, Warszawa 1998

ISBN: 83-7179-119-4

All rights reserved
Printed in Poland

© Copyright by Piotr Kulczycki

Tytuł dotowany przez Politechnikę Krakowską

Wydawnictwo ALFA-WERO Sp. z o.o.; 01-067 Warszawa, ul. Piaskowa 6/10

Druk i oprawa: drukarnia Wydawnictwa ALFA-WERO Sp. z o.o.

Zam. 994/98

Druk ukończono w sierpniu 1998

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA	7
1. WSTĘP	9
2. PRELIMINARIA MATEMATYCZNE	16
2.1. POJĘCIA PODSTAWOWE	16
2.2. TEORIA DECYZJI	21
2.3. ESTYMACJA PUNKTOWA	22
2.4. TESTOWANIE HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH	23
3. DETEKCJA I DIAGNOZA USZKODZEŃ	26
3.1. ESTYMATORY JĄDROWE	26
3.2. UŚCIŚLENIE ZAGADNIENIA WYKRYWANIA USZKODZEŃ	38
3.3. DIAGNOZA USZKODZEŃ, jądrowy estymator dystrybuanty	41
3.4. DETEKCJA USZKODZEŃ, jądrowy i pozycyjny estymator kwantyla ..	54
4. PREDYKCJA USZKODZEŃ	65
4.1. PROGNOZOWANIE STATYSTYCZNE	65
4.2. PREDYKCJA USZKODZEŃ	85
5. UKŁAD WYKRYWANIA USZKODZEŃ	91
6. SYMULACJA NUMERYCZNA	95
6.1. LOSOWE CZASOOPTYMALNE STEROWANIE SYSTEMAMI POZYCYJNYMI	95
6.2. WYNIKI SYMULACJI	115
7. PODSUMOWANIE	122
8. DODATKI	124
8.1. DODATEK A: dowód mocnej zgodności jądrowego estymatora dystrybuanty	124

8.2. DODATEK B: dowody mocnej zgodności estymatorów kwantyla	128
8.2.1. Dowód mocnej zgodności jądrowego estymatora kwantyla	128
8.2.2. Dowód mocnej zgodności pozycyjnego estymatora kwantyla	130
8.3. DODATEK C: dowód formalnej poprawności procedury diagnozy uszkodzeń	132
8.4. DODATEK D: dowód formalnej poprawności procedury detekcji uszkodzeń	135
8.5. DODATEK E: dowód twierdzenia o losowym sterowaniu czasooptymalnym	137
9. BIBLIOGRAFIA	151
SUMMARY	160

PRZEDMOWA

Wzrost możliwości oraz powszechność układów komputerowych stosowanych we współczesnych urządzeniach technicznych, stworzyły warunki do szybkiego rozwoju metod wykrywania uszkodzeń w systemach pracujących w czasie rzeczywistym. Początkowo metody te znalazły zastosowanie przede wszystkim w przemyśle lotniczym i nuklearnym, gdzie implikacje niewykrycia powstałej awarii daleko przekraczają i tak niemałe skutki ekonomiczne. Zakres aplikacji sukcesywnie poszerzany był na inne dziedziny techniki, zwłaszcza w przypadkach stosowania urządzeń o wysokim stopniu zautomatyzowania. Obecnie pojawia się wręcz pogląd, iż konstrukcja systemów coraz odporniejszych na uszkodzenia, o zwiększonym poziomie zabezpieczenia przed następstwami ewentualnych awarii, jest trzecim – po klasycznej technice regulacji i sterowaniu optymalnym – etapem rozwoju automatyki.

Celem niniejszej publikacji jest dostarczenie projektantowi kompletnego materiału umożliwiającego skonstruowanie utylitarnego układu wczesnego wykrywania uszkodzeń, w zakresie obejmującym:

- (1) detekcję uszkodzeń, a więc stwierdzenie występowania nieprawidłowości w stanie technicznym nadzorowanego systemu;
- (2) diagnozę uszkodzeń, czyli zlokalizowanie i identyfikację owych nieprawidłowości;
- (3) predykcję uszkodzeń, tzn. uprzedzenie o zagrożeniu ich pojawieniem się w nie-dalekiej przyszłości (wraz z przypuszczalną klasyfikacją).

Idea układu opiera się na metodyce statystyki matematycznej, ze szczególnym wykorzystaniem teorii testowania hipotez, techniki estymatorów jądrowych, a także procedur prognozowania. Proponowany algorytm przewidziany jest do realizacji w czasie rzeczywistym, podczas wykonywania przez nadzorowane urządzenie właściwych mu czynności technologicznych. Pracę ukierunkowano na problem wykrywania uszkodzeń w systemach dynamicznych będących obiektami sterowania automatycznego, jednak zasadnicza formuła ma charakter uniwersalny i może być użyta wobec szerokiej klasy zagadnień, również spoza zakresu inżynierii.

Niniejsza książka podzielona jest na dziewięć rozdziałów.

Pierwszy rozdział spełnia rolę wprowadzenia. Przedstawiono w nim koncepcje metod wykorzystywanych wspólnie przy wykrywaniu uszkodzeń w systemach

dynamicznych.

Treść rozdziału drugiego stanowią preliminaria matematyczne. Ze względu na założoną zwięzłą formę, jego funkcja ogranicza się do sprecyzowania podstawowych pojęć i uściślenia oznaczeń stosowanych w dalszej części pracy. Ewentualne szczegółowe studia ułatwić może literatura zamieszczana na końcu poszczególnych podrozdziałów.

Z uwagi na podobieństwo użytego aparatu matematycznego, detekcja i diagnoza opracowane są razem w kolejnym, trzecim rozdziale. Na początku zaprezentowano technikę estymatorów jądrowych, wykorzystywaną później do syntezy funkcji detekcji i diagnozy uszkodzeń. Zwłaszcza estymatory dystrybuanty i kwantyla będą przedmiotami szczegółowych rozważań teoretycznych.

Czwarty rozdział poświęcony jest predykcji uszkodzeń. Jako wprowadzenie przedstawiono w nim elementy prognozowania statystycznego, przede wszystkim z zastosowaniem metody regresji, a także modeli ARIMA i prognozowania bayesowskiego.

Krótki rozdział piąty dostarcza szeregu końcowych uwag dotyczących zaprojektowanego układu statystycznego wykrywania uszkodzeń.

Poprawność działania tego układu została zweryfikowana za pomocą numerycznego programu symulacyjnego. Obiektem jest nieciągły system pozycyjny poddany działaniu losowego sterowania czasooptymalnego. Jego opis oraz omówienie wyników symulacji składa się na rozdział szósty.

I wreszcie, rozdział siódmy pełni rolę podsumowania tez i wyników zawartych w niniejszej pracy.

Końcowy rozdział ósmy stanowi dodatek prezentujący dowody twierdzeń, których tezy wykorzystywane były we wcześniejszych partiach tekstu. Należy zaznaczyć, że użyty tu aparat matematyczny przekracza swym zaawansowaniem materiał poprzednich rozdziałów, w szczególności pojęcia wprowadzone w ramach preliminarium.

Naturalną konsekwencję różnorodności rozważanych zagadnień stanowi liczna bibliografia przedstawiona w rozdziale dziewiątym. Dodatkową pomocą przy ewentualnych poszukiwaniach po literaturze przedmiotowej mogą być szczegółowe uwagi bibliograficzne, zamieszczane na końcu poszczególnych podrozdziałów. Znaczna część poruszanych tematów jest niestety nieobecna w źródłach polskojęzycznych.

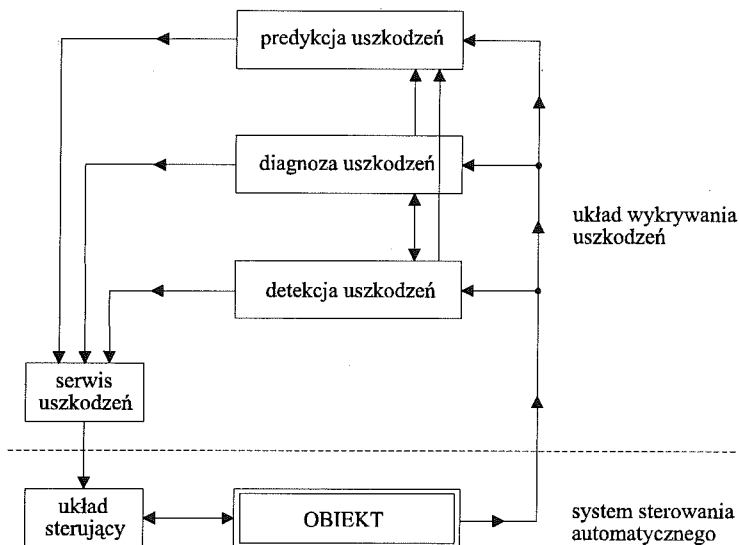
Piotr Kulczycki

Kraków, 1997.

1. WSTĘP

Problem wykrywania uszkodzeń stał się ostatnio jednym z istotniejszych zagadnień nowoczesnej automatyki. Wczesne ustalenie nieprawidłowości występujących w funkcjonowaniu sterowanego obiektu, od robota przemysłowego do reaktora nuklearnego, pozwala najczęściej uniknąć poważnych awarii czy wręcz katastrof, których skutkiem mogą być znaczne straty materialne oraz ludzkie tragedie. Z kolei, stwierdzenie rodzaju i miejsca pojawienia się owych nieprawidłowości ma zasadnicze znaczenie, zwłaszcza przy nadzorowaniu wielkich systemów, takich jak złożone instalacje chemiczne, nowoczesne jednostki pływające lub samoloty. Rangę powyższych działań potęguje czynnik psychologiczny, wyrażający się w zwiększeniu poczucia bezpieczeństwa użytkownika, a także – wynikające z podobnych przesłanek – racje prestiżowe oraz komercyjne. I wreszcie, argumenty ekonomiczne stanowią o niejednokrotnie znacznej redukcji kosztów eksploatacji, przede wszystkim poprzez zapewnienie poprawności warunków technologicznych oraz racjonalizację czynności remontowych i ograniczenie napraw.

Za uszkodzenie danego urządzenia uważany jest jego nieprawidłowy stan techniczny (stan technicznej niesprawności), uniemożliwiający albo ograniczający właściwe użytkowanie samego urządzenia lub kompleksu przemysłowego, którego jest ono częścią składową. Proces wczesnego wykrywania uszkodzeń zilustrowany został na rysunku 1.1. Badany system jest tam reprezentowany przez układ sterujący i obiekt. Jego warunki pracy są sukcesywnie sprawdzane w celu możliwie jak najszybszego stwierdzenia ewentualnych nieprawidłowości w aktualnym stanie technicznym systemu, co stanowi tzw. detekcję uszkodzeń. Jeżeli taka nieprawidłowość nie zostanie wykryta, to nie jest podejmowane żadne działanie, natomiast w przeciwnym przypadku dokonuje się diagnozy uszkodzeń, a więc lokalizacji i możliwie jak najpełniejszej ich identyfikacji. Sukcesywnie dokonywana może być również predykcja uszkodzeń, czyli określenie prawdopodobieństwa wystąpienia ich w przyszłości zarówno w sensie detekcji jak i diagnozy, a zatem prognozowana jest nie tylko sama możliwość pojawienia się nieprawidłowości, ale także jej ewentualna lokalizacja oraz identyfikacja. Wyniki detekcji, diagnozy i predykcji są podstawą do tzw. serwisu uszkodzeń, czyli dokonania modyfikacji w algorytmie sterowania, polegających na przejściu funkcji niesprawnych podzespołów lub też zmianie reżymu pracy nadzoro-



Rys. 1.1. Sterowanie automatyczne z układem wykrywania uszkodzeń.

wanego urządzenia, a w ostateczności na zatrzymaniu systemu dla dokonania naprawy, przy czym sposób zatrzymania uzależniony może być od rodzaju rozpoznanego uszkodzenia.

W stosunku do klasycznej hierarchicznej struktury sterowania automatycznego, składającej się z warstw sterowania bezpośredniego, optymalizacji i adaptacji, układ wykrywania uszkodzeń stanowi dla nich warstwę nadrzędną. Jeżeli działanie systemu jest poprawne, to warstwa ta nie ingeruje w proces sterowania. Natomiast w przypadku wystąpienia nieprawidłowości, modyfikuje ona algorytmy niższych warstw, aż do przerwania procesu technologicznego włącznie.

Procedura wykrywania uszkodzeń opiera się najczęściej na informacjach zawartych w następujących, mierzalnych bezpośrednio lub estymowanych, wielkościach:

- (1) wartościach sterowania i odpowiedzi układu;
- (2) wartościach zmiennych stanu;
- (3) wartościach parametrów nadzorowanego systemu dynamicznego;
- (4) wielkościach charakterystycznych oraz towarzyszących, takich jak wydajność urządzenia, zużycie materiałów (np. paliwa lub oleju) oraz spektrum częstotliwościowe wibracji i wytwarzanego hałasu, rozkład temperatury, itp.

Poszczególne algorytmy wykorzystują tylko niektóre wielkości, wybrane przeważnie spośród jedynie jednej z grup (1)-(4).

Przedstawione poniżej kompendium metodyki wczesnego wykrywania uszkodzeń w systemach dynamicznych ograniczone zostało z konieczności do intuicyjnego zarysu

podstawowych, wykorzystywanych do tego celu idei. Wnikliwe studia ułatwić może literatura przedmiotowa, zamieszczona na końcu niniejszego rozdziału.

Typowym reprezentantem najstarszych koncepcji była metoda wartości granicznych. Polegała ona na sukcesywnym sprawdzaniu czy aktualna wartość wybranej, charakterystycznej dla nadzorowanego urządzenia, wielkości v należy do zbioru reprezentującego jego normalne warunki pracy, czyli czy spełniona jest zależność

$$v_{\min} \leq v(t) \leq v_{\max} \quad (1.1)$$

Odpowiedni dobór analizowanych wielkości stwarzał możliwość zarówno detekcji, jak i diagnozy uszkodzeń. Z kolei poprzez kontrolę tendencji zmian, tzn. weryfikację prawdziwości relacji

$$\tilde{v}_{\min} \leq \dot{v}(t) \leq \tilde{v}_{\max} \quad (1.2)$$

metoda ta stanowiła także namiastkę predykcji. (Jej nikła skuteczność wynikała przede wszystkim z faktu, iż zakłócenia o nieznacznej nawet amplitudzie mogą mieć istotny wpływ na pochodną sygnału.) Często wprowadzano kilka poziomów aktywności kryteriów (1.1) i (1.2), przykładowo: pierwszy – podstawowy – bezpośrednio wskazujący na wystąpienie nieprawidłowości ze wszystkimi tego implikacjami oraz drugi, o znaczeniu pomocniczym, jedynie zalecający operatorom wzmożoną uwagę.

Inną spośród najstarszych procedur wykrywania uszkodzeń była nadmiarowość sprzętowa, w typowym zastosowaniu używana do zagadnienia weryfikacji poprawności pracy czujnika pomiarowego. Polegała ona na instalowaniu trzech takich samych czujników i sukcesywnym sprawdzaniu identyczności otrzymanych tym sposobem wyników. Jeżeli wskazania jednego z czujników były rażąco różne od dwóch pozostałych (detekcja uszkodzeń), to uznawano go za niesprawny (diagnoza) i do czasu naprawy jego dalsze wskazania były pomijane (serwis). Oczywiście, nadmiarowość sprzętowa znacznie zwiększała koszty, a także ciężar oraz wymiary nadzorowanego urządzenia. Zgodnie z ogólną tendencją postępu we współczesnej technice, metodyka wykrywania uszkodzeń ewoluowała w kierunku rozwoju reguł wnioskowania, a zatem przetwarzania dostępnych informacji o pracy systemu dzięki coraz większym możliwościom układów komputerowych. Realizacją tej idei jest tzw. nadmiarowość analityczna, polegająca na porównywaniu wartości kilku estymatorów tej samej wielkości fizycznej, jednak otrzymanych odmiennymi sposobami. (W szczególnym przypadku, jako jeden z estymatorów traktowany być może bezpośredni pomiar.) Warto zauważyć, że jeśli dzięki odpowiedniej koncepcji, wpływ pewnego typu zakłóceń na poszczególne estymatory jest zbliżony, to stosowany algorytm staje się odporny na te zakłócenia.

Procedura aplikacyjna metod z grupy nadmiarowości analitycznej składa się zwykle z dwóch etapów: wygenerowania wektora wielkości charakteryzujących aktualny

stan techniczny urządzenia, a następnie statystycznej weryfikacji hipotez dotyczących ewentualnej obecności uszkodzenia oraz jego charakterystyki.

Często pierwszy etap połączony jest z konstrukcją tzw. residuów. Mianowicie, jeżeli w przypadku poprawnej pracy systemu obowiązuje dowolna tożsamość

$$g(t) = h(t) \quad , \quad (1.3)$$

to residuum definiuje się jako różnicę

$$e(t) = h(t) - g(t) \quad , \quad (1.4)$$

która powinna być równa zero w normalnych warunkach pracy, w przeciwieństwie do przypadku wystąpienia nieprawidłowości, gdy relacja (1.3) przestaje być prawdziwa.

Zgodnie z koncepcją tzw. równania zgodności, residuum określa się jako różnicę między bezpośrednim pomiarem wielkości wyjściowej oraz jej estymatorem otrzymanym dzięki modelowi typu wejście-wyjście (statycznemu lub dynamicznemu) i pomiarowi wejścia.

Z kolei, stosując układ dwóch równoległych obserwatorów (lub filtrów Kalmana), ale opartych o odmienne zbiory sygnałów wyjściowych nadzorowanego systemu, porównuje się otrzymane estymatory stanu.

I wreszcie, niech dla ilustracji innego zastosowania filtru Kalmana, dany będzie układ dyskretny, którego dynamika opisana jest równaniami

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t) \quad (1.5)$$

$$y(t) = C x(t) \quad . \quad (1.6)$$

Residuum można zdefiniować następującym wzorem:

$$e(t) = \tilde{y}(t) - C \hat{x}(t|t-1) \quad , \quad (1.7)$$

gdzie \tilde{y} oznacza uzyskaną empirycznie odpowiedź układu, natomiast $\hat{x}(t|t-1)$ reprezentuje wartość estymatora stanu w chwili t otrzymanego na podstawie danych do chwili $t-1$ włącznie, dostępną bezpośrednio z filtru Kalmana. Ta szczególna postać residuum nosi nazwę innowacji.

Dla potrzeb procesu diagnozy, residuum e może być poddane liniowej transformacji

$$e^*(t) = S e(t) \quad , \quad (1.8)$$

przy czym poszczególne składowe wektora e^* przypisane są do konkretnych rodzajów uszkodzeń, a zatem wyraz $s_{i,j}$ macierzy S wskazuje w jakim stopniu i -ty typ nieprawidłowości manifestuje się w wartości j -tej współrzędnej residuum e . Współczynniki $s_{i,j}$ mają szczególnie naturalną interpretację, jeśli stosowaną koncepcję oparto na identyfi-

kacji wartości parametrów systemu dynamicznego – wiele rodzajów awarii jest bowiem ściśle związanych z jego poszczególnymi parametrami.

W praktyce wartość residuum może być różna od zera nie tylko na skutek potencjalnej obecności uszkodzenia, ale także z powodu występowania zakłóceń oraz niedokładności modelu i procedur pomiarowych. Jak wspomniano, ustalenie pochodzenia wartości residuum, wskazującego ewentualnie na niesprawność urządzenia, dokonywane jest poprzez testowanie hipotez statystycznych.

Testowanie hipotez realizuje się na podstawie danych zawartych w ustalonym – specyficznym dla każdego zagadnienia – zbiorze wielkości pomiarowych, charakteryzujących stan techniczny urządzenia. Przeważnie jest nim wektor Z , którego składowymi są wybrane współrzędne sterowania, stanu i odpowiedzi oraz wartości parametrów systemu dynamicznego, a także ich funkcje określone na przykład zgodnie z przedstawioną powyżej koncepcją residuum.

Weryfikacji poddawane są poszczególne współrzędne takiego wektora, co jest naturalne wobec diagnozy, gdy dany rodzaj uszkodzenia najczęściej rozpoznaje się na podstawie pojedynczej składowej. W przypadku detekcji przyjmowane jest natomiast, iż o stwierdzeniu nieprawidłowych warunków pracy decyduje pozytywny wynik przynajmniej jednego testu. Wynika to ze stosowanego czasem uproszczenia procesu detekcji-diagnozy do sprawdzenia jedynie kilku konkretnych, założonych typów uszkodzeń. Aby uniknąć skutków takiej nieuzasadnionej arbitralności, dla potrzeb detekcji sprowadzić można powyższy wektor do jednowymiarowej (rzeczywistej) zmiennej, która dopiero staje się podmiotem testowania. Szczególne zalety posiada przekształcenie

$$z(t) = Z(t) \text{Cov}(Z)^{-1} Z(t) , \quad (1.9)$$

gdzie $\text{Cov}(Z)$ oznacza macierz kowariancji wektora Z wyznaczoną dla poprawnych warunków pracy nadzorowanego systemu. Transformacja ta uwydatnia bardziej wiarygodne składowe, czyli takie które nie charakteryzują się w tych warunkach nadmiernymi fluktuacjami.

Doboru typu testu dokonuje się w zależności od tego jaka własność stosowanego wektora Z ulega największym zmianom w chwili wystąpienia nieprawidłowości. Niekiedy jest to równoważne stwierdzeniu która własność jest najbardziej stabilna w poprawnych warunkach pracy. I tak, statystyczne wykrywanie uszkodzeń realizuje się zwykle na podstawie testowania autokorelacji oraz wzajemnej korelacji współrzędnych, ich wartości oczekiwanej, spektrum częstotliwościowego, podobieństwa zakłóceń do szumu białego oraz przede wszystkim ilorazu wiarygodności. Testy oparte na ilorazie wiarygodności posiadają rozliczne zalety z punktu widzenia statystyki matematycznej, jakkolwiek ich zastosowanie do zagadnienia detekcji jest poważnie ograniczone wymaganiami znajomości dość szczegółowej charakterystyki ewentual-

nego uszkodzenia. Innym przykładem używanych testów może być test chi-kwadrat, czy też sekwencyjny test Walda.

Dla celów diagnozy stosowane są także procedury oparte na technice rozpoznawania obrazów, czyli w ujęciu statystycznym – zagadnieniu klasyfikacji. Poszczególne rodzaje diagnozowanych uszkodzeń są tu reprezentowane przez możliwie jak najbardziej zróżnicowane wzorce. W przypadku niesprawności urządzenia, zasadnicze zadanie polega na stwierdzeniu do którego z nich najbardziej „podobny” jest aktualny pomiar wielkości charakteryzujących jego stan techniczny. Różnorodność możliwości uściślenia owego podobieństwa stanowi o mnogości używanych metod. Aczkolwiek w podstawowym zakresie są one precyzyjnie opracowane i poparte sugestywnymi interpretacjami, to w wielu profesjonalnych zastosowaniach trudnym do zaakceptowania ograniczeniem okazuje się tu niemożność uzyskania wzorca „innego uszkodzenia” (tj. spoza skończonej ilości konkretnych, diagnozowanych rodzajów) oraz nieprzewidywalne wyniki w przypadku jednoczesnego wystąpienia wielu typów nieprawidłowości.

Odrębną oryginalnością wyróżniają się metody oparte na analizie spektralnej sygnałów uzyskiwanych z badanego obiektu. Wykryte zmiany mogą być podstawą procesu detekcji uszkodzeń, a ich specyficzne cechy – diagnozy. Szczególne miejsce zajmuje tu tzw. diagnostyka wibroakustyczna, gdzie nośnikiem informacji są drgania i hałas, nieodłączne funkcjonowaniu obiektów mechanicznych.

Powyższe metody wykrywania uszkodzeń uzupełniane są przez oryginalne rozwiązania wykorzystywane we współczesnej automatyce, takie jak sieci neuronowe, logika rozmyta i sieci Petri. Kreowane tu algorytmy nie znalazły jednak jeszcze zastosowania proporcjonalnego do ich potencjalnych możliwości.

Przedstawione powyżej koncepcje stanowią ilustracyjne kompendium metod używanych do zagadnień detekcji i diagnozy. Predykcja uszkodzeń jest jeszcze dziedziną o rutynowej, mało zróżnicowanej metodyce – projektowane procedury opierają się na technice prognozowania statystycznego lub elementach tzw. sztucznej inteligencji. Algorytmy serwisu uszkodzeń są ściśle uzależnione od specyfiki nadzorowanego urządzenia i jako bezpośrednio wynikające z uwarunkowań technologicznych znajdują się poza zakresem rozważań właściwych tematowi tej pracy.

O jakości układu wykrywania uszkodzeń świadczą następujące jego własności:

- (1) czułość, wyrażająca się minimalnym poziomem wykrywalnej nieprawidłowości;
- (2) odporność na niedokładności stosowanych modeli i zmienność charakterystyk systemu oraz zakłóceń;
- (3) ilość niewykrytych uszkodzeń;
- (4) ilość fałszywych alarmów;
- (5) szybkość działania;
- (6) umiarkowany koszt osprzętu, przystępność stosowanych metod i łatwość ob-

sługi;

(7') w przypadku detekcji: zakres wykrywalnych uszkodzeń;

(7'') w przypadku diagnozy: separacja, ilość i ścisłość rozpoznawalnych typów nieprawidłowości;

(7''') w przypadku predykcji: horyzont czasowy, precyzja i poprawność prognoz.

Nietrudno zauważyć, iż własności te są ze sobą w różny sposób skorelowane. W szczególności, punkty (1) oraz (3) są pokrewne, podobnie jak (2) i (4). Z drugiej strony praktyka wskazuje, że obie te grupy są wzajemnie przeciwstawne. Punkty (5) oraz (6) formułują zadania sprzeczne zarówno w stosunku do siebie jak i pozostałych punktów. Jeśli detekcja traktowana jest jedynie jako suma wyników sprawdzenia kilku założonych typów diagnozowanych uszkodzeń, to zasadniczo przeciwstawne są punkty (7') oraz (7''). Oczywiście, sprzeczności te wymuszają daleko posunięte kompromisy, co jest jednak powszechne w praktyce inżynierskiej.

Uwagi bibliograficzne

Metodyka wykrywania uszkodzeń w systemach dynamicznych nie posiada obecnie wyczerpującej pozycji książkowej syntetycznie obejmującej stosowane współcześnie techniki. Ogólnodostępne pozycje [11, 72, 124] są raczej wąsko specjalizowane lub nieco przestarzałe. Braku tego nie mogą zrekompensować zbiory artykułów [2, 33, 43, 144]. Obserwowany ostatnio rozwój tej dyscypliny uwidocznia się w dużej ilości publikacji przeglądowych drukowanych w czasopismach naukowych [8, 47, 59, 74, 77, 85, 114, 156] oraz materiałach konferencyjnych [48, 57, 73, 75, 76, 78, 123]. Zawierają one obszernie bibliografie, ułatwiające dostęp do stosownych źródeł. Warto rekomendacji są zwłaszcza prace [59, 77] w zakresie ogólnego rozeznania w przedmiocie oraz pozycja [43] dla zagadnień szczegółowych. Ponadto, w artykułach [9, 10, 25, 29, 30, 40, 58, 60, 66, 111, 113, 129, 132, 141, 142, 143, 148, 157, 161] oraz [23, 82] znaleźć można znaczące rezultaty dotyczące poszczególnych, przedstawionych wyżej metod wykrywania uszkodzeń.

Ogólne zasady techniki rozpoznawania obrazów prezentują książki [145] i [146, 159], podczas gdy statystyczne ujęcie jest przedmiotem monografii [28, 51]. Matematyczne aspekty przedstawia publikacja [35]. Zastosowanie tej koncepcji do zagadnień wykrywania uszkodzeń opisano w podręcznikach [72, 124], odpowiednio w rozdziałach 6 i 10. Z zakresu wibroakustycznej diagnostyki maszyn warto polecić opracowania [26] oraz [32].

Kompendium wyników najnowszych badań z zakresu wykrywania uszkodzeń stanowią materiały odbywających się co 3 lata konferencji cyklu „IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes – SAFE-PROCESS”, 1991 w Baden-Baden, 1994 w Helsinkach, 1997 w Hull oraz 2000 zapowiadana w Budapeszcie.

2. PRELIMINARIA MATEMATYCZNE

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione podstawowe pojęcia matematyczne wykorzystywane w dalszej części pracy. Rozległość materiału wymusiła zwięzłą formę prezentacji, a w elementarnych przypadkach odesłanie do literatury przedmiotowej. W podrozdziale 2.1 przedłożone są zasadnicze definicje probabilistyki opartej na teorii miary; uwagi bibliograficzne zawierają także wskazówki dotyczące dziedzin podstawowych matematyki. Podrozdziały 2.2, 2.3 i 2.4 poświęcone są kolejno poszczególnym działom statystyki: teorii decyzji, estymacji oraz testowaniu hipotez. Pozostałe pojęcia definiowane będą sukcesywnie w miarę pojawiania się konieczności ich użycia.

2.1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Symbole \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} oznaczają w niniejszej pracy odpowiednio zbiory liczb naturalnych, wymiernych i rzeczywistych.

Niech Ω będzie zbiorem niepustym. Ustalona rodzina jego podzbiorów Σ nazywana jest σ -algebrą, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\emptyset \in \Sigma \tag{2.1}$$

$$V \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus V \in \Sigma \tag{2.2}$$

$$(V_i \in \Sigma \text{ dla } i=1,2,\dots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \in \Sigma \tag{2.3}$$

Z kolei, jako miarę probabilistyczną definiuje się odwzorowanie $P: \Sigma \rightarrow [0,1]$, gdy

$$P(\Omega) = 1 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} (V_i \in \Sigma \text{ dla } i=1,2,\dots \text{ oraz } V_i \cap V_j = \emptyset \text{ gdy } i \neq j) &\Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(V_i) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Powyższa koncepcja jest naturalnym uogólnieniem klasycznego pojęcia prawdopodobieństwa opartego na zbiorach skończonych i kombinatoryce; wartości miary P tradycyjnie nazywane są **prawdopodobieństwem**.

Zbiór Ω wraz z wyróżnioną w nim σ -algebrą Σ oraz określoną na niej miarą probabilistyczną P stanowi **przestrzeń probabilistyczną** (Ω, Σ, P) . W przypadku gdy dowolny podzbiór każdego zbioru zerowej miary P należy do σ -algebry, przestrzeń taka staje się **zupełna**. Z kolei, jeśli odwzorowanie $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest mierzalne, czyli gdy dla każdego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi warunek

$$X^{-1}(U) \in \Sigma , \quad (2.6)$$

to nazywa się je **zmienną losową**. Określenie to można doprecyzować jako **n -wymiarową zmienną losową**, a dla przypadku $n=1$ – **rzeczywistą zmienną losową**. (Warto jeszcze przypomnieć fakty będące przedmiotem badań analizy matematycznej: jeżeli g jest funkcją borelowską, a X mierzalna, to złożenie $g \circ X$ jest mierzalne; funkcja (przedziałami) ciągła jest borelowska.)

A teraz, n -wymiarowa zmienna losowa X indukuje przestrzeń probabilistyczną $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P})$, gdzie \mathcal{B}^n oznacza zbiór n -wymiarowych zbiorów borelowskich, natomiast miara probabilistyczna $\mathcal{P}: \mathcal{B}^n \rightarrow [0,1]$ definiowana jest zależnością

$$\mathcal{P}(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \text{dla każdego } B \in \mathcal{B}^n \quad (2.7)$$

i określana mianem **rozkładu zmiennej losowej X** . Podstawową charakterystykę rozkładu stanowi **dystrybuanta**, czyli funkcja $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ dana wzorem

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2, \dots, X_n(\omega) < x_n\}) , \quad (2.8)$$

gdzie X_i oraz x_i oznaczają odpowiednio i -tą składową zmiennej X oraz i -tą współrzędną wektora x . Jeżeli $\mathcal{P}(B)=0$ dla każdego zbioru $B \in \mathcal{B}^n$ zerowej miary Lebesgue'a, to istnieje wtedy także **funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej X** , czyli mierzalne odwzorowanie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ takie, że

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \int_B f(x) dx \quad \text{dla każdego } B \in \mathcal{B}^n . \quad (2.9)$$

W przypadku rzeczywistej zmiennej losowej prawdziwa jest więc zależność

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy . \quad (2.10)$$

Istotną charakterystykę funkcji gęstości stanowi jej **nośnik**, czyli domknięcie tych punktów dziedziny, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Jest to zatem najmniejszy – w sensie relacji inkluzji – zbiór domknięty, którego miara probabilistyczna \mathcal{P} wynosi 1.

Podstawowe własności zmiennej losowej na ogół mogą być również reprezentowane przez jej parametry charakterystyczne, zwłaszcza przez **wartość oczekiwaną**

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) , \quad (2.11)$$

wariancję

$$Var(X) = \int_{\Omega} (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega) \quad (2.12)$$

i **kowariancję** $Cov(X)$ będącą macierzą wymiaru $n \times n$ o wyrazach

$$c_{i,j}(X) = \int_{\Omega} (X_i(\omega) - E(X_i))(X_j(\omega) - E(X_j)) dP(\omega) , \quad (2.13)$$

gdzie $\int_{\Omega} \cdot dP(\omega)$ symbolizuje całkę względem miary probabilistycznej, natomiast X_i oraz X_j oznaczają odpowiednie składowe zmiennej losowej X . Pierwiastek kwadratowy wariancji nazywany jest **odchyleniem standardowym**:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} . \quad (2.14)$$

W dalszej części pracy symbole E , Var , Cov , σ używane będą konsekwentnie w powyższym znaczeniu.

I wreszcie, zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_k są **niezależne**, jeżeli

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in B_1, X_2(\omega) \in B_2, \dots, X_k(\omega) \in B_k\}) = \\ = \prod_{i=1}^k P(\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in B_i\}) \quad \text{dla dowolnych } B_i \in \mathcal{B}^n . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Niech $T \subset \mathbb{R}$ oraz $T \neq \emptyset$.

Jako **proces stochastyczny** definiowane jest odwzorowanie $Y : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że dla każdego ustalonego $t \in T$ funkcja $Y(\cdot, t)$ spełnia warunki zmiennej losowej. Nazwę tę można doprecyzować jako **n-wymiarowy proces stochastyczny**, natomiast gdy $n = 1$ – **rzeczywisty proces stochastyczny**. Jeśli T ma postać przedziału o niepustym wnętrzu, to proces stochastyczny określa się mianem **ciągłego**, natomiast w przypadku $T = \mathbb{N}$ lub $T = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ – **dyskretnego**. Dla ustalonego czynnika losowego, funkcja $Y(\omega, \cdot)$ nazywana jest **realizacją** procesu stochastycznego Y . Zmienną t utożsamia się z czasem i dlatego jej wartości występują często pod terminem **chwil**.

Dla dowolnych $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ odwzorowanie $R_{t_1, t_2, \dots, t_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k \cdot n}$ dane wzorem

$$R_{t_1, t_2, \dots, t_k} \equiv \begin{bmatrix} Y(\cdot, t_1) \\ Y(\cdot, t_2) \\ \vdots \\ Y(\cdot, t_k) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

jest $(k \cdot n)$ -wymiarową zmienną losową. Rodzinę rozkładów zmiennych (2.16), rozważaną dla wszelkich $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$, nazywa się **rozkładami skończenie wymiarowymi**. Jeśli rozkłady k -wymiarowe nie zmieniają się przy translacji parametru t , czyli dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$ oraz $t_1, t_2, \dots, t_k, t_1 + s, t_2 + s, \dots, t_k + s \in T$ prawdziwa jest zależność

$$R_{t_1, t_2, \dots, t_k} \equiv R_{t_1 + s, t_2 + s, \dots, t_k + s}, \quad (2.17)$$

to proces Y określa się mianem **stacjonarnego w sensie rozkładów k -wymiarowych**.

Szczególnym przypadkiem procesu stochastycznego jest **biały szum**, dla którego zmienne losowe $Y(\cdot, t)$ mają zerową wartość oczekiwaną, jednakową dodatnią wariancję, a także są nieskorelowane, czyli

$$\int_{\Omega} Y(\omega, t_1) Y(\omega, t_2)^T dP(\omega) = 0 \quad \text{dla } t_1, t_2 \in T \text{ oraz } t_1 \neq t_2. \quad (2.18)$$

Jeżeli X_1, X_2, \dots, X_m oznaczają niezależne zmienne losowe o rozkładzie identycznym ze zmienną X , to stanowią one **prostą próbą losową** odpowiadającą zmiennej X . (Ponieważ w niniejszej pracy nie rozważa się innych rodzajów prób, to prosta próba losowa nazywana będzie krótko **próbą losową**.) Liczba $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wyraża liczbę próby losowej, natomiast ciąg

$$X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_m(\omega) \quad (2.19)$$

określa się mianem **wartości próby losowej**. Przy tak sformułowanej definicji, wartość próby traktować można jako m wartości zmiennej losowej X , uzyskanych za pomocą niezależnych eksperymentów reprezentowanych przez zmienne X_1, X_2, \dots, X_m . Jeżeli w praktyce wykorzystywane są jedynie konkretne wartości próby, a jej zależność od czynnika losowego nie jest przedmiotem rozważań, to ciąg (2.19), dla uproszczenia notacji, oznacza się jako

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \quad (2.20)$$

pomijając w zapisie jej zależność od czynnika ω .

Niech $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, m$) będą zmiennymi losowymi określonymi

na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Statystyką nazywa się odwzorowanie $S: \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(m \text{ czynników})} \rightarrow \mathbb{R}^k$ takie, że funkcja $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ zdefiniowana wzorem

$$U(\omega) = S(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_m(\omega)) \quad (2.21)$$

jest mierzalna. Każda funkcja borelowska może być zatem statystyką. Jeżeli statystykę stosuje się sukcesywnie wraz ze wzrostem wartości parametru t , to wówczas dla procesów stochastycznych $Y_i: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, m$) określone powyżej odwzorowanie S stanowi statystykę, gdy funkcja $U: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^k$ dana jako

$$U(\omega, t) = S(Y_1(\omega, t), Y_2(\omega, t), \dots, Y_m(\omega, t)) \quad (2.22)$$

jest mierzalna dla dowolnie ustalonego $t \in T$.

Uwagi bibliograficzne

Literatura poświęcona podstawom matematyki jest wyjątkowo liczna i wartościowa.

Użyte w pracy elementarne pojęcia algebry liniowej znaleźć można w monografiach [14, 116] oraz adresowanym do inżynierów podręczniku [121]. Jako wstęp do topologii może służyć publikacja [101]. Podstawy analizy matematycznej, a zwłaszcza teoria miary i całki, interesująco przedstawione są w książkach [86, 133]. Specyficzne zagadnienia teorii funkcji rzeczywistych znajdują się także w opracowaniu [106], natomiast wartym polecenia podręcznikiem do analizy funkcjonalnej jest pozycja [117]. Z powyższych publikacji pozyskać można definicje i własności podstawowych, używanych tu pojęć: zbioru i funkcji borelowskiej, zbioru zwarteo oraz spójnego, odwzorowania projekcji, funkcji mierzalnej i absolutnie ciągłej, powłoki wypukłej domkniętej, własności „prawie wszędzie” oraz innych elementarnych określeń wykorzystywanych w niniejszej pracy.

Ścisłe ujęcie podstawowych pojęć teorii miary probabilistycznej zaprezentowane jest w książce [15]. Temat ten opracowany jest także w podręcznikach [17, 46, 52]. Brakuje natomiast wyczerpującej polskojęzycznej pozycji z zakresu procesów stochastycznych. Różnym aspektom tego zagadnienia poświęcone są publikacje [52, 151, 158]. Spośród literatury angielskojęzycznej wyróżnić można klasyczną monografię [38] oraz opracowanie [56].

Pojęcia próby losowej oraz statystyki, jako podstawowe w zagadnieniach estymacji i testowania hipotez, są przedmiotem rozważań większości pozycji bibliograficznych zamieszczonych na końcu podrozdziałów 2.3 oraz 2.4.

I wreszcie, należy także wspomnieć o pracach encyklopedycznych [41, 64]. W przypadku zaawansowanych poszukiwań problemowych, mogą one stanowić nieocenioną pomoc, dzięki swej różnorodnej tematyce i bogatej literaturze.

2.2. TEORIA DECYZJI

Podstawowe zadanie statystycznej teorii decyzji polega na wyodrębnieniu ze zbioru wszystkich możliwych do podjęcia decyzji optymalnego elementu, jedynie na podstawie probabilistycznych informacji o otaczającej rzeczywistości (naturze), w szczególności bez znajomości jej faktycznego stanu. Niech więc dane będą:

- (1) \mathcal{N} – niepusty zbiór możliwych stanów natury;
- (2) \mathcal{D} – niepusty zbiór potencjalnych decyzji;
- (3) tzw. funkcja strat $l : \mathcal{N} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, której wartości $l(n, d)$ interpretuje się jako straty wynikłe z podjęcia decyzji d podczas gdy w rzeczywistości występuje stan n .

Stratą minimaxową nazywane jest odwzorowanie $l_m : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zdefiniowane wzorem

$$l_m(d) = \sup_{n \in \mathcal{N}} l(n, d) \quad (2.23)$$

Jeżeli ponadto na zbiorze \mathcal{N} określona jest przestrzeń probabilistyczna $(\mathcal{N}, \mathcal{S}, \mathcal{P})$ i dla każdego $d \in \mathcal{D}$ istnieje całka $\int_{\mathcal{N}} l(n, d) d\mathcal{P}(n)$, to odwzorowanie $l_b : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dane jako

$$l_b(d) = \int_{\mathcal{N}} l(n, d) d\mathcal{P}(n) \quad (2.24)$$

określa się mianem strat bayesowskich. Wtedy też, każdy element $d_m \in \mathcal{D}$ taki, że

$$l_m(d_m) = \inf_{d \in \mathcal{D}} l_m(d) \quad (2.25)$$

nosi nazwę decyzji minimaxowej, i analogicznie, dowolne $d_b \in \mathcal{D}$ spełniające warunek

$$l_b(d_b) = \inf_{d \in \mathcal{D}} l_b(d) \quad (2.26)$$

jest decyzją bayesowską, natomiast powyższe procedury nazywane są odpowiednio regułą minimaxową i bayesowską. Druga z nich minimalizuje wartość oczekiwaną strat, podczas gdy pierwsza – największą stratę jaka może nastąpić po podjęciu danej decyzji. Reguła bayesowska ma zatem charakter racjonalny, natomiast minimaxowa umożliwia asekurację przed wariantem najmniej korzystnym. Stosowanie reguły bayesowskiej wymaga dodatkowo identyfikacji miary probabilistycznej \mathcal{P} .

Uwagi bibliograficzne

Ilustracyjną formułę prezentacji statystycznej teorii decyzji znaleźć można w

podręczniku [105], natomiast w postaci matematycznie ścisłej zagadnienie to przedstawiono w książce [7] jako rozdział trzeci.

2.3. ESTYMACJA PUNKTOWA

Zasadniczym celem estymacji punktowej jest wyznaczenie konkretnej wartości będącego przedmiotem zainteresowań parametru, na podstawie pozyskanej eksperymentalnie próby losowej. Estymatorem nazywa się taką statystykę, której wartości przyjmowane są bezpośrednio jako oszacowanie badanego parametru. Wymagane jest zatem aby rozkład owej statystyki-estymatora bezpośrednio był uzależniony od analizowanego parametru, co umożliwi wnioskowanie o jego wartości. Tak więc podstawowe zadanie estymacji punktowej polega na wyznaczeniu odpowiedniej postaci estymatora, a następnie – po uzyskaniu wartości próby – obliczeniu jego wartości, przyjmowanej za wartość danego parametru.

Jedną z wielu technik wyznaczania postaci estymatorów opiera się na statystycznej teorii decyzji, przedstawionej w poprzednim podrozdziale. Rozważany parametr traktowany jest tu jako stan natury, natomiast wartość jego estymatora pełni rolę decyzji. Dzięki odpowiedniej postaci funkcji strat możliwe staje się uwzględnienie konsekwencji, nieuniknionych przecież w praktyce, błędów estymacji.

W zależności od uwarunkowań aplikacyjnych, wobec estymatorów formułowane są różnorodne wymagania normujące podstawowe ich własności.

Niech \hat{b} oznacza estymator parametru $b \in \mathbb{R}$, natomiast m – licznosc próby losowej.

Jeżeli bez względu na prawdziwą wartość parametru b :

$$E(\hat{b}) = b \quad , \quad (2.27)$$

to estymator nazywany jest **nieobciążonym**, natomiast spełnienie warunku

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(\hat{b}) = b \quad (2.28)$$

stanowi o jego **asymptotycznej nieobciążoności**. Podobnie, estymator określa się mianem **mocno zgodnego** gdy

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{b}(\omega) = b\}) = 1 \quad (2.29)$$

oraz **zgodnego** jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ prawdziwe jest, iż

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |\hat{b}(\omega) - b| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad . \quad (2.30)$$

Własność nieobciążoności implikuje wprost asymptotyczną nieobciążoność, podobnie jak mocna zgodność stanowi również o zgodności. Z kolei, jeśli

$$E(\hat{b}) < \infty, \quad (2.31)$$

to estymator zgodny jest także asymptotycznie nieobciążony.

W praktyce, nieobciążoność istotna bywa zwłaszcza przy małej liczności próby losowej, natomiast w przeciwnym przypadku, jako podstawową uznaje się własność zgodności. Asymptotyczna nieobciążoność jest najsłabszym wymaganiem formułowanym wobec stosowanych estymatorów.

Powyższe pojęcia łatwo uogólnia się na przypadek estymacji funkcji $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dla ustalonego argumentu x jej wartość traktowana jest bowiem tak jak rozważany wcześniej parametr b , tzn.

$$\mathcal{L}(x) = b. \quad (2.32)$$

Estymator funkcji może zatem posiadać własność (mocnej) zgodności lub (asymptotycznej) nieobciążoności w dowolnym punkcie dziedziny lub też pewnego jej podzbioru.

Uwagi bibliograficzne

Teoria estymacji jest przedmiotem licznej literatury o zróżnicowanym sposobie prezentacji i stopniu zmatematyzowania. Klasyczną publikację stanowi monografia [102]. Szczególnie użytecznymi powinny okazać się również podręczniki [52, 63], a uzupełnieniem mogą być prace [125, 139]. W sposób matematycznie ścisły zagadnienie to prezentuje także książka [7]; w rozdziale czwartym szczegółowo rozważane są tam estymatory otrzymane z zastosowaniem reguł teorii decyzji.

2.4. TESTOWANIE HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH

Każda działalność poznawcza polega zasadniczo na formułowaniu hipotez, a następnie weryfikowaniu ich prawdziwości. Poszczególne dyscypliny wykształciły w tym celu swoje specyficzne sposoby postępowania, jednak ścisły aparat stworzyła jedynie, szczególnie do tego predestynowana, statystyka matematyczna. Stąd też większość zagadnień weryfikacyjnych z zakresu współczesnej techniki, ekonomii i biologii formułuje się obecnie w sposób umożliwiający wykorzystanie teorii testowania hipotez statystycznych. Wymagana jest wtedy dostępność zmiennej losowej X , której rozkład byłby uzależniony od stanu prawdy-fałszu rozważanego przypuszczenia, a badanie tego rozkładu stanowiłoby podstawę do ostatecznego odrzucenia albo przy-

jęcia testowanego domysłu.

Hipotezą statystyczną nazywane jest dowolne przypuszczenie weryfikowane na podstawie wartości próby losowej. Regułę postępowania, która wszystkim możliwym wartościom próby jednoznacznie przyporządkowuje decyzję o przyjęciu albo odrzuceniu weryfikowanej hipotezy (lub w ogólnym przypadku także o niepodjęciu żadnej z tych decyzji) nazywa się **testem statystycznym**, natomiast samą procedurę – **testowaniem hipotezy statystycznej**. Podstawę takiego testu stanowi statystyka S , która w zależności od tego, czy testowana hipoteza jest prawdziwa czy fałszywa, przyjmuje z możliwie dużym prawdopodobieństwem wartości należące do rozłącznych zbiorów: zbioru odrzucenia (krytycznego) $A \subset \mathbb{R}^k$ w przypadku gdy testowana hipoteza jest fałszywa oraz zbioru przyjęcia $B \subset \mathbb{R}^k$ jeśli hipoteza jest prawdziwa. Zbiór przyjęcia przeważnie określa się jako dopełnienie zbioru krytycznego:

$$B = \mathbb{R}^k \setminus A . \quad (2.33)$$

W podstawowym przypadku $k = 1$, jeżeli o fałszywości testowanej hipotezy świadczą małe wartości statystyki testowej, to zbiór krytyczny przyjmuje się w postaci $A = (-\infty, a]$, czyli jako **lewostronny zbiór krytyczny**, w przeciwnym razie jako **prawostronny zbiór krytyczny** $A = [a, \infty)$, przy czym liczba a nazywana jest **wartością krytyczną**. Ostatecznie, jeżeli x_1, x_2, \dots, x_m reprezentują próbę losową, to testowana hipoteza zostaje odrzucona gdy

$$S(x_1, x_2, \dots, x_m) \in A \quad (2.34)$$

lub też przyjęta jeśli

$$S(x_1, x_2, \dots, x_m) \in B . \quad (2.35)$$

W ogólnym przypadku, dopuszczającym niespełnienie zależności (2.33), możliwe staje się również niepodjęcie żadnej z powyższych decyzji, co najczęściej implikuje dalsze badania przedmiotowe.

Poza hipotezą testowaną H , wyróżnić można także **hipotezę alternatywną** K , przyjmowaną jako prawdziwą w przypadku odrzucenia hipotezy H . Typowa hipoteza alternatywna jest zaprzeczeniem hipotezy testowanej: $K = \sim H$.

Jak wynika z definicji hipotezy statystycznej, nie można wykazać z całą pewnością jej prawdziwości lub fałszywości, gdyż podstawą wnioskowania jest tu próba losowa. Możliwe staje się zatem podjęcie poprawnej decyzji albo też popełnienie jednego z dwóch błędów: odrzucenia hipotezy prawdziwej, czyli tzw. **błąd pierwszego rodzaju**, lub przyjęcia hipotezy fałszywej – **błąd drugiego rodzaju**.

Postać statystyki testowej i zbioru krytycznego oraz licznosc próby wynikają zazwyczaj z samej istoty i uwarunkowań rozważanego problemu. W tej sytuacji prawdopodobieństwa błędów zależą już bezpośrednio od przyjętej wartości krytycznej,

przy czym na ogół ewentualna jej zmiana, dokonana w celu zmniejszenia prawdopodobieństwa jednego rodzaju błędu, powoduje bezpośrednio powiększenie prawdopodobieństwa drugiego. W praktyce często stosuje się tzw. testy istotności, w których wymaga się aby prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju było równe założonemu poziomowi istotności α , natomiast nie kontroluje się bezpośrednio prawdopodobieństwa błędu drugiego rodzaju. W wyniku takiego postępowania można odrzucić testowaną hipotezę, lecz nie podejmuje się decyzji o jej przyjęciu, gdyż wówczas zachodziłoby niebezpieczeństwo popełnienia niekontrolowanego tu błędu drugiego rodzaju. Jednakże w niektórych zastosowaniach sam brak decyzji o przyjęciu hipotezy, a więc odstąpienie od decyzji i w konsekwencji zaniechanie jakiegokolwiek działania, jest całkowicie wystarczający z aplikacyjnego punktu widzenia. (Warto zauważyć, że w przypadku stosowania testów istotności określenie zbioru przyjęcia oraz hipotezy alternatywnej często może być czynnością zbędną – nie podejmuje się bowiem decyzji o przyjęciu testowanej hipotezy, a zależne od hipotezy alternatywnej prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju jest poza zakresem rozważań.)

Duże znaczenie w procesie projektowania testu statystycznego ma założona wartość poziomu istotności $\alpha \in (0,1)$. Wybór jest właściwie arbitralny, aczkolwiek powinien on uwzględniać ekonomiczne konsekwencje ewentualnych błędów pierwszego i drugiego rodzaju. Przeważnie używane są wartości 0,01, 0,02, 0,05 – jako podstawowa, i 0,1; znacznie rzadziej 0,005 lub 0,2. W trakcie stosowania testu możliwa jest adaptacja algorytmu polegająca na zmianach wartości tego parametru.

Powyższa, klasyczna koncepcja testowania hipotez jest zgodna z teorią Neymana-Pearsona. Bardziej wyrafinowana formuła Walda oparta została na statystycznej teorii decyzji przedstawionej w podrozdziale 2.2. W typowym przypadku zakłada się tu dwuelementowy zbiór stanów natury – są one charakteryzowane odpowiednio przez hipotezy: testowaną H_0 i alternatywną H_1 . Z kolei przyjęcie hipotezy testowanej albo alternatywnej uznawane jest jako dwie możliwe do podjęcia decyzje. Poprzez odpowiednie zdefiniowanie postaci funkcji strat są tu dodatkowo uwzględniane konsekwencje ewentualnych błędów pierwszego i drugiego rodzaju.

Uwagi bibliograficzne

Testowanie hipotez posiada wyjątkowo bogatą literaturę. Szczególnie warta polecenia jest książka [63]. Praca [37] stanowi bogate kompendium najczęściej stosowanych testów. Monografia [7] ujmuje temat w sposób matematycznie ścisły. Klasycznymi podręcznikami są pozycje [103, 125, 139]. W ostatnim rozdziale trzeciej z nich oraz w publikacji [105] przedstawione jest zagadnienie testowania hipotez z wykorzystaniem elementów statystycznej teorii decyzji.

3. DETEKcja I DIAGNOZA USZKODZEŃ

Przedmiotem rozważań niniejszego rozdziału jest zagadnienie statystycznej detekcji i diagnozy uszkodzeń. W podrozdziale 3.1 przedstawione są elementy teorii estymatorów jądrowych, które w podrozdziale 3.3 zostaną użyte do zaprojektowania układu diagnozy, natomiast w podrozdziale 3.4 – detekcji uszkodzeń. Treść podrozdziału 3.2 stanowi uściślenie rozważanego tu problemu.

3.1. ESTYMATORY JĄDROWE

Jednym z podstawowych zagadnień pojawiających się w trakcie stosowania metod probabilistycznych jest zadanie estymacji funkcji gęstości rozkładu zmiennej losowej. Klasyczny sposób polega na założeniu typu rozkładu badanej zmiennej (co można dodatkowo uwiarygodnić poprzez testowanie stosowanej hipotezy), a następnie wyznaczeniu parametrów definiujących tę funkcję. Są to tzw. metody parametryczne. Ich zasadniczą zaletą jest prostota, zarówno od strony teoretycznej jak i obliczeniowej, oraz przede wszystkim powszechna osiągalność w literaturze przedmiotowej i różnorodność opracowanych algorytmów. Istotną wadą, natomiast, polega na arbitralności założenia dotyczącego typu rozkładu oraz nikłym zakresie możliwego wyboru, ograniczającego się w praktyce do kilkunastu możliwości. Ostatnia niedogodność jest szczególnie kłopotliwa w przypadku wielowymiarowych zmiennych losowych.

Powyższej wady pozbawione są metody nieparametryczne, w których nie formuluje się arbitralnych założeń dotyczących typu badanej zmiennej, a proces ustalenia występujących tam funkcji i współczynników, wspomagany jest przez kryteria optymalizacyjne. Ze względu na ekspansję techniki komputerowej, coraz szersze zastosowanie znajdują należące do tej grupy tzw. estymatory jądrowe. Stanowią one przedmiot rozważań niniejszego podrozdziału.

Niech dana będzie n -wymiarowa zmienna losowa X , której rozkład posiada funkcję gęstości f . Jej estymator $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ wyznaczany będzie w oparciu o wartości m -elementowej próby losowej x_1, x_2, \dots, x_m , które interpretuje się jako

doświadczalnie uzyskane, w trakcie niezależnych eksperymentów, realizacje zmiennej X . (Zgodnie z uwagą poczynioną w poprzednim rozdziale, ich zależność od czynnika losowego ω nie będzie *explicitie* zaznaczana.) Estymator jądrowy, w swej podstawowej formie, definiowany jest wzorem

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{mh^n} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad (3.1)$$

gdzie

$$m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

$$h > 0, \quad (3.3)$$

natomiast mierzalna funkcja $K: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ spełnia warunki

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dx = 1 \quad (3.4)$$

$$K(x_1) = K(x_2) \quad \text{dla } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \text{ takich że } \|x_1\| = \|x_2\| \quad (3.5)$$

$$K(0) \geq K(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

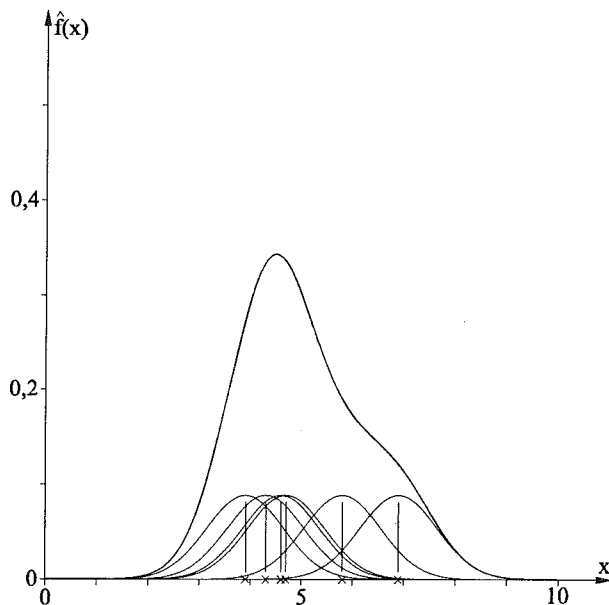
Odwzorowanie K reprezentuje zatem funkcję gęstości miary probabilistycznej, radialnie symetryczną względem zera i posiadającą w tym punkcie maksimum globalne. Jest ono nazywane jądrem (przez analogię do jądra operatora całkowego), natomiast współczynnik h określa się mianem parametru wygładzania. (Dla potrzeb szczególnych rozważań teoretycznych czynione są ponadto różnorodne dodatkowe założenia. Ponieważ mają one charakter tak ogólny, że spełniają je wszystkie stosowane w praktyce typy jąder, zostaną w niniejszym tekście pominięte.)

Interpretacja powyższej definicji zilustrowana jest na rysunku 3.1. W przypadku pojedynczej wartości x_i , funkcja K (przesunięta o wektor x_i oraz przeskalowana współczynnikiem h) reprezentuje oszacowanie rozkładu zmiennej losowej X po doświadczalnym pozyskaniu realizacji x_i . Dla m wyników niezależnych eksperymentów x_1, x_2, \dots, x_m , oszacowanie to przyjmuje postać sumy. Współczynnik $\frac{1}{mh^n}$ normuje uzyskaną funkcję w celu zagwarantowania warunku

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) dx = 1, \quad (3.7)$$

wymaganego wobec miary probabilistycznej.

Najczęściej stosowane typy jąder przedstawione są na rysunku 3.2. Szczególną uwagę warto zwrócić na jądra jednostajne, kwadratowe, a zwłaszcza na jądro normal-



Rys. 3.1. Jądrowy estymator funkcji gęstości rozkładu rzeczywistej zmiennej losowej ($h=0,4$).

ne dane wzorem

$$K_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2} \quad (3.8)$$

Wartość parametru wygładzania h ma podstawowe znaczenie dla jakości estymacji (rys. 3.1 i 3.3). Zbyt mała jego wartość (rys. 3.3a) powoduje pojawienie się wielu ekstremów lokalnych estymatora \hat{f} , co jest sprzeczne z rzeczywistymi własnościami realnych populacji. Z drugiej strony, za duże wartości parametru h skutkują nadmiernym wygładzeniem, maskującym specyficzne cechy badanego rozkładu (rys. 3.3b).

Wyboru postaci jądra oraz wartości parametru wygładzania dokonać można na podstawie kryterium minimum błędu średniokwadratowego, a ściślej – wartości oczekiwanej z całki kwadratu błędu. Zakłada się wtedy dodatkowo warunek $f \in \mathcal{C}^2$, a także, iż funkcje f oraz f'' są ograniczone. Niech również dane będą następujące skończone wielkości:

$$U(K) = \int_{\mathbb{R}^n} y_i^2 K(y) dy \quad (3.9)$$

$$V(K) = \int_{\mathbb{R}^n} K(y)^2 dy \quad (3.10)$$

Typ jądra	$K(x)$
jednostajne	$\frac{1}{k_n}$ gdy $\ x\ \leq 1$ 0 gdy $\ x\ > 1$
trójkątne	$\frac{n(n+1)}{k_n}(1-\ x\)$ gdy $\ x\ \leq 1$ 0 gdy $\ x\ \geq 1$
kwadratowe	$\frac{n+2}{2k_n}(1-\ x\ ^2)$ gdy $\ x\ \leq 1$ 0 gdy $\ x\ \geq 1$
normalne	$(2\pi)^{-n/2} e^{-\ x\ ^2/2}$
gamma	$\frac{1}{k_n \Gamma(n)} e^{-\ x\ }$

gdzie:

- k_n jest objętością n-wymiarowej kuli jednostkowej: $k_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$;
- Γ jest funkcją Eulera $\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$;

dla występujących powyżej przypadków jej wartość można obliczyć rekurencyjnie ze wzorów

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

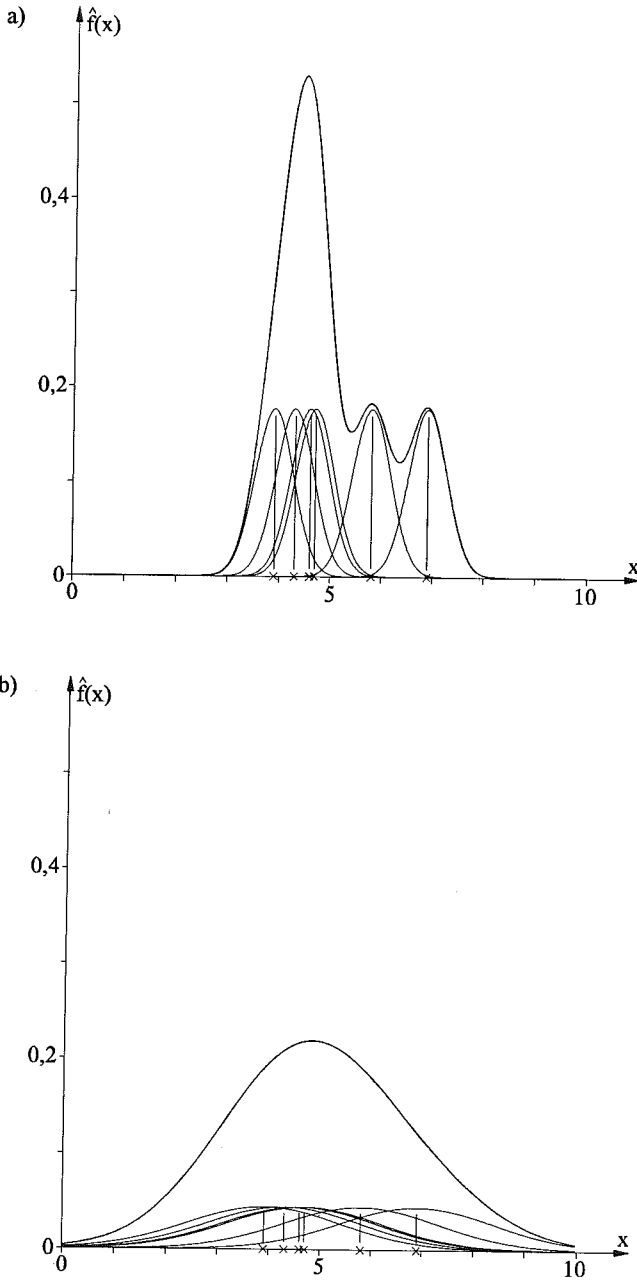
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{jeżeli } \operatorname{Re}(z) > 0 .$$

Rys. 3.2. Najczęściej stosowane w praktyce typy jąder.

$$W(f) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla^2 f(y))^2 dy \quad (3.11)$$

$$d(n) = \frac{4+n}{4n^{n/(n+4)}} , \quad (3.12)$$

gdzie y_i reprezentuje dowolną współrzędną n-wymiarowego wektora y , natomiast ∇^2 oznacza hesjan, czyli wyznacznik macierzy drugich pochodnych cząstkowych. Minimum funkcjonułu średniokwadratowego J występuje dla



Rys. 3.3. Jądrowy estymator funkcji gęstości rozkładu rzeczywistej zmiennej losowej:
a) dla nadmiernie pomniejszonej wartości parametru wygładzania ($h=0,2$),
b) dla nadmiernie powiększonej wartości parametru wygładzania ($h=0,8$).

$$h_o = \left(\frac{n V(K)}{U(K)^2 W(f) m} \right)^{1/(n+4)}, \quad (3.13)$$

a jego wartość wynosi

$$J(h_o) = d(n) \left(\frac{U(K)^{2n} V(K)^4 W(f)^n}{m^4} \right)^{1/(n+4)}. \quad (3.14)$$

Zależność (3.14) dostarcza wskazań dotyczących wyboru typu jądra, czyli postaci funkcji K . Zgodnie z tym wzorem, minimalizowany błąd średniokwadratowy jest proporcjonalny do wyrażenia $(U(K)^{2n} V(K)^4)^{1/(n+4)}$. Najmniejszą wartość osiąga ono dla jądra kwadratowego, jednak ze względu na pierwiastek stopnia $n+4$ różnice wobec pozostałych są nieznaczne. W związku z tym pojawia się możliwość aby przy specyfikacji funkcji K , bez znaczącego pogorszenia statystycznej jakości, uwzględnić przede wszystkim własności otrzymanego estymatora, np. klasę regularności, ograniczoną nośnika, prostotę obliczeniową lub też inne cechy istotne z punktu widzenia konkretnego problemu. W wielu zastosowaniach najkorzystniejsze cechy charakteryzują jądro normalne. Uzyskany z jego użyciem estymator jest bowiem klasy \mathcal{G}^∞ i ponadto ma dodatnie wartości.

Równość (3.13) stanowi natomiast podstawę przy wyznaczaniu wartości parametru wygładzania h . Bezpośrednie stosowanie tego wzoru napotyka wszakże na trudności, gdyż wyrażenie $W(f)$ zależy od estymowanej, a więc nieznannej *a priori*, funkcji gęstości.

Przybliżoną wartość parametru wygładzania można uzyskać przyjmując, że w przypadku standardowego rozkładu normalnego:

$$W(f) = (2\pi^{1/2})^{-n} \left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} \right). \quad (3.15)$$

Wtedy, ze wzoru (3.13), otrzymuje się wprost

$$h_o^* = \left(\frac{V(K)}{U(K)^2} \pi^{n/2} \frac{2^{n+2}}{n+2} \frac{1}{m} \right)^{1/(n+4)}, \quad (3.16)$$

przy czym dla jądra normalnego obowiązuje zależność

$$\frac{V(K_n)}{U(K_n)^2} \pi^{n/2} \frac{2^{n+2}}{n+2} = \frac{4}{2n+1}. \quad (3.17)$$

W ogólnym jednak przypadku, wyznacza się wartość h_o^* realizującą minimum funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ zdefiniowanej równością

$$g(h) = \frac{1}{m^2 h^n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \tilde{K} \left(\frac{x_j - x_i}{h} \right) + \frac{2}{m h^n} K(0) , \quad (3.18)$$

gdzie

$$\tilde{K}(x) = K^{*2}(x) - 2K(x) , \quad (3.19)$$

przy czym K^{*2} oznacza kwadrat spłotowy funkcji K , tzn.

$$K^{*2}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(y) K(x-y) dy . \quad (3.20)$$

Dla jądra normalnego kwadrat ten wyraża się wzorem

$$K_n^{*2}(x) = (4\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/4} . \quad (3.21)$$

W praktyce wielkość h_0 stanowi wystarczające przybliżenie optymalnej w sensie średniokwadratowym wartości parametru wygładzania h_0 .

Jeżeli wartość parametru wygładzania h uzależnia się od liczności próby m tak aby prawdziwe były zależności

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0 \quad (3.22)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m h^n = \infty , \quad (3.23)$$

to estymator jądrowy jest mocno zgodny, a zatem również zgodny, w każdym punkcie ciągłości funkcji f . Wzór (3.22) stanowi, iż w miarę jak powiększa się ilość doświadczalnie pozyskanych wartości zmiennej losowej, wpływ każdej z nich powinien mieć coraz bardziej lokalny charakter, jednak proces ten ogranicza warunek (3.23). Jeżeli wartość parametru h określana jest w oparciu o wzory (3.13), (3.16) lub (3.18), to zależności (3.22)–(3.23) są spełnione. W przypadku estymatorów jądrowych własność zgodności ma podstawowe znaczenie, gdyż zwykle są one stosowane przy dużych licznosciach próby losowej.

Jak wynika z definicji (3.1), parametr wygładzania h ma jednakowy wpływ na poszczególne składowe badanej zmiennej losowej. Ze względu na różne – w ogólnym przypadku – skale współrzędnych, optymalna wartość tego parametru najczęściej okazuje się jednak za mała w przypadku niektórych ze składowych, a dla innych jest zbyt duża. W związku z tym rekomendować można dokonanie liniowej transformacji

$$X \equiv R Y , \quad (3.24)$$

gdzie

$$R = \sqrt{\text{Cov}(X)} , \quad (3.25)$$

przy czym pierwiastek macierzy $Cov(X)$ definiuje się w sposób naturalny jako taką macierz dodatnio półokreśloną, która pomnożona przez samą siebie jest równa $Cov(X)$.

Macierz kowariancji jest symetryczna, a zatem taką jest również macierz R . Numeryczne wyznaczenie pierwiastka macierzy symetrycznej można więc zrealizować poprzez rozwiązanie układu $\frac{n(n+1)}{2}$ równań kwadratowych. Analitycznie pierwiastek taki uzyskuje się przekształcając macierz kowariancji do postaci kanonicznej Jordana, będącej w tym przypadku macierzą diagonalną, trywialnie obliczając jej pierwiastek i stosując przekształcenie odwrotne.

Uproszczona wersja transformacji (3.24) polega na ograniczeniu macierzy R do jej diagonalii:

$$R^{\sim} = [r_{i,j}^{\sim}] = \begin{cases} \sqrt{Var(X_i)} & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}, \quad (3.26)$$

gdzie X_i oznacza i -tą składową zmiennej losowej X .

Jeżeli transformacja liniowa definiowana jest przez macierz R^{\sim} , to wariancje wszystkich współrzędnych zmiennej losowej Y są równe jedności. W przypadku macierzy R , współrzędne te są również liniowo niezależne (rys. 3.4).

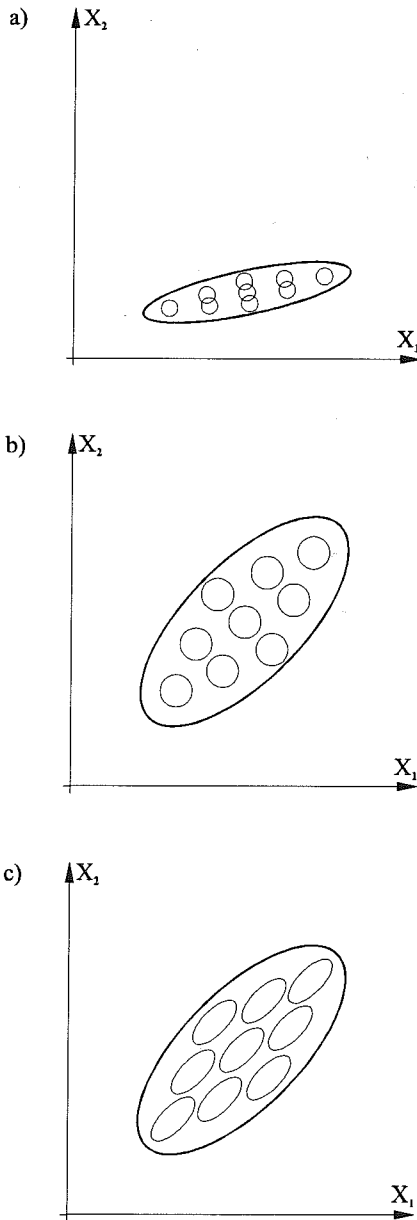
Poza zdegenerowanymi przypadkami, macierze R oraz R^{\sim} są nieosobliwe. Osobliwość macierzy R^{\sim} świadczy bowiem o tym, że co najmniej jedna ze składowych zmiennej losowej X ma rozkład jednopunktowy, a więc bez zmniejszenia ogólności rozważań probabilistycznych może być ona usunięta. Podobnie jest w przypadku osobliwości macierzy R , co ma miejsce jedynie wtedy gdy składowe zmiennej X są liniowo zależne, a więc niektóre z nich można pominąć.

Stosowanie transformacji (3.24) prowadzi do konstrukcji estymatora

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{mh^n \det(R)^n} \sum_{i=1}^m K\left(R^{-1} \frac{x - x_i}{h}\right), \quad (3.27)$$

równoważnego definicji (3.1) gdyby R było macierzą jednostkową. Analogiczny wzór obowiązuje również dla macierzy R^{\sim} . Warto zauważyć, że w przypadku tej ostatniej, trywialna jest zarówno sama jej identyfikacja, jak i wyznaczenie macierzy odwrotnej oraz obliczenie wyznacznika.

Podobne rozważania prowadzą do koncepcji tzw. zmodyfikowanego parametru wygładzania. Otóż, ekstremalne wartości zmiennej losowej w większości zagadnień charakteryzują się małym prawdopodobieństwem, a zatem w obszarach tych nośnik estymatora jądrowego wyznaczony w oparciu o stałą wartość parametru h może nawet nie być spójny – pozostaje to w sprzeczności z własnościami rzeczywistych populacji. Konstrukcję estymatora ze zmodyfikowanym parametrem wygładzania realizuje się w



Rys. 3.4. Relacja między rozkładem dwuwymiarowej zmiennej losowej $X \equiv [X_1, X_2]^T$ i kształtem jądra:

- a) przy braku transformacji,
- b) gdy transformacja określona jest przez macierz \tilde{R} zdefiniowaną wzorem (3.26),
- c) gdy transformacja określona jest przez macierz R daną zależnością (3.25).

sposób następujący:

- (1) wyznaczany jest estymator jądrowy \hat{f} zgodnie z przedstawionym wcześniej schematem;
- (2) określone są parametry modyfikujące $s_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) postaci

$$s_i = \left(\frac{\hat{f}(x_i)}{s^\sim} \right)^{-c}, \quad (3.28)$$

gdzie $c \in [0, 1]$, natomiast s^\sim jest średnią geometryczną liczb $\hat{f}(x_1), \hat{f}(x_2), \dots, \hat{f}(x_m)$, daną w postaci równania logarytmicznego jako

$$\log(s^\sim) = m^{-1} \sum_{i=1}^m \log(\hat{f}(x_i)) ; \quad (3.29)$$

- (3) definiuje się estymator jądrowy ze zmodyfikowanym parametrem wygładzania za pomocą wzoru

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{mh^n} \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i^n} K\left(\frac{x-x_i}{hs_i}\right). \quad (3.30)$$

W rezultacie wprowadzenia powyższej koncepcji, obszary w których estymator przyjmuje małą wartość zostają dodatkowo wygładzone, w przeciwieństwie do fragmentów jego dużych wartości, gdzie polepsza się charakteryzacja specyficznych cech rozkładu (rys. 3.5). Rozważania wynikające z kryterium minimum błędu średniokwadratowego wskazują na wartość

$$c = \frac{1}{2}. \quad (3.31)$$

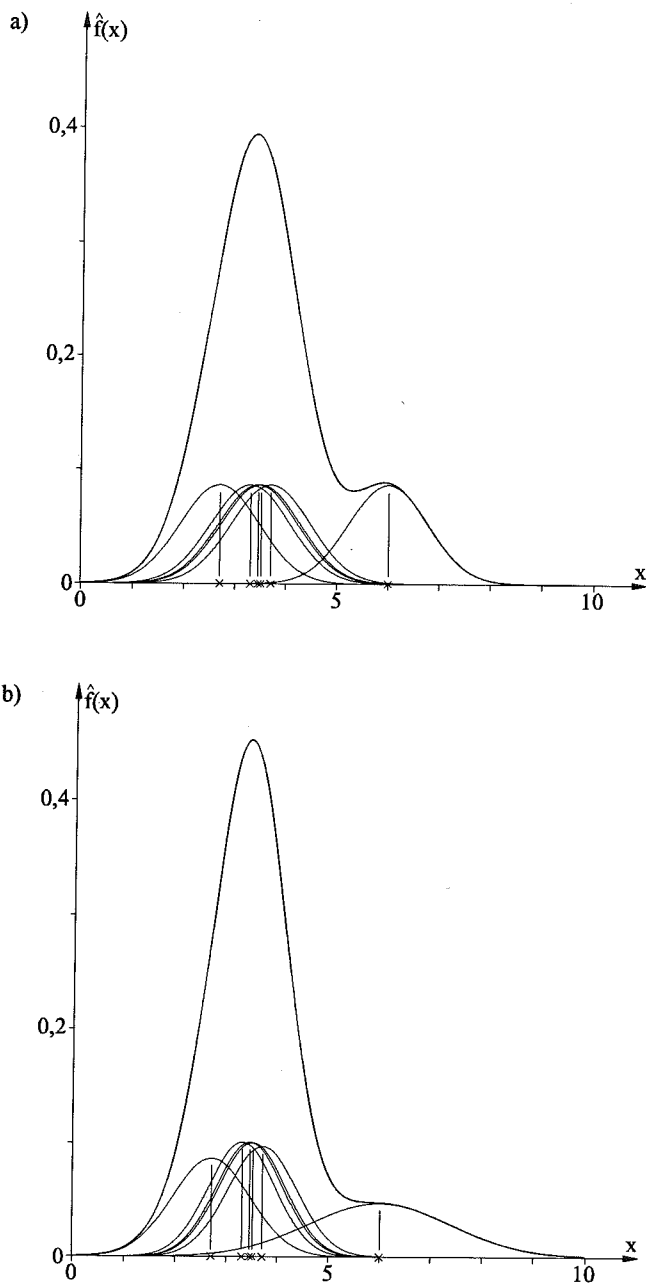
Definicja (3.1) jest szczególnym przypadkiem wzoru (3.30) gdy $c = 0$, co implikuje $s_i \equiv 1$.

Jeżeli koncepcja modyfikacji parametru wygładzania stosowana jest wraz z transformacją liniową, to łącząc wzory (3.27) i (3.30) otrzymuje się następującą formę estymatora jądrowego:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{mh^n \det(R)^n} \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i^n} K\left(R^{-1} \frac{x-x_i}{hs_i}\right) \quad (3.32)$$

oraz analogiczną postać w przypadku macierzy R^\sim .

Istotną cechą estymatora ze zmodyfikowanym parametrem wygładzania jest jego mała wrażliwość na dobór stałej h . Cecha ta jest wyjątkowo korzystna i w przypadku stosowania takiego estymatora wraz z transformacją liniową przyjęcie wartości h_0^* określonej wzorem (3.16) w praktyce najczęściej okazuje się wystarczające.



Rys. 3.5. Jądrowy estymator funkcji gęstości rozkładu rzeczywistej zmiennej losowej:

a) bez modyfikacji parametru wygładzania,

b) z modyfikacją parametru wygładzania.

I wreszcie, ostatnim parametrem wymagającym uściślenia jest liczność próby m , a szczególnie zależność tej wielkości od wymiaru badanej zmiennej losowej. Rysunek 3.6 przedstawia minimalną licznosc próby m_* niezbędną w celu zapewnienia 10-procentowej dokładności w punkcie zero dla standardowego rozkładu normalnego. Ze względu na szczególną regularność jego funkcji gęstości oraz znaczny liberalizm kryterium 10-procentowej dokładności, wartości uwidocznione na rysunku 3.6 wydają się stanowić bezwzględne minimum (sugeruje to na przykład $m_* = 4$ dla $n = 1$). Jednak dzięki możliwościom obecnych układów komputerowych oraz zautomatyzowaniu procesów metrologicznych, rosnąca gwałtownie minimalna licznosc próby nie musi stanowić w zastosowaniach współczesnej inżynierii istotnej przeszkody, nawet przy wymiarze badanej zmiennej losowej zbliżonym do 10. Ze statystycznego punktu widzenia, wskazana jest jak największa licznosc próby, aczkolwiek w praktyce konieczny jest pewien kompromis uwzględniający aspekty obliczeniowe, w szczególności ograniczenia czasowe.

n	m_*
1	4
2	19
3	67
4	223
5	768
6	2790
7	10700
8	43700
9	187000
10	842000

Rys. 3.6. Minimalna licznosc próby losowej zapewniająca 10-procentową dokładność w punkcie zero dla standardowego rozkładu normalnego.

Podsumowując: treść niniejszego podrozdziału dostarcza pełnego zestawu reguł pozwalających wyznaczyć jądro estymator funkcji gęstości rozkładu n -wymiarowej zmiennej losowej. Następuje to zgodnie z poniższym schematem:

- (1) należy uzyskać niezależnie wartości badanej zmiennej losowej x_1, x_2, \dots, x_m , przy czym minimalna ich liczba podana jest na rysunku 3.6;
- (2) wyboru typu jądra (postaci funkcji K) warto dokonać w oparciu o uwarunkowa-

- nia problemu, do rozwiązania którego estymator będzie stosowany; szczególnie rekomendowane jest jądro normalne (3.8);
- (3) parametr wygładzania h można wyznaczyć znajdując wartość h_o^{\sim} minimalizującą funkcję (3.18); w przypadku stosowania modyfikacji parametru wygładzania wraz z transformacją liniową przybliżona wartość tego parametru h_o^* , uzyskana zgodnie ze wzorem (3.16), najczęściej okazuje się wystarczająca; gdy używane jest jądro normalne, warto wykorzystać równości (3.17) i (3.21);
 - (4) jeżeli zastosowana ma być transformacja liniowa, to należy określić macierz R zdefiniowaną zależnością (3.25) lub jej uproszczoną postać R^{\sim} daną wzorem (3.26);
 - (5) jeśli parametr wygładzania ma podlegać modyfikacji, to należy wyznaczyć rodzinę parametrów modyfikujących s_1, s_2, \dots, s_m według równań (3.28)-(3.29) i (3.31);
 - (6) estymator jądrowy dany jest wzorem (3.32), przy czym redukuje się on do postaci odpowiednio (3.30), (3.27) lub (3.1) w przypadku pominięcia transformacji liniowej albo modyfikacji parametru wygładzania lub obu tych elementów jednocześnie.

Uwagi bibliograficzne

Estymatory jądrowe nie doczekały się dotychczas opracowania w języku polskim, oprócz krótkiej wzmianki w podręczniku [52]. Tematowi temu poświęcone są książki [34, 118, 152] oraz szczególnie warta rekomendacji praca [138]. W formie zmatematyzowanego zagadnienia to prezentuje natomiast publikacja [128]. Bogatą literaturę przedmiotową można także pozyskać z artykułów przeglądowych [12, 50, 131, 153].

Metody optymalizacji, w szczególności algorytmy poszukiwania ekstremów funkcji rzeczywistych, przedstawiono w klasycznej monografii [45].

3.2. UŚCIŚLENIE ZAGADNIENIA WYKRYWANIA USZKODZEŃ

Statystyczne wnioskowanie o występowaniu uszkodzenia w badanym systemie dynamicznym dokonywane będzie na podstawie tzw. wektora symptomów, czyli skończonego zbioru wielkości pomiarowych charakteryzujących stan techniczny (stan technicznej sprawności) nadzorowanego urządzenia. Nazwę tę można zinterpretować zauważając, iż objawy (symptomy) pojawiających się nieprawidłowości powinny znajdować stosowne odzwierciedlenie w aktualnych wartościach tak określonego wektora.

Współzrędnymi wektora symptomów mogą być składowe sterowania, stanu i odpowiedzi, aktualne wartości parametrów systemu dynamicznego oraz szereg innych wielkości charakterystycznych dla danego urządzenia (np. jego wydajność, temperatura, zużycie paliwa i oleju, itp.), a także ich funkcje (np. różnice, potęgi, itd.). Stanowią one zatem szerokie spektrum danych mogących być podstawą oceny poprawności warunków pracy nadzorowanego systemu.

Często wnioskowanie o stanie technicznym urządzenia w oparciu o pewną wielkość nie jest możliwe bez uwzględnienia jej zależności od innych czynników. Wtedy wektor symptomów powinien być powiększony nie tylko o te czynniki, ale ewentualnie również o aktualne wartości parametrów precyzujących powyższe zależności.

Powiększanie wymiaru wektora symptomów podlega jednakże istotnym ograniczeniom, warunkowanym przede wszystkim przez aspekty ekonomiczne, a także przez możliwość zwiększania się czasu potrzebnego do wykrycia pojawiającego się uszkodzenia. Ostateczna postać tego wektora musi więc być wynikiem podejmowanych kompromisów, jednak zasadniczym pozostaje tu wymaganie, by wchodzące w jego skład wielkości pomiarowe dostatecznie charakteryzowały stan techniczny nadzorowanego urządzenia. To, czy dany wektor symptomów spełnia tak ogólnie sformułowane żądanie, ocenić już można jedynie poprzez empiryczną weryfikację działania zaprojektowanego układu. (Na marginesie warto zwrócić uwagę, iż równie nieprecyzyjnie definiuje się podstawowe pojęcie współczesnej teorii sterowania, jakim jest stan systemu dynamicznego. Uwzględniając swobodę, którą dysponuje dzięki temu inżynier, w praktyce okazuje się to wręcz zaletą.)

Powyższe rozważania intuicyjnie zilustrować można rozpatrując przykład układu napędowego samochodu. Podstawowymi składowymi wektora symptomów są tu:

- (1) ciśnienie oleju,
- (2) temperatura silnika.

Informacja zawarta we współrzędnej (1) ulegnie znaczącemu uściśleniu jeżeli zostanie uwzględniona dodatkowo

- (3) prędkość obrotowa silnika

i podobnie dla współrzędnej (2) (biorąc pod uwagę nikłe możliwości chłodzenia przy małych prędkościach):

- (4) prędkość samochodu,

a także

- (5) temperatura zewnętrzna.

Z kolei informacja uzyskana z punktów (3)-(4), w połączeniu ze składową wyrażającą

- (6) numer aktualnie włączonego biegu,

pozwała diagnozować ślizganie się sprzęgła, natomiast współrzędne (4) i (6) oraz

- (7) bieżące zużycie paliwa

świadczą o ogólnej kondycji silnika. Każdy doświadczony użytkownik samochodu

może polemizować z powyższym schematem, w szczególności dodając własne, indywidualne spostrzeżenia. To właśnie synteza wiedzy teoretycznej oraz doświadczenia praktyków, specyficzne dla każdego systemu, powinny być podstawą przy ustalaniu postaci wektora symptomów.

Podsumowując: zakłada się dostępność pomiarową wektora symptomów, czyli skończonej ilości zmiennych, których aktualne wartości oraz relacje pomiędzy poszczególnymi składowymi byłyby zależne od stanu technicznego (stanu technicznej sprawności) nadzorowanego systemu. Wymagane jest zatem, aby zarówno poprawne warunki pracy, jak i dowolny typ diagnozowanego uszkodzenia były związane z możliwie jak najbardziej zróżnicowanymi zbiorami wartości lub odmiennymi relacjami pomiędzy współrzędnymi powyższego wektora (szczegółowa postać owych zbiorów i relacji nie musi być znana *a priori* – jej identyfikacja jest integralną częścią proponowanej tu procedury). Wartości wektora symptomów powinny być sukcesywnie mierzone w czasie pracy układu.

Z matematycznego punktu widzenia przyjęte zostanie, iż wektor symptomów jest n -wymiarowym dyskretnym procesem stochastycznym, a więc jego wartości są funkcją czynnika losowego oraz dyskretnej, niezależnej zmiennej, interpretowanej tu jako czas. Zależność od czynnika losowego jest nieodłączna metodom statystycznym, natomiast funkcja czasu wynika z oczywistej dla procesu wczesnego wykrywania uszkodzeń konieczności sukcesywnej aktualizacji wartości tego wektora. Dyskretny charakter zmiennej niezależnej stanowi naturalną konsekwencję sposobu pracy dominujących współcześnie układów numerycznych. Założenie to w żaden jednak sposób nie ogranicza możliwości zastosowań do systemów dynamicznych opisywanych modelami ciągłymi.

Aktualne pomiary wartości wektora symptomów będą podstawą procedury statystycznego wykrywania uszkodzeń, realizowanego poprzez testowanie hipotez:

$$H_0 \text{ – prawidłowe działanie systemu} \quad (3.33)$$

w przypadku detekcji, a także

$$H_k \text{ – wystąpienie } k\text{-tego typu uszkodzenia (nieprawidłowości)} \quad (3.34)$$

dla diagnozy skończonej ilości ($k = 1, 2, \dots, d$) rozróżnialnych jego typów. Należy podkreślić, że zakres nieprawidłowości wykrywalnych podczas detekcji nie ogranicza się do zbioru podlegających diagnozie uszkodzeń, tzn. iż prawdziwa jest implikacja

$$H_1 \vee H_2 \vee \dots \vee H_d \Rightarrow \sim H_0, \quad (3.35)$$

ale odwrotna relacja nie musi być prawdziwa ($\sim H_0$ oznacza zaprzeczenie hipotezy H_0).

Postać statystyki testowej opierać się będzie na charakterystyce wektora sympto-

mów dla przypadku poprawnej pracy systemu oraz w warunkach wystąpienia poszczególnych typów diagnozowanych uszkodzeń. Przy założeniu dowolnej z tych możliwości przyjęte zostanie, iż wektor symptomów Z jest procesem stochastycznym stacjonarnym w sensie rozkładów 1-wymiarowych. Wtedy to dla $j_1, j_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, zmienne losowe $Z(\cdot, j_1)$ oraz $Z(\cdot, j_2)$ mają takie same rozkłady. Niech również, w każdym przypadku, ów wspólny rozkład posiada ograniczoną funkcję gęstości klasy \mathcal{C}^2 z ograniczoną drugą pochodną.

Ostatecznie przyjmuje się następujące założenia:

- (1) wektor symptomów Z jest n -wymiarowym, dyskretnym procesem stochastycznym, określonym na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{S}, P) i zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- (2) w każdym z przypadków: przy poprawnych warunkach pracy albo podczas występowania dowolnego typu diagnozowanego uszkodzenia, proces Z jest stacjonarny w sensie rozkładów 1-wymiarowych;
- (3) ograniczona funkcja $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ klasy \mathcal{C}^2 , o ograniczonej drugiej pochodnej, stanowi gęstość rozkładu zmiennych losowych $Z(\cdot, j)$ dla $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, w przypadku poprawnych warunków pracy;
- (4) ograniczone funkcje $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ($k = 1, 2, \dots, d$) klasy \mathcal{C}^2 , o ograniczonych drugich pochodnych, reprezentują gęstości rozkładów zmiennych losowych $Z(\cdot, j)$ dla $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, w warunkach wystąpienia k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia.

Jak wspomniano, założenie (2), warunkowo stanowiące o stacjonarności w sensie rozkładów 1-wymiarowych procesu stochastycznego Z , implikuje wprost, iż zmienne losowe $Z(\cdot, j)$ mają identyczne rozkłady. Co więcej, jeżeli $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję borelowską, to proces stochastyczny $Y \equiv f \circ Z$ także jest stacjonarny w sensie rozkładów 1-wymiarowych i również w tym przypadku, dla dowolnych $j_1, j_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, rozkłady zmiennych losowych $Y(\cdot, j_1)$ i $Y(\cdot, j_2)$ są takie same.

Warto także zauważyć, że nie zostały sformułowane żadne założenia dotyczące postaci funkcji f_0, f_1, \dots, f_d (np. eliminujące istnienie ekstremów lokalnych). Ponadto nie wykluczono jednoczesnego wystąpienia kilku typów diagnozowanych uszkodzeń. Zbędna jest również szczegółowa znajomość modelu dynamiki nadzorowanego systemu.

3.3. DIAGNOZA USZKODZEŃ, jądrowy estymator dystrybuanty

Wbrew preferowanej dotychczas kolejności, jako pierwsze – w niniejszym podrozdziale – rozważane jest zagadnienie diagnozy uszkodzeń. W trakcie rozważań nad detekcją wykorzystane bowiem zostaną elementy opracowanych poniżej rozwiązań.

Diagnoza uszkodzeń realizowana będzie poprzez sukcesywne testowanie skończonej ilości hipotez H_1, H_2, \dots, H_d stanowiących o wystąpieniu założonych typów nieprawidłowości, wobec jednakowej hipotezy alternatywnej H_0 reprezentującej poprawne warunki pracy. Poszczególne procedury weryfikacyjne wynikają jednak z tej samej koncepcji i dlatego indeks $k = 1, 2, \dots, d$ należy traktować w poniższym tekście jako dowolnie ustalony. A zatem diagnoza polegać będzie na niezależnym testowaniu prawdziwości d par hipotez postaci: H_k względem H_0 . Do tego celu wykorzystana zostanie teoria Walda, zgodnie z koncepcją przedstawioną pod koniec podrozdziału 2.4, w nawiązaniu do teorii decyzji z podrozdziału 2.2.

Tak więc, dla dowolnie ustalonego k , zakłada się, iż zbiór stanów natury \mathcal{N}_k jest dwuelementowy:

- (1) n_k – wystąpienie k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia,
- (2) n_0 – poprawna praca systemu.

Podobnie, zbiór możliwych do podjęcia decyzji \mathcal{D}_k przyjmuje postać:

- (1) d_k – przyjęcie hipotezy H_k ,
- (2) d_0 – przyjęcie hipotezy H_0 .

Niech zatem dane będą następujące próby losowe złożone z eksperymentalnie pozyskanych wartości wektora symptomów Z :

$$z_1^k, z_2^k, \dots, z_{m_k}^k \text{ – w przypadku występowania } k\text{-tego typu diagnozowanego uszkodzenia} \quad (3.36)$$

$$z_1^0, z_2^0, \dots, z_{m_0}^0 \text{ – dla poprawnych warunków pracy} \quad (3.37)$$

oraz

$$Z(\omega, j) \text{ – aktualna (w chwili } j) \text{ wartość wektora symptomów} \quad (3.38)$$

Algorytm prowadzący do przyjęcia hipotezy H_k albo H_0 składać się będzie z trzech faz. Otóż, najpierw należy pozyskać na drodze eksperymentalnej próby losowe (3.36)-(3.37), przy czym w przypadku pierwszej z nich może wystąpić konieczność zasymulowania warunków występowania danego typu diagnozowanego uszkodzenia. Drugą fazę stanowi wyznaczenie, na podstawie powyższych prób, elementów procedury podjęcia decyzji, nie podlegających już później zmianom. I wreszcie, faza trzecia – zasadnicza – polega na samym podjęciu decyzji d_k albo d_0 , czyli przyjęciu hipotez H_k lub H_0 , w oparciu o aktualną wartość wektora symptomów (3.38).

Zostanie teraz przedstawiona procedura podejmowania decyzji d_k albo d_0 . Niech zatem dana będzie statystyka $S_k : \Omega \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ zdefiniowana wzorem

$$S_k(\omega, j) = f_k(Z(\omega, j)) \quad (3.39)$$

gdzie borelowskie odwzorowanie $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ oznacza funkcję gęstości 1-wy-

miarowych rozkładów wektora symptomów Z przy założeniu występowania k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia. (Szczegółowy opis wyznaczania powyższej funkcji w oparciu o technikę estymatorów jądrowych przedstawiono w podrozdziale 3.1.) Tak określona postać statystyki pozwala na identyfikację ewentualnych zmian dotyczących nie tylko wartości poszczególnych składowych wektora symptomów, ale przede wszystkim złożonych relacji występujących pomiędzy nimi.

Dla dowolnie ustalonej wartości j , reprezentującej odpowiednią chwilę czasową, wartość statystyki S_k odnieść można do prawdopodobieństwa pojawienia się danej wartości wektora symptomów w warunkach zaistnienia k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia. Za podjęciem decyzji d_0 świadczą więc małe wartości tej statystyki, czyli nastąpić powinno gdy zachodzi relacja

$$S_k(\omega, j) \in A_k, \quad (3.40)$$

gdzie

$$A_k = (-\infty, a_k] . \quad (3.41)$$

W przeciwnieństwie, jeśli

$$S_k(\omega, j) \in B_k \quad (3.42)$$

dla

$$B_k = \mathbb{R} \setminus A_k, \quad (3.43)$$

to należy podjąć decyzję d_k . Zgodnie z poczynionymi wcześniej ustaleniami, podjęcie decyzji d_k albo d_0 jest równoważne przyjęciu hipotezy – odpowiednio – H_k stanowiącej o wystąpieniu k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia lub H_0 reprezentującej poprawne warunki pracy nadzorowanego systemu.

W celu wyznaczenia wartości krytycznej a_k użyta zostanie podstawowa formuła statystycznej teorii decyzji – reguła bayesowska, zgodnie z procedurą i oznaczeniami przedstawionymi w podrozdziałach 2.2 i 2.4. Niech zatem $a_k > 0$ oraz $b_k > 0$ oznaczają odpowiednio straty niewykrycia k -tego typu uszkodzenia lub związanego z nim fałszywego alarmu. Funkcja strat l przyjmuje postać:

$$l(n, d) = \begin{cases} 0 & \text{gdy występuje stan } n_k \text{ a podjęto decyzję } d_k \\ 0 & \text{gdy występuje stan } n_0 \text{ a podjęto decyzję } d_0 \\ a_k & \text{gdy występuje stan } n_k \text{ a podjęto decyzję } d_0 \\ b_k & \text{gdy występuje stan } n_0 \text{ a podjęto decyzję } d_k \end{cases}, \quad (3.44)$$

gdzie $n \in \{n_k, n_0\}$ oraz $d \in \{d_k, d_0\}$.

Jeżeli zatem podjęta zostanie decyzja d_k , to wartość funkcji strat bayesowskich

(2.24) wynosi

$$l_b(d_k) = a_k \alpha_k , \quad (3.45)$$

natomiast w przypadku decyzji d_0 :

$$l_b(d_0) = b_k \beta_k , \quad (3.46)$$

przy czym

$$\alpha_k = P_k(\{\omega \in \Omega : S_k(\omega, j) \in A_k\}) \quad (3.47)$$

$$\beta_k = P_0(\{\omega \in \Omega : S_k(\omega, j) \in B_k\}) , \quad (3.48)$$

gdy P_k oraz P_0 oznaczają kolejno prawdopodobieństwa w przypadku występowania k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia i dla poprawnych warunków pracy. Zależności (3.39)-(3.43) pozwalają uściślić powyższe wzory:

$$\alpha_k = P_k(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) \leq a_k\}) \quad (3.49)$$

$$\beta_k = P_0(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) > a_k\}) , \quad (3.50)$$

przy czym drugi z nich jest równoważny warunkowi

$$1 - \beta_k = P_0(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) \leq a_k\}) , \quad (3.51)$$

a zatem

$$\beta_k = 1 - P_0(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) \leq a_k\}) . \quad (3.52)$$

Zgodnie z formułą reguły bayesowskiej (2.26), decyzja d_k powinna być podjęta jeśli

$$a_k \alpha_k \leq b_k \beta_k , \quad (3.53)$$

natomiast decyzja d_0 w przypadku gdy

$$a_k \alpha_k \geq b_k \beta_k . \quad (3.54)$$

Wartość krytyczna a_k ma być zatem ustalona tak aby spełniony był warunek

$$a_k \alpha_k = b_k \beta_k , \quad (3.55)$$

a więc

$$\frac{a_k}{b_k} \alpha_k = \beta_k , \quad (3.56)$$

czyli ostatecznie, po uwzględnieniu zależności (3.49) i (3.52):

$$P_0(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) \leq a_k\}) + \frac{a_k}{b_k} P_k(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) \leq a_k\}) = 1. \quad (3.57)$$

Rozwiązanie powyższego równania wymaga określenia wartości występujących tam prawdopodobieństw:

$$P_k(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) \leq a_k\}) = F_{f_k \circ Z|_k}(a_k) \quad (3.58)$$

$$P_0(\{\omega \in \Omega : f_k(Z(\omega, j)) \leq a_k\}) = F_{f_k \circ Z|_0}(a_k), \quad (3.59)$$

gdzie $F_{f_k \circ Z|_k}$ oraz $F_{f_k \circ Z|_0}$ oznaczają dystrybuanty rozkładów zmiennych losowych $f_k \circ Z(\cdot, j)$ – odpowiednio – w przypadku wystąpienia k-tego typu diagnozowanego uszkodzenia i poprawnych warunków pracy. Poniżej zostanie przedstawiona koncepcja wyznaczania dystrybuanty zmiennej losowej z wykorzystaniem techniki estymatorów jądrowych.

Niech dana będzie rzeczywista zmienna losowa Y . Jeżeli jej rozkład posiada funkcję gęstości f , to naturalnym jądrowym estymatorem dystrybuanty F tej zmiennej jest odwzorowanie $\hat{F}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ zdefiniowane zależnością

$$\hat{F}(y) = \int_{-\infty}^y \hat{f}(x) dx, \quad (3.60)$$

gdzie \hat{f} oznacza jądrowy estymator gęstości (3.1), szczegółowo rozważany w podrozdziale 3.1. I tak, zależność (3.4) gwarantuje istnienie funkcji pierwotnej $I: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ jądra K , czyli

$$I(y) = \int_{-\infty}^y K(x) dx. \quad (3.61)$$

Jest ona oczywiście ciągła, natomiast warunek (3.6) implikuje, iż spełnia także warunek Lipschitza ze stałą

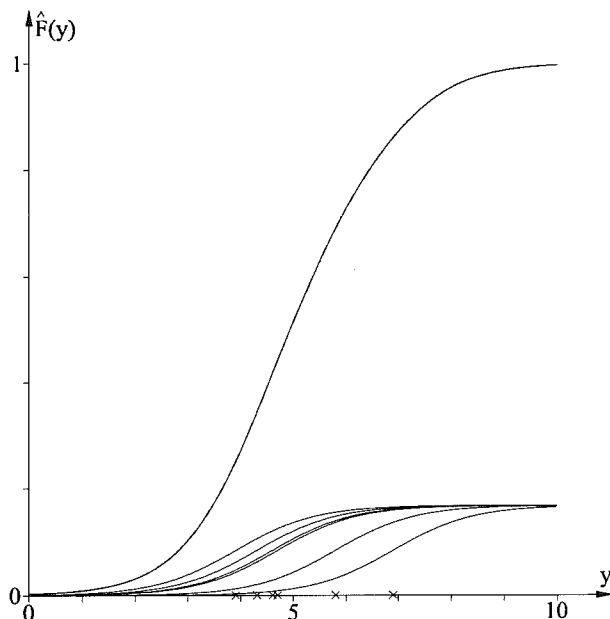
$$L_I = K(0). \quad (3.62)$$

Jeżeli odwzorowanie K przyjmuje jedynie wartości dodatnie, to funkcja I jest ponadto ściśle rosnąca.

A zatem, wobec podstawowych własności całki, jądrowy estymator dystrybuanty ostatecznie wyrazić można wzorem

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I\left(\frac{y - y_i}{h}\right), \quad (3.63)$$

gdzie y_1, y_2, \dots, y_m oznaczają doświadczalnie uzyskane, w trakcie niezależnych eksperymentów, wartości zmiennej losowej Y (rys. 3.7).



Rys. 3.7. Jądrowy estymator dystrybuanty.

Jeżeli wartość parametru wygładzania h uzależniona jest od liczności próby losowej m tak aby spełniony był warunek

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0, \quad (3.64)$$

to zdefiniowany powyżej estymator dystrybuanty jest mocno zgodny, a zatem również zgodny, w punktach jej ciągłości. Dowód, oparty na bardzo słabych założeniach, znaleźć można w dodatku A – podrozdział 8.1, jako twierdzenie 8.2. Warto zauważyć, że zbyt szybki okazuje się tu warunek ograniczający szybkość zmierzania wartości parametru wygładzania h do zera przy powiększaniu liczności próby m , co wobec estymatora funkcji gęstości sankcjonowała zależność (3.23). Ponadto, estymacja dystrybuanty możliwa jest także w przypadku gdy rozkład w ogóle nie posiada funkcji gęstości. Jeżeli natomiast funkcja taka istnieje, a zatem dystrybuanta jest ciągła, to własność mocnej zgodności staje się globalna.

W przypadku prezentowanej powyżej koncepcji estymacji dystrybuanty, szczególnie korzystne okazuje się (jednowymiarowe) jądro eksponencjalne

$$K_e(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \quad (3.65)$$

Jego funkcja pierwotna przyjmuje bowiem dogodną postać

$$I_e(y) = \frac{1}{1+e^{-y}} \quad (3.66)$$

i – co stanowi zaletę w wielu zastosowaniach – jest ściśle rosnąca. Kwadrat splotowy, wykorzystywany przy wyznaczaniu optymalnej wartości parametru wygładzania, wyraża się wtedy wzorem

$$K_e^{*2}(x) = \begin{cases} e^x \left(\frac{x(e^x+1)}{(e^x-1)^3} - \frac{2}{(e^x-1)^2} \right) & \text{dla } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad (3.67)$$

natomiast wyrażenie $\frac{V(K)}{U(K)^2}$ występujące w równości (3.16) wynosi

$$\frac{V(K_e)}{U(K_e)^2} = \frac{3}{2\pi^4} \quad (3.68)$$

W stosunku do estymatora dystrybuanty, prawdziwe pozostają ogólne zagadnienia dotyczące estymatorów jądrowych, przedstawione w podrozdziale 3.1. W szczególności, jeżeli dokonywana jest liniowa transformacja, to dla rzeczywistej zmiennej losowej Y zależności (3.25)–(3.26) są równoważne, i wtedy

$$R = R^{\sim} = \sqrt{\text{Var}(Y)} \quad (3.69)$$

natomiast definicja estymatora dystrybuanty (3.63) przybiera formę

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I\left(\frac{y-y_i}{Rh}\right) \quad (3.70)$$

W przypadku stosowania modyfikacji parametru wygładzania, definicja ta dana jest w postaci

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I\left(\frac{y-y_i}{hs_i}\right) \quad (3.71)$$

i wreszcie, gdy wykorzystywane są obie koncepcje:

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I\left(\frac{y-y_i}{Rhs_i}\right) \quad (3.72)$$

Powracając do zagadnienia diagnozy uszkodzeń: po podstawieniu oznaczeń (3.58)-(3.59) do wzoru (3.57) otrzymuje się kryterium

$$F_{f_k \circ Z|_0}(a_k) + \frac{\alpha_k}{b_k} F_{f_k \circ Z|_k}(a_k) = 1 \quad (3.73)$$

W praktyce funkcja gęstości f_k oraz dystrybuanty $F_{f_k \circ Z|_0}$, $F_{f_k \circ Z|_k}$ dostępne są jedynie w postaci odpowiednich estymatorów \hat{f}_k , $\hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_0}$, $\hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_k}$, a zatem zależność (3.73) przyjmuje postać następującego równania:

$$\hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_0}(\hat{a}_k) + \frac{\alpha_k}{b_k} \hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_k}(\hat{a}_k) = 1 \quad (3.74)$$

przy czym jego argument \hat{a}_k stanowi estymator wielkości a_k . W ramach twierdzenia 8.7 przedłożonego w podrozdziale 8.3 (dodatek C) wykazane zostało, iż jeżeli wartości parametrów wygładzania h uzależnia się od liczności próby m tak aby prawdziwe było

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0 \quad (3.75)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mh^n = \infty \quad (3.76)$$

to jest on estymatorem mocno zgodnym, a zatem również zgodnym, co z punktu widzenia statystyki matematycznej świadczy o formalnej poprawności powyższej procedury diagnozy uszkodzeń.

Jeżeli traktować lewą stronę równania (3.74) jako funkcję $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zmiennej \hat{a}_k , to stosując kryterium (3.73) należy znaleźć rozwiązanie równania

$$g_k(\hat{a}_k) = 1 \quad (3.77)$$

Prawdziwe są następujące zależności:

$$\lim_{a_k \rightarrow -\infty} g_k(\hat{a}_k) = 0 \quad (3.78)$$

$$\lim_{a_k \rightarrow \infty} g_k(\hat{a}_k) = 1 + \frac{\alpha_k}{b_k} > 1 \quad (3.79)$$

Z ciągłości odwzorowania I wynika, że funkcja g_k także jest ciągła. Wraz ze wzorami (3.78)-(3.79) stanowi to o istnieniu rozwiązania równania (3.77). Jeżeli dla potrzeb estymacji dystrybuanty stosuje się jądro K o dodatnich wartościach, to funkcja g_k jest ponadto ściśle rosnąca, co implikuje jednoznaczność tego rozwiązania oraz umożliwia stosowanie efektywnych procedur numerycznych prowadzących do wyznaczenia jego wartości. W szczególności, rozwiązanie to może być obliczone rekurencyjnie jako granica ciągu $\{\hat{a}_k^l\}_{l=1}^{\infty}$ określonego wzorami

$$\hat{a}_k^1 = 0 \quad (3.80)$$

$$\hat{a}_k^{l+1} = \hat{a}_k^l + c_k \cdot (1 - g_k(\hat{a}_k^l)) \quad \text{dla } l = 1, 2, \dots, \quad (3.81)$$

przy czym globalną zbieżność powyższego algorytmu zapewnia warunek

$$0 < c_k < \frac{2}{L_{g_k}}, \quad (3.82)$$

gdzie L_{g_k} oznacza stałą Lipschitza odwzorowania g_k (rys. 3.8a,b). Warto zauważyć, iż dla

$$c_k = \frac{2}{L_{g_k}}, \quad (3.83)$$

brak zbieżności ma miejsce jedynie wtedy, gdy funkcja g_k jest liniowa ze współczynnikiem kierunkowym L_{g_k} w otoczeniu rozwiązania równania (3.77) (rys. 3.8c). Jednak wobec występującej w praktyce silnej nieliniowości tej funkcji, wartość określona wzorem (3.83) przeważnie zapewnia najszybszą zbieżność rozważanego algorytmu (rys. 3.8d).

Tymczasem, jak wynika z definicji (3.63), jądrowe estymatory $\hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_0}$ oraz $\hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_k}$ są funkcjami Lipschitza ze stałymi – kolejno –

$$L_0 = \frac{L_f}{h_0} \quad (3.84)$$

$$L_k = \frac{L_f}{h_k}, \quad (3.85)$$

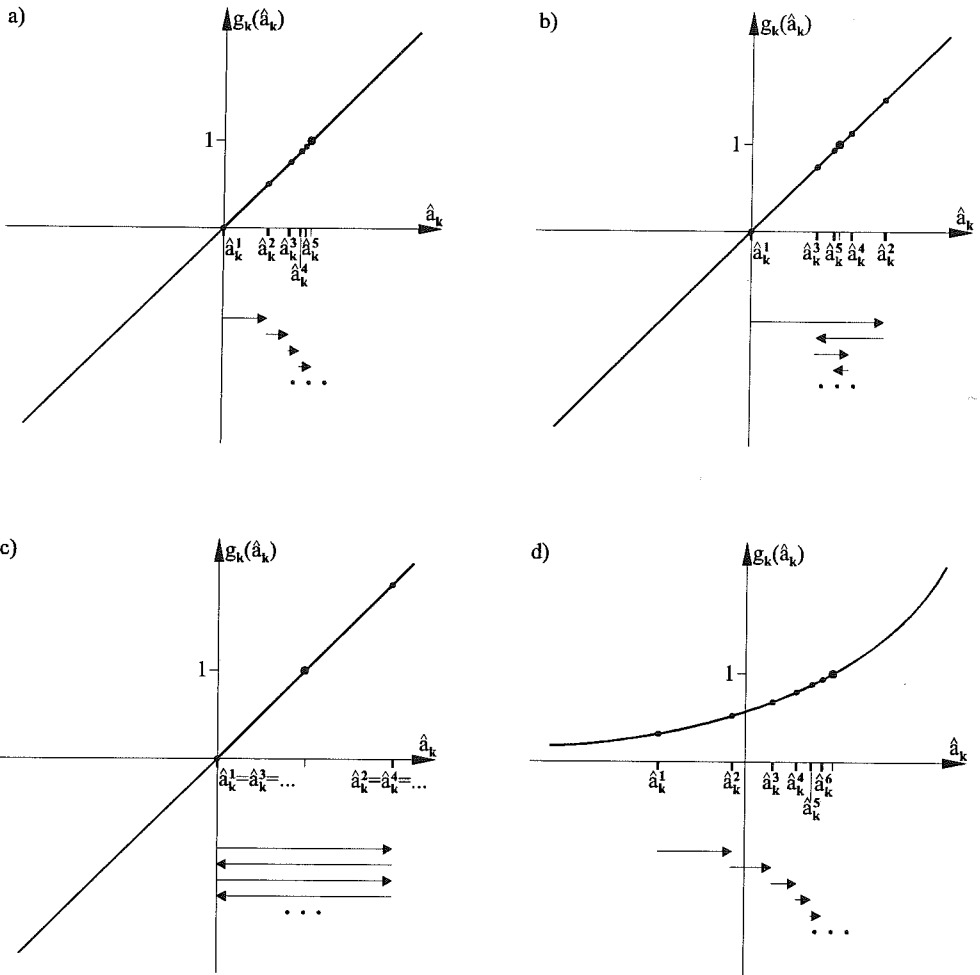
gdzie h_0 i h_k oznaczają odpowiednio parametry wygładzania stosowane przy konstrukcji tych estymatorów. Zależność (3.74) implikuje z kolei, że

$$L_{g_k} = L_0 + \frac{\alpha_k}{b_k} L_k. \quad (3.86)$$

A zatem, łącząc powyższe wyniki z równością (3.62) otrzymuje się wzór

$$L_{g_k} = K(0) \left(\frac{1}{h_0} + \frac{\alpha_k}{b_k} \frac{1}{h_k} \right), \quad (3.87)$$

co po podstawieniu do nierówności (3.82) pozwala uściślić warunek gwarantujący zbieżność algorytmu (3.80)–(3.81). Co więcej, jeżeli stosuje się jądro, którego funkcja pierwotna nie jest liniowa w żadnym zacieśnieniu, to własność tę ma również odwzorowanie g_k i wtedy stała c_k powinna być przyjęta zgodnie z równością (3.83).



Rys. 3.8. Własności algorytmu (3.80)-(3.81) w przypadkach gdy:

- $L_{g_k} = 1, c_k = \frac{1}{2},$
- $L_{g_k} = 1, c_k = \frac{3}{2},$
- $L_{g_k} = 1, c_k = 2,$
- $L_{g_k} = 5, c_k = \frac{2}{5}.$

W szczególności, dla jądra eksponencjalnego, dzięki zależnościom (3.65) i (3.87), równość tę można ostatecznie sprecyzować jako

$$c_k = \frac{8h_0h_k}{h_k + \frac{a_k}{b_k}h_0} \quad (3.88)$$

Jeśli wprowadzana jest transformacja liniowa albo modyfikacja parametru wygładzania czy też jednocześnie obie te koncepcje, to wzór (3.84) przyjmuje odpowiednio postać

$$L_0 = \frac{L_I}{R_0h_0} \quad (3.89)$$

$$L_0 = \frac{L_I}{m_0h_0} \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_{0,i}} \quad (3.90)$$

$$L_0 = \frac{L_I}{m_0R_0h_0} \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_{0,i}} \quad (3.91)$$

i analogicznie dla zależności (3.85):

$$L_k = \frac{L_I}{R_kh_k} \quad (3.92)$$

$$L_k = \frac{L_I}{m_kh_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{s_{k,i}} \quad (3.93)$$

$$L_k = \frac{L_I}{m_kR_kh_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{s_{k,i}}, \quad (3.94)$$

gdy R_0 i R_k oraz $s_{0,i}$ i $s_{k,i}$ oznaczają parametry R oraz s_i użyte przy konstrukcji – odpowiednio – estymatorów $\hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_0}$ i $\hat{F}_{\hat{f}_k \circ Z|_k}$. W konsekwencji równości (3.87)–(3.88) ulegają uogólnieniu na:

$$L_{g_k} = K(0) \left(\frac{1}{R_0h_0} + \frac{a_k}{b_k} \frac{1}{R_kh_k} \right) \quad (3.95)$$

$$L_{g_k} = K(0) \left(\frac{1}{m_0h_0} \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_{0,i}} + \frac{a_k}{b_k} \frac{1}{m_kh_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{s_{k,i}} \right) \quad (3.96)$$

$$L_{g_k} = K(0) \left(\frac{1}{m_0R_0h_0} \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_{0,i}} + \frac{a_k}{b_k} \frac{1}{m_kR_kh_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{s_{k,i}} \right) \quad (3.97)$$

oraz

$$c_k = \frac{8h_0 h_k}{R_k h_k + \frac{a_k}{b_k} R_0 h_0} \quad (3.98)$$

$$c_k = \frac{8m_0 m_k h_0 h_k}{m_k h_k \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{s_{i,k}} + \frac{a_k}{b_k} m_0 h_0 \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_{i,0}}} \quad (3.99)$$

$$c_k = \frac{8m_0 m_k R_0 R_k h_0 h_k}{m_k R_k h_k \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{s_{i,k}} + \frac{a_k}{b_k} m_0 R_0 h_0 \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_{i,0}}} \quad (3.100)$$

stosownie w przypadkach gdy używana jest transformacja liniowa, modyfikacja parametru wygładzania albo jednocześnie obydwie koncepcje.

Tak więc, technika estymatorów jądrowych została wykorzystana do zagadnienia diagnozy uszkodzeń w dwojaki sposób: przy określeniu funkcji gęstości definiującej postać statystyki testowej, po czym do wyznaczenia dystrybuanty jej rozkładu. Należy podkreślić, iż parametry ustalane w obu tych zastosowaniach nie mają wzajemnego odniesienia i muszą być obliczane niezależnie.

Podsumowując, projektowanie układu statystycznej diagnozy uszkodzeń polega na:

- (1) określeniu wartości ilorazów $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_d}{b_d}$ uwzględniając ekonomiczne aspekty zagadnienia;
- (2) pozyskaniu na drodze eksperymentalnej wartości wektora symptomów Z :
 $z_1^0, z_2^0, \dots, z_{m_0}^0$ – w przypadku poprawnej pracy systemu,
 $z_1^1, z_2^1, \dots, z_{m_1}^1$ – w warunkach występowania 1-ego typu uszkodzenia,
 $z_1^2, z_2^2, \dots, z_{m_2}^2$ – w warunkach występowania 2-ego typu uszkodzenia,
 \vdots
 $z_1^d, z_2^d, \dots, z_{m_d}^d$ – w warunkach występowania d-tego typu uszkodzenia,
 przy czym licznosci tych prób m_0, m_1, \dots, m_d powinny stanowić kompromis pomiędzy dokładnością estymacji a kosztami ich pozyskania i późniejszą szybkością działania układu komputerowego, będąc jednak większymi od przedstawionych na rysunku 3.6;
- (3) wyznaczeniu w oparciu o powyższe próby jądrowych estymatorów gęstości rozkładów zmiennych losowych $Z(\cdot, j)$ w warunkach wystąpienia poszczególnych typów uszkodzeń podlegających diagnozie, czyli funkcji $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_d$; postępowanie takie, przedstawione zostało w podrozdziale 3.1, dla każdej z nich musi być realizowane niezależnie; proponowane jest jądro normalne;
- (4) zdefiniowaniu rzeczywistych procesów stochastycznych Y_1, Y_2, \dots, Y_d jako $Y_1 \equiv \hat{f}_1 \circ Z, Y_2 \equiv \hat{f}_2 \circ Z, \dots, Y_d \equiv \hat{f}_d \circ Z$;

(5) określeniu prób losowych:

- dla zmiennych losowych $Y_k(\cdot, j)$ ($k = 1, 2, \dots, d$) przy poprawnych warunkach pracy, a zatem wyliczeniu wartości

$$\hat{f}_1(z_1^0), \hat{f}_1(z_2^0), \dots, \hat{f}_1(z_{m_0}^0)$$

$$\hat{f}_2(z_1^0), \hat{f}_2(z_2^0), \dots, \hat{f}_2(z_{m_0}^0)$$

⋮

$$\hat{f}_d(z_1^0), \hat{f}_d(z_2^0), \dots, \hat{f}_d(z_{m_0}^0) ;$$

- dla zmiennych losowych $Y_k(\cdot, j)$ w przypadku występowania k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia ($k = 1, 2, \dots, d$), czyli

$$\hat{f}_1(z_1^1), \hat{f}_1(z_2^1), \dots, \hat{f}_1(z_{m_1}^1)$$

$$\hat{f}_2(z_1^2), \hat{f}_2(z_2^2), \dots, \hat{f}_2(z_{m_2}^2)$$

⋮

$$\hat{f}_d(z_1^d), \hat{f}_d(z_2^d), \dots, \hat{f}_d(z_{m_d}^d) ;$$

- (6) ustaleniu na podstawie powyższych prób procedury wyznaczania jądrowych estymatorów dystrybuant rozkładów zmiennych losowych $Y_k(\cdot, j)$ dla poprawnych warunków pracy oraz k -tego typu uszkodzenia ($k = 1, 2, \dots, d$); metodyka przedstawiona została w niniejszym podrozdziale; w przypadku każdego z tych estymatorów postępowanie musi być realizowane niezależnie; rekomendowane jest jądro eksponencjalne (3.65) – warto wtedy wykorzystać wzory (3.67)-(3.68);
- (7) obliczeniu estymatorów wartości krytycznych $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_d$, z zastosowaniem algorytmu (3.80)-(3.81), przy czym w przypadku jądra eksponencjalnego, stałe c_1, c_2, \dots, c_d przyjęte mogą być na podstawie odpowiedniej zależności (3.88) lub (3.98)-(3.100);
- (8) zdefiniowaniu zbiorów A_1, A_2, \dots, A_d oraz B_1, B_2, \dots, B_d zgodnie ze wzorami (3.41) i (3.43), po przyjęciu jako wartości krytycznych a_1, a_2, \dots, a_d ich estymatorów $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_d$, wyznaczonych w poprzednim punkcie.

Stosowanie w praktyce koncepcji diagnozy uszkodzeń wobec urządzenia pracującego w czasie rzeczywistym wymaga skutecznego w dowolnej chwili oraz oddzielnie dla każdego $k = 1, 2, \dots, d$ następującej procedury:

- (9) należy wyznaczyć dla aktualnej wartości wektora symptomów Z wartość statystyki S_k na podstawie wzoru (3.39), a następnie stwierdzić, czy należy ona do zbioru B_k czy A_k ; w pierwszym przypadku wnioskuje się o prawdziwości hipotezy H_k , a więc o zaistnieniu k -tego typu uszkodzenia, w drugim – przypuszczenie to należy odrzucić.

Czynności pozycji (9) są sukcesywnie powtarzane do momentu dezaktualizacji danych pozyskanych w punktach (2) i ewentualnie (1) – w tym przypadku należy powtórzyć powyższy algorytm.

Uwagi bibliograficzne

Różnorodne koncepcje nieparametrycznych estymatorów dystrybuanty są przedmiotem artykułów [119, 130].

3.4. DETEKCJA USZKODZEŃ, jądrowy i pozycyjny estymator kwantyla

Tematem rozważań niniejszego podrozdziału jest statystyczna detekcja uszkodzeń. Polegać ona będzie na wykorzystywaniu aktualnych wartości wektora symptomów do sukcesywnego testowania hipotezy stanowiącej o poprawnej pracy nadzorowanego systemu. Z uwagi na założone pełne spektrum wykrywanych nieprawidłowości, implikujące znaczną nieokreśloność ewentualnej hipotezy alternatywnej oraz prawdopodobieństwa błędu drugiego rodzaju, dla potrzeb detekcji zaprojektowany zostanie test istotności, zgodnie z zasadami teorii Neymana-Pearsona opisanej w podrozdziale 2.4.

Niech więc dane będą statystyczne próby losowe składające się z pozyskanych eksperymentalnie wartości wektora symptomów Z :

$$z_1^0, z_2^0, \dots, z_{m_0}^0 \text{ – dla poprawnych warunków pracy} \quad (3.101)$$

oraz

$$Z(\omega, j) \text{ – aktualna (w chwili } j) \text{ wartość wektora symptomów} \quad (3.102)$$

Dystrybuanty rozkładów zmiennych losowych, z których pochodzą powyższe próby oznaczane są odpowiednio jako F_0 i G . Testowana będzie hipoteza H_0 stanowiąca o ich tożsamości:

$$H_0 : G \equiv F_0 \quad (3.103)$$

Przyjmuje się, iż powyższa hipoteza jest, z praktycznego punktu widzenia, równoważna formule (3.33). Wariant (3.33) wyraża aspekty aplikacyjne, natomiast wersja (3.103) zdefiniowana jest zgodnie z wymogami formalnymi statystyki matematycznej.

Podobnie jak w przypadku diagnozy, procedura weryfikacyjna podzielona będzie na trzy fazy: eksperymentalnego pozyskania próby losowej (3.101), wyznaczenia na jej podstawie statystyki oraz zbioru krytycznego, i wreszcie, testowania podczas pracy systemu hipotezy H_0 w oparciu o aktualną wartość wektora symptomów (3.102).

Stosowana w tym celu statystyka $S_0 : \Omega \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ definiowana jest wzorem

$$S_0(\omega, j) = f_0(Z(\omega, j)) \quad , \quad (3.104)$$

gdzie borelowskie odwzorowanie $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ oznacza funkcję gęstości 1-wymiarowych rozkładów wektora symptomów Z w przypadku poprawnej pracy nadzorowanego systemu (podrozdział 2.1). Przyjęta postać statystyki umożliwia rozpoznanie zmian zachodzących zarówno w poszczególnych składowych wektora symptomów, jak i w ich wzajemnych relacjach.

W każdej chwili j , wartość powyższej statystyki jest związana z prawdopodobieństwem wystąpienia aktualnego wektora symptomów przy założeniu poprawnych warunków pracy. Przeciw prawdziwości hipotezy H_0 świadczą więc małe wartości statystyki S_0 , co implikuje lewostronną postać zbioru krytycznego:

$$A_0 = (-\infty, a_0] \quad , \quad (3.105)$$

przy czym wartość krytyczna a_0 wyznaczana jest tak aby spełniony był warunek

$$P_0(\{\omega \in \Omega : S_0(\omega, j) \in A_0\}) = \alpha_0 \quad (3.106)$$

dla ustalonego poziomu istotności $\alpha_0 \in (0,1)$, reprezentującego prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju, czyli stanowiącego tu o fałszywym alarmie.

Dzięki zależnościom (3.104)-(3.105) powyższy wzór przyjmuje równoważną postać

$$P_0(\{\omega \in \Omega : f_0(Z(\omega, j)) \leq a_0\}) = \alpha_0 \quad , \quad (3.107)$$

a zatem wartość krytyczną a_0 można estymować za pomocą kwantyla rzędu α_0 rozkładu zmiennych losowych $f_0 \circ Z(\cdot, j)$. W dalszej części zostaną przedstawione dwie koncepcje wyznaczania wartości estymatora kwantyla, o wzajemnie uzupełniających się własnościach: wykorzystująca technikę estymatorów jądrowych oraz oparta na pojęciu statystyki pozycyjnej.

Rozważana będzie rzeczywista zmienna losowa Y . Dla uściślenia: kwantylem r -tego rzędu ($0 < r < 1$) nazywana jest każda liczba $q \in \mathbb{R}$, spełniająca warunki

$$P_0(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq q\}) \geq r \quad (3.108)$$

$$P_0(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \geq q\}) \geq 1 - r \quad . \quad (3.109)$$

W przypadku ciągłości dystrybuanty F powyższej zmiennej losowej, kwantyl określony jest równaniem

$$F(q) = r \quad , \quad (3.110)$$

natomiast ścisła monotoniczność dystrybuanty w zbiorze $F^{-1}((0,1))$ implikuje jego jednoznaczność. Wtedy też kwantyl q dzieli przestrzeń wartości zmiennej losowej na dwa podzbiory $(-\infty, q]$ i $[q, \infty)$ tak, iż ich prawdopodobieństwa wynoszą odpowiednio

r oraz $1-r$. (Dla potrzeb opracowywanej tu procedury detekcji uszkodzeń należy więc utożsamiać rozkłady zmiennych losowych Y i $f_0 \circ Z(\cdot, j)$), a także przyjąć $q = a_0$ oraz $r = \alpha_0$.)

Najpierw zaproponowana zostanie koncepcja jądrowego estymatora kwantyla, zunifikowana z metodyką prezentowaną w podrozdziałach 3.1 oraz 3.3.

Jądrowy estymator dystrybuanty \hat{F} , w swej podstawowej postaci zdefiniowany jest wzorem (3.63). W przypadku gdy

$$K(x) > 0, \quad (3.111)$$

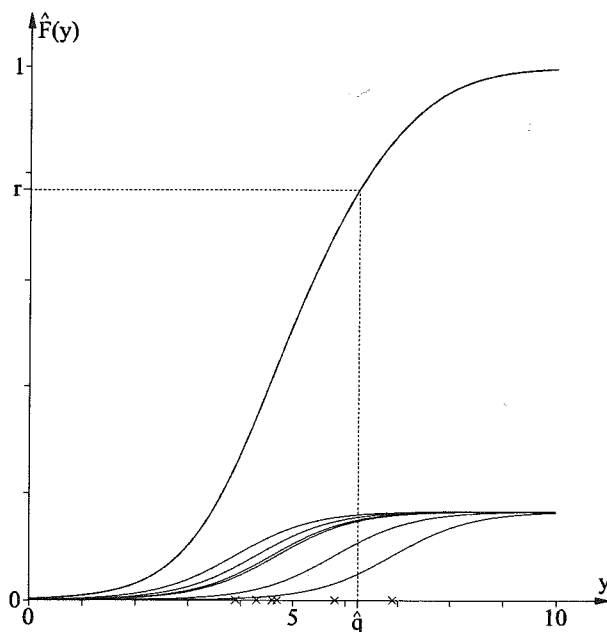
odwzorowanie \hat{F} jest ściśle rosnące, co stanowi, iż jądrowy estymator kwantyla r -tego rzędu – oznaczany przez \hat{q}_J – jednoznacznie określić można równością

$$\hat{F}(\hat{q}_J) = r, \quad (3.112)$$

a zatem uwzględniając zależność (3.63):

$$\sum_{i=1}^m I\left(\frac{\hat{q}_J - y_i}{h}\right) = mr \quad (3.113)$$

(rys. 3.9).



Rys. 3.9. Jądrowy estymator kwantyla.

Jeśli kwantyl r -tego rzędu określony jest jednoznacznie oraz wartość parametru wygładzania h uzależniona się od liczności próby losowej m tak aby

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0, \quad (3.114)$$

to estymator kwantyla definiowany równaniem (3.113) spełnia warunek mocnej zgodności, a zatem także zgodności. Dowód, uwarunkowany bardzo słabymi założeniami, przedłożono w sekcji 8.2.1 dodatku B, jako twierdzenie 8.4. Podobnie do przypadku dystrybuanty, mocna zgodność jądrowego estymatora kwantyla \hat{q}_J nie wymaga warunku ograniczającego szybkość zmierzania wartości parametru wygładzania do zera przy powiększaniu liczności próby. I wreszcie, jeżeli rozkład zmiennej losowej posiada funkcję gęstości o spójnym nośniku, to fakt ten gwarantuje jednoznaczność kwantyla.

Analogicznie do estymacji dystrybuanty, także i tu rekomendowane jest jądro eksponencjalne, dane wzorem (3.65).

W praktyce, wartość jądrowego estymatora kwantyla \hat{q}_J może być wyznaczana rekurencyjnie jako granica ciągu $\{\hat{q}_J^l\}_{l=1}^{\infty}$ określonego wzorami

$$\hat{q}_J^1 = 0 \quad (3.115)$$

$$\hat{q}_J^{l+1} = \hat{q}_J^l + c_0 \cdot \left(mr - \sum_{i=1}^m I \left(\frac{\hat{q}_J^l - y_i}{h} \right) \right) \quad \text{dla } l = 1, 2, \dots, \quad (3.116)$$

przy czym globalna zbieżność zagwarantowana jest nierównością

$$0 < c_0 < \frac{2h}{mL_J}, \quad (3.117)$$

podczas gdy wartość L_J , oznaczającą stałą Lipschitza odwzorowania I , otrzymać można z zależności (3.62). Co więcej, jeśli funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiowana wzorem

$$g(y) = \sum_{i=1}^m I \left(\frac{y - y_i}{h} \right) \quad (3.118)$$

nie jest liniowa ze współczynnikiem kierunkowym $\frac{mL_J}{h}$ w otoczeniu wartości kwantyla, to powyższy algorytm jest także zbieżny gdy

$$c_0 = \frac{2h}{mL_J}. \quad (3.119)$$

Dla większości występujących w praktyce przypadków wartość ta zapewnia najszybszą zbieżność algorytmu (3.115)-(3.116). W szczególności, jeżeli stosowane jest jądro eksponencjalne (3.65), to z uwagi na zależność (3.62) należy wtedy przyjąć

$$c_0 = \frac{8h}{m} \quad (3.120)$$

Wobec zaprezentowanej powyżej koncepcji jądrowego estymatora kwantyla, aktualne są także ogólne aspekty odnoszące się do tego typu estymatorów, prezentowane w podrozdziale 3.1. W szczególności, jeśli stosowana jest liniowa transformacja, to równanie (3.113) przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^m I \left(\frac{\hat{q}_J - y_i}{Rh} \right) = mr \quad ; \quad (3.121)$$

podobnie w przypadku procedury modyfikacji parametru wygładzania

$$\sum_{i=1}^m I \left(\frac{\hat{q}_J - y_i}{hs_i} \right) = mr \quad , \quad (3.122)$$

natomiast gdy realizowane są obie te koncepcje:

$$\sum_{i=1}^m I \left(\frac{\hat{q}_J - y_i}{Rhs_i} \right) = mr \quad . \quad (3.123)$$

Wtedy też właściwej zmiany wymagają wzory (3.116)-(3.120). Mianowicie, w równościach (3.116) i (3.118) współczynnik h powinien być zastąpiony przez

$$Rh \quad hs_i \quad Rhs_i \quad , \quad (3.124)$$

natomiast prawa strona zależności (3.117) i (3.119) wynosi

$$\frac{2h}{mL_J R} \quad \frac{2h}{L_J \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_i}} \quad \frac{2h}{L_J R \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_i}} \quad , \quad (3.125)$$

podczas gdy w przypadku formuły (3.120):

$$\frac{8h}{mR} \quad \frac{8h}{\sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_i}} \quad \frac{8h}{R \sum_{i=1}^{m_0} \frac{1}{s_i}} \quad , \quad (3.126)$$

odpowiednio, gdy stosowana jest transformacja liniowa lub modyfikacja parametru wygładzania albo też obie powyższe koncepcje.

Przedstawiona teraz zostanie odmienna idea estymatora kwantyla, oparta na pojęciu statystyki pozycyjnej.

Niech zatem dane będą liczby $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, przy czym $k \leq m$, natomiast Y_1, Y_2, \dots, Y_m oznacza m -elementową próbę losową odpowiadającą rzeczywistej zmiennej Y . Dla dowolnie ustalonego elementu $\omega \in \Omega$ można uporządkować wartości

$Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_m(\omega)$ od najmniejszej do największej, a zatem po przypisaniu odpowiednich indeksów:

$$Y_{1,m}(\omega) \leq Y_{2,m}(\omega) \leq \dots \leq Y_{m,m}(\omega) . \quad (3.127)$$

Powtarzając powyższą procedurę dla każdego $\omega \in \Omega$, definiuje się w naturalny sposób rzeczywistą zmienną losową $Y_{k,m} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, określaną mianem statystyki pozycyjnej rzędu k zmiennej losowej Y . Statystyka taka charakteryzuje zatem k -tą co do wielkości wartość m -elementowej próby losowej.

W literaturze przedmiotowej znaleźć można wiele propozycji estymatorów kwantyla, których ideę oparto na pojęciu statystyki pozycyjnej. Jeżeli liczność próby losowej m oraz rząd kwantyla r spełniają warunek:

$$0,5 \leq mr \leq m - 0,5 , \quad (3.128)$$

to szczególnie korzystnymi własnościami charakteryzuje się estymator zdefiniowany wzorem

$$\hat{q}_P = (0,5 + i - mr)Y_{i,m} + (0,5 - i + mr)Y_{i+1,m} , \quad (3.129)$$

gdzie $Y_{i,m}$ i $Y_{i+1,m}$ oznaczają statystyki pozycyjne, natomiast

$$i = [mr + 0,5] , \quad (3.130)$$

przy czym $[a]$ stanowi część całkowitą liczby $a \in \mathbb{R}$, natomiast dla ścisłości notacji zdefiniować można $Y_{m+1,m} = 0$. Dowód mocnej zgodności, a zatem także zgodności, opisanego powyżej estymatora, warunkowany bardzo słabymi założeniami, przedstawiono jako twierdzenie 8.6 w sekcji 8.2.2 dodatku B.

W przypadku projektowanego tu układu detekcji uszkodzeń, zmienna losowa Y przyjmuje wartości nieujemne, a zatem jeżeli

$$mr < 0,5 , \quad (3.131)$$

to formułę (3.129) można uzupełnić poprzez

$$\hat{q}_P = 2mrY_{1,m} . \quad (3.132)$$

Prawdziwe są bowiem wtedy zależności:

$$\lim_{mr \rightarrow 0^+} \hat{q}_P = 0 \quad (3.133)$$

$$\lim_{mr \rightarrow 0,5^-} \hat{q}_P = Y_{1,m} = \lim_{mr \rightarrow 0,5^+} \hat{q}_P . \quad (3.134)$$

Podobnie gdy

$$mr > m - 0,5, \quad (3.135)$$

dookreślić można

$$\hat{q}_P = Y_{m,m}. \quad (3.136)$$

(Biorąc jednak pod uwagę stosowane w praktyce poziomy istotności testów statystycznych, stanowiących w powyższym zagadnieniu o stopniu kwantyla r , wzory (3.135)-(3.136) mają tu jedynie formalne znaczenie.) Ponieważ warunki (3.128), (3.131) i (3.135) wyczerpują wszystkie możliwości, to opracowany niniejszym pozycyjny estymator kwantyla może być ostatecznie zdefiniowany w postaci:

$$\hat{q}_P = \begin{cases} 2mrY_{1,m} & \text{gdy } mr \leq 0,5 \\ (0,5 + i - mr)Y_{i,m} + (0,5 - i + mr)Y_{i+1,m} & \text{gdy } 0,5 \leq mr \leq m - 0,5, \\ Y_{m,m} & \text{gdy } mr \geq m - 0,5 \end{cases} \quad (3.137)$$

przy czym liczba i opisana jest formułą (3.130).

Analiza własności przedstawionych powyżej estymatorów kwantyla, jądrowego \hat{q}_J określonego poprzez równanie (3.113) i pozycyjnego \hat{q}_P danego wzorem (3.137), wskazuje, że ich zalety wzajemnie się uzupełniają:

- (1) porównanie pokazanych na rysunku 3.10 średnich błędów estymacji stanowi o przewadze estymatora jądrowego \hat{q}_J , zwłaszcza przy licznosciach prób mniejszych od 500;
- (2) jeżeli przy wyznaczaniu wartości estymatora \hat{q}_J stosowana jest procedura modyfikacji parametru wygładzania, to czas obliczeń okazuje się krótszy dla estymatora pozycyjnego \hat{q}_P ; (w praktyce projektowanego układu wykrywania uszkodzeń nie ma to wszakże istotnego znaczenia, ponieważ okres wstępnych obliczeń nie jest tu rygorystycznie limitowany);
- (3) wprost z definicji statystyki pozycyjnej wynika, że uzyskana wartość estymatora \hat{q}_P nie może wykraczać poza nośnik funkcji gęstości badanej zmiennej losowej, co wobec estymatora jądrowego nie jest w ogólnym przypadku zagwarantowane; (statystyka S_0 przyjmuje wartości nieujemne, a zatem ujemna wartość krytyczna a_0 dyskwalifikowałaby układ detekcji uszkodzeń).

Z punktu widzenia aplikacji inżynierskich szczególnego podkreślenia natomiast wymaga unifikacja aparatu matematycznego, użytego podczas konstruowania estymatora jądrowego \hat{q}_J , z procedurami wykorzystywanymi wcześniej do identyfikacji funkcji gęstości i dystrybuanty.

Ostatecznie: dla potrzeb projektowania układu detekcji, jako podstawowy warto uznać pozycyjny estymator kwantyla \hat{q}_P , określony wzorem (3.137). Jednak w wyrafinowanych zastosowaniach, gdy możliwa jest weryfikacja poprawności pozyskiwanych wyników, należy rekomendować dokładniejszy estymator jądrowy \hat{q}_J zdefiniowany

m \ r	0,1 (q = -1,28)		0,25 (q = -0,67)	
	(a) estymator jądrowy	(b) estymator pozytywny	(a) estymator jądrowy	(b) estymator pozytywny
5	0,532	0,533	0,416	0,418
10	0,378	0,363	0,296	0,328
20	0,266	0,263	0,213	0,229
50	0,175	0,179	0,138	0,154
100	0,126	0,132	0,099	0,107
200	0,088	0,092	0,069	0,075
500	0,056	0,059	0,045	0,048
1000	0,040	0,043	0,031	0,034

0,5 (q = 0)		0,75 (q = 0,67)		0,9 (q = 1,28)		r m
(a) estymator jądrowy	(b) estymator pozytywny	(a) estymator jądrowy	(b) estymator pozytywny	(a) estymator jądrowy	(b) estymator pozytywny	
0,378	0,430	0,414	0,419	0,535	0,538	5
0,268	0,293	0,295	0,326	0,382	0,371	10
0,200	0,222	0,212	0,228	0,276	0,281	20
0,125	0,138	0,136	0,148	0,174	0,187	50
0,089	0,099	0,097	0,106	0,128	0,136	100
0,064	0,070	0,070	0,078	0,088	0,095	200
0,041	0,044	0,045	0,048	0,057	0,062	500
0,029	0,031	0,032	0,034	0,040	0,044	1000

Rys. 3.10. Porównanie błędów estymacji kwantyla standardowego rozkładu normalnego dla:

- a) jądrowego estymatora \hat{q}_j zdefiniowanego poprzez równanie (3.113),
 b) pozytywnego estymatora \hat{q}_p danego wzorem (3.137).

równaniem (3.113).

Powracając do zagadnienia detekcji: po wprowadzeniu do warunku (3.107) oznaczenia

$$P_0(\{\omega \in \Omega : f_0(Z(\omega, j)) \leq a_0\}) = F_{f_0 \circ Z|_0}(a_0) , \quad (3.138)$$

przyjmuje on postać następującego kryterium:

$$F_{f_0 \circ Z|_0}(a_0) = \alpha_0 \quad . \quad (3.139)$$

W aspekcie aplikacyjnym funkcja gęstości f_0 i dystrybuanta $F_{f_0 \circ Z|_0}$ zastępowane są przez ich estymatory \hat{f}_0 oraz $\hat{F}_{\hat{f}_0 \circ Z|_0}$, a zatem powyższa zależność zapisana być może w formie równania

$$\hat{F}_{\hat{f}_0 \circ Z|_0}(\hat{a}_0) = \alpha_0 \quad , \quad (3.140)$$

przy czym jego rozwiązanie \hat{a}_0 stanowi estymator wielkości a_0 z kryterium (3.139). Dodatek D, przedłożony jako podrozdział 8.4, zawiera twierdzenie 8.8 stanowiące, że jeżeli wartości parametrów wygładzania h uzależnia się od liczności próby m w sposób gwarantujący spełnienie warunków

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0 \quad (3.141)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mh^n = \infty \quad , \quad (3.142)$$

to estymator ten jest mocno zgodny, a więc także zgodny. Powyższe dowodzi formalnej poprawności przedstawionej tu procedury detekcji uszkodzeń.

Tak więc, technika estymatorów jądrowych została wykorzystana w problemie detekcji dwukrotnie: przy określaniu funkcji gęstości definiującej postać statystyki testowej oraz opcjonalnie do wyznaczania wartości jej kwantyla. Parametry ustalane w obu tych przypadkach nie mają wzajemnego odniesienia i muszą być obliczane niezależnie.

Dzięki podobieństwu aparatu matematycznego stosowanego powyżej do zagadnień detekcji i diagnozy możliwe staje się wykorzystanie specjalistycznych procedur diagnozy w celu wspomoczenia uniwersalnego, a więc mniej dogodnie uwarunkowanego, testu detekcji.

Otóż, można oczekiwać, iż procedury diagnozy będą znacznie skuteczniejsze przy wykrywaniu przypisanego im typu uszkodzenia niż test detekcji, nie korzystający przeciw ze szczegółowych charakterystyk warunków wystąpienia tej nieprawidłowości. Z aplikacyjnego punktu widzenia, korzystne więc będzie rozważenie dla potrzeb detekcji zmodyfikowanej hipotezy H_0^* postaci

$$H_0^* = H_0 \wedge \sim H_1 \wedge \sim H_2 \wedge \dots \wedge \sim H_k \quad , \quad (3.143)$$

co w praktyce oznacza, że o poprawności działania nadzorowanego systemu stanowiłby pozytywny wynik weryfikacji hipotezy H_0 (dotychczasowa koncepcja detekcji) oraz negatywne rezultaty testów diagnozy. Z teoretycznego punktu widzenia, powyższa zmiana nie wprowadza nowych elementów, gdyż odrzucenie testowanych w ra-

mach diagnozy hipotez H_k było równoznaczne z przyjęciem hipotezy H_0 , a zatem

$$\sim H_k = H_0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, d \quad (3.144)$$

W praktyce natomiast, powyższa modyfikacja wzmacnia skuteczność układu detekcji uszkodzeń.

Dla potrzeb detekcji zaprojektowany został test istotności. Wynikiem takiego testu może być jedynie odrzucenie hipotezy H_0 , bez podjęcia decyzji o jej przyjęciu. Z aplikacyjnego punktu widzenia nie ma to zasadniczego znaczenia, bowiem przyjęcie oraz nieodrzućenie hipotezy H_0 skutkują jednakowo zaniechaniem realizacji czynności właściwych serwisowi uszkodzeń. Pewną niedogodność stanowi tu jednak brak możliwości ustalenia poziomu istotności α_0 poprzez porównanie prawdopodobieństw, a dzięki zależności analogicznej do wzoru (3.55) – skutków ekonomicznych błędów pierwszego i drugiego rodzaju. Ponieważ hipoteza H_0 , weryfikowana w trakcie detekcji, jest również hipotezą alternatywną testów diagnozy, to wartość parametru α_0 może być porównywana ze stałymi β_k , a zatem jako wstępne oszacowanie proponuje się przyjąć średnią:

$$\alpha_0 = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \beta_k \quad (3.145)$$

Ewentualne powiększenie tej wartości polepsza czułość układu detekcji, ale kosztem większej ilości fałszywych alarmów; zmniejszenie skutkuje przeciwnymi efektami. Parametry β_k można łatwo wyznaczyć w trakcie rozwiązywania równania (3.74) uwzględniając, iż – zgodnie ze wzorami (3.51) i (3.59) – wartość pierwszego czynnika lewej strony tego równania jest równa $1 - \beta_k$.

Ostatecznie, projektując układ statystycznej detekcji uszkodzeń należy wykonać następujące czynności:

- (1) ustalić poziom istotności α_0 ; można w tym celu wykorzystać wzór (3.145);
- (2) na drodze eksperymentalnej pozyskać wartości wektora symptomów $z_1^0, z_2^0, \dots, z_{m_0}^0$ w warunkach poprawnej pracy nadzorowanego systemu, przy czym liczność próby m_0 powinna stanowić kompromis pomiędzy dokładnością estymacji a kosztami ich pozyskania i późniejszą szybkością działania układu komputerowego, musi być jednak większa od przedstawionej na rysunku 3.6;
- (3) w oparciu o powyższą próbę wyznaczyć jądrowy estymator funkcji gęstości rozkładu zmiennych losowych $Z(\cdot, j)$ dla przypadku poprawnych warunków pracy, czyli odwzorowanie \hat{f}_0 ; postępowanie takie przedstawiono w podrozdziale 3.1; proponowane jest jądro normalne;
- (4) zdefiniować rzeczywisty proces stochastyczny Y_0 jako $Y_0 \equiv \hat{f}_0 \circ Z$;
- (5) wyznaczyć próbę losową dla zmiennych $Y_0(\cdot, j)$ w warunkach poprawnej pracy systemu, a zatem $\hat{f}_0(z_1^0), \hat{f}_0(z_2^0), \dots, \hat{f}_0(z_{m_0}^0)$;

- (6) na podstawie powyższej próby obliczyć wartość estymatora kwantyla rzędu α_0 zmiennych losowych $Y_0(\cdot, j)$; jeśli użyta zostanie koncepcja estymatora pozycyjnego, to ustala się porządek próby losowej (3.127), po czym podstawia odpowiednie wartości do wzoru (3.137) wraz z formułą (3.130); w przypadku stosowania estymatora jądrowego \hat{q}_j należy wykorzystać algorytm (3.115)-(3.116) ewentualnie ze zmianą (3.124) – dla rekomendowanego tu jądra eksponencjalnego (3.65) stała c_0 ustalona może być na podstawie zależności (3.120) z modyfikacją (3.126);
- (7) zdefiniować zbiór krytyczny A_0 zgodnie z zależnością (3.105), przyjmując jako wartość krytyczną a_0 , wyznaczoną w poprzednim punkcie wartość estymatora kwantyla.

Stosowanie układu detekcji uszkodzeń wobec urządzenia pracującego w czasie rzeczywistym polega na skutecznieniu w dowolnej chwili następującej procedury:

- (8) należy wyznaczyć dla aktualnego wektora symptomów Z wartość statystyki S_0 na podstawie wzoru (3.104), a następnie stwierdzić czy wartość ta należy do zbioru krytycznego A_0 ; w przypadku pozytywnego wyniku wnioskuje się o fałszywości hipotezy H_0 , a więc o niesprawności systemu, w przeciwnym razie brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 ; jeżeli zastosowana zostanie koncepcja zmodyfikowanej hipotezy H_0^* , to o zaistnieniu uszkodzenia świadczyć może dodatkowo pozytywny wynik weryfikacji którejkolwiek z hipotez diagnozy H_1, H_2, \dots, H_d , rozważanych w podrozdziale 3.3.

Czynności pozycji (8) są sukcesywnie powtarzane do momentu dezaktualizacji danych pozyskanych w punktach (2) i ewentualnie (1) – w tym przypadku należy powtórzyć powyższy algorytm.

Uwagi bibliograficzne

Podstawowe informacje dotyczące kwantyli znajdują się w monografii [46]. Dodatkowe komentarze na temat prezentowanego powyżej jądrowego estymatora kwantyla \hat{q}_j pozyskać można z prac [88, 90]. Jego realizacja za pomocą sztucznych sieci neuronowych jest przedmiotem opracowania [99], a w wersji warunkowej – publikacji [100, 135]. Opis innych koncepcji estymacji kwantyla oraz stosowaną literaturę przedmiotową pozyskać można z artykułów przeglądowych [36, 122, 136]. W szczególności, drugi z nich zawiera analizę porównawczą pozycyjnych estymatorów kwantyla, której wyniki pozytywnie wyróżniają postać (3.129).

Statystyki pozycyjne opisane są w większości podręczników z zakresu statystyki matematycznej, zwłaszcza [7, 46, 63]. Analiza własności testu, zaproponowanego tu dla potrzeb układu detekcji uszkodzeń, jest przedmiotem pracy [89].

4. PREDYKCJA USZKODZEŃ

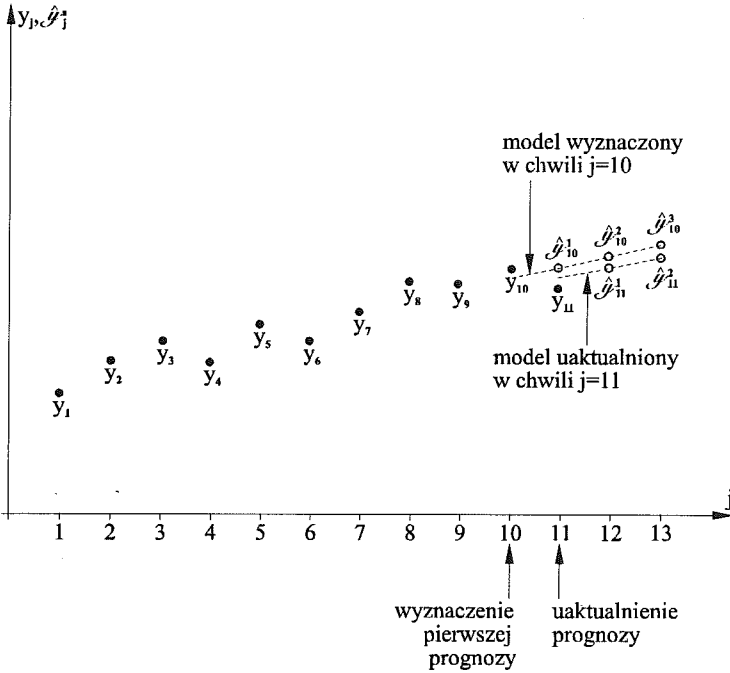
Poniższy rozdział poświęcony jest problemowi prognozowania możliwości pojawienia się w najbliższym czasie nieprawidłowości w działaniu nadzorowanego systemu, czyli zagadnieniu predykcji uszkodzeń. Zagadnienie to rozważane będzie zarówno w sensie detekcji jak i diagnozy – wyznaczone zatem będą prognozy wystąpienia samego uszkodzenia oraz poszczególnych, podlegających diagnozie, jego typów. Jako preliminaria, podrozdział 4.1 zawiera podstawy matematycznej teorii prognozowania. W podrozdziale 4.2 zostaną one wykorzystane do zaprojektowania układu predykcji uszkodzeń.

4.1. PROGNOZOWANIE STATYSTYCZNE

Przewidywanie przyszłych wydarzeń stanowi jedną z zasadniczych dziedzin ludzkiej działalności. Wraz z rozwojem nauk ścisłych, analiza różnorodnych zagadnień praktycznych, zwłaszcza z zakresu inżynierii i ekonomii, coraz powszechniej wspomagana jest matematyczną teorią prognozowania. Uzyskiwane obecnie wyniki charakteryzują się jednak znacznym stopniem probabilistycznej nieokreśloności i w wielu problemach aplikacyjnych są raczej traktowane jedynie jako materiał pomocniczy do wszechstronnych rozważań przedmiotowych. Poniżej zostaną scharakteryzowane najczęściej stosowane procedury statystycznego prognozowania: metoda regresji, modele ARIMA oraz prognozowanie bayesowskie (obejmujące używany również w tym celu filtr Kalmana). Wobec złożoności problemu, szczegółowo przedstawione będą tylko te elementy, które zostaną wykorzystane w dalszej części pracy do zagadnienia predykcji uszkodzeń.

Wielkość, której przyszłe wartości są przedmiotem badań prognostycznych, traktowana będzie jako dyskretny rzeczywisty proces stochastyczny Y . Jeżeli prognoza dokonywana jest w chwili j , to wymaga się wówczas dostępności empirycznie uzyskanych dla $1, 2, \dots, j$ wartości procesu Y , zwanych obserwacjami i oznaczanych (podobnie jak w przypadku próby losowej, z pominięciem zależności od czynnika losowego) przez y_1, y_2, \dots, y_j . Dysponując sekwencją obserwacji wyznacza się

prognozę \hat{y}_j^s , czyli estymator wartości procesu stochastycznego Y dla chwili $j+s$, przy czym parametr $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ określany jest mianem wyprzedzenia prognozy (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Prognozowanie statystyczne.

Metoda regresji opiera się na następującej dekompozycji badanego procesu stochastycznego:

$$\begin{aligned} Y(\omega, j) &= C^T g(j) + \varepsilon(\omega, j) = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i g_i(j) + \varepsilon(\omega, j) \quad \text{dla } \omega \in \Omega \text{ oraz } j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

przy czym ε reprezentuje biały szum, $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ oznacza n -wymiarowy wektor parametrów, natomiast funkcja $g: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ze składowymi g_1, g_2, \dots, g_n spełnia równanie różnicowe

$$g(j+1) = L g(j), \quad (4.2)$$

gdzie L jest macierzą o wymiarze $n \times n$. Wymaga się także, aby ilość dostępnych obserwacji była nie mniejsza niż wymiar wektora parametrów C , czyli n . Formuła (4.1) nosi nazwę modelu regresji. Proces stochastyczny Y jest zatem traktowany jako

suma deterministycznego odwzorowania $C^T g$ oraz losowych zakłóceń ε .

Funkcja g praktycznie zawsze zawiera składnik nieokresowy, określany mianem trendu, a ponadto może być uzupełniona o czynnik okresowy.

W przypadku trendu przyjmowane jest

$$g_i(j) = \frac{j^{i-1}}{(i-1)!} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n^* \quad , \quad (4.3)$$

gdzie $n^* \leq n$, a więc przy braku czynnika okresowego (wtedy $n^* = n$) otrzymuje się model wielomianowy

$$Y(\omega, j) = c_1 + c_2 j + c_3 \frac{j^2}{2} + \dots + c_{n^*} \frac{j^{n^*-1}}{(n^*-1)!} + \varepsilon(\omega, j) \quad , \quad (4.4)$$

przy czym macierz L o wymiarze $n^* \times n^*$ wyrazić można wzorem

$$L = [l_{k,m}] = \begin{cases} \frac{1}{(k-m)!} & \text{dla } k \geq m \\ 0 & \text{dla } k < m \end{cases} \quad . \quad (4.5)$$

W szczególności dla $n^* = 2$ uzyskuje się stosowany często przypadek liniowy

$$Y(\omega, j) = c_1 + c_2 j + \varepsilon(\omega, j) \quad . \quad (4.6)$$

Wtedy oczywiście:

$$g_1(j) = 1 \quad (4.7)$$

$$g_2(j) = j \quad (4.8)$$

oraz

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.9)$$

Jeżeli do modelu dołączany jest także czynnik okresowy, to składowe trendu (4.3) uzupełniane są przez

$$g_{n^*+2i-1}(j) = \sin\left(\frac{2\pi i}{T} j\right) \quad (4.10)$$

$$g_{n^*+2i}(j) = \cos\left(\frac{2\pi i}{T} j\right) \quad , \quad (4.11)$$

przy czym $i = 1, 2, \dots, n^{\sim}$, natomiast liczba $T \in (0, \infty)$ stanowi okres podstawowy. Wtedy dla $i = 1$ wyrażenia (4.10)-(4.11) reprezentują składową podstawową czynnika

okresowego, natomiast gdy $i = 2, 3, \dots, n^{\sim}$ – parami wyznaczają jego kolejne harmoniczne. Oczywiście, zgodnie z poczynionymi wcześniej oznaczeniami, spełniony powinien być warunek

$$n = n^* + 2n^{\sim} \quad (4.12)$$

Po ewentualnym dołączeniu czynnika okresowego, macierz L przyjmuje postać blokowo-diagonalną

$$L = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & L_{n^{\sim}} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

gdzie L_0 oznacza podmacierz postaci (4.5) związaną z trendem, natomiast $L_1, L_2, \dots, L_{n^{\sim}}$ przypisane są do poszczególnych składowych czynnika okresowego i wyrażają się wzorem

$$L_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi i}{T}\right) & \sin\left(\frac{2\pi i}{T}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi i}{T}\right) & \cos\left(\frac{2\pi i}{T}\right) \end{bmatrix} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n^{\sim} \quad (4.14)$$

Wtedy też zależność (4.4) przybiera formę

$$Y(\omega, j) = c_1 + c_2 j + c_3 \frac{j^2}{2} + \dots + c_n \frac{j^{n^*-1}}{(n^* - 1)!} + \sum_{i=1}^{n^{\sim}} \left[c_{n^*+2i-1} \sin\left(\frac{2\pi i}{T} j\right) + c_{n^*+2i} \cos\left(\frac{2\pi i}{T} j\right) \right] + \varepsilon(\omega, j) \quad (4.15)$$

W szczególności, jeżeli do modelu liniowego (4.6) dołączony zostanie czynnik okresowy zawierający jedynie składową podstawową, to otrzymuje się

$$Y(\omega, j) = c_1 + c_2 j + c_3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} j\right) + c_4 \cos\left(\frac{2\pi}{T} j\right) + \varepsilon(\omega, j) \quad (4.16)$$

Wtedy oczywiście

$$g_1(j) = 1 \quad (4.17)$$

$$g_2(j) = j \quad (4.18)$$

$$g_3(j) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} j\right) \quad (4.19)$$

$$g_4(j) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} j\right) , \quad (4.20)$$

a także na podstawie wzorów (4.13) oraz (4.9) i (4.14):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) \end{bmatrix} . \quad (4.21)$$

Prognoza \hat{y}_j^s , wyznaczana w chwili j z wyprzedzeniem s , określana jest w sposób naturalny jako

$$\hat{y}_j^s = \hat{C}_j^T g(s) , \quad (4.22)$$

gdzie \hat{C}_j oznacza estymator wektora parametrów C dany w chwili j . Jego wartość ustala się stosując kryterium minimalizacji funkcjonału średniokwadratowego

$$E\left(\sum_{i=0}^{j-1} w^i \left(y_{j-i} - \hat{C}_j^T g(-i)\right)^2\right) , \quad (4.23)$$

przy czym współczynnik $w \in (0,1]$ zwany jest parametrem dezaktualizacji. Wyrażenie w^i sprawia bowiem, że jeśli $w \in (0,1)$, to poszczególnym obserwacjom y_j, y_{j-1}, \dots, y_1 przyporządkowywane są malejące wagi w^0, w^1, \dots, w^{j-1} , zmniejszające ich znaczenie w miarę utraty aktualności. (Gdy $w = 1$, wpływ poszczególnych obserwacji pozostaje taki sam.)

Uzyskany na podstawie powyższego kryterium estymator \hat{C}_j jest nieobciążony i wyraża się wzorem

$$\hat{C}_j = D_j^{-1} d_j , \quad (4.24)$$

przy czym macierze D_j i d_j , odpowiednio o wymiarach $n \times n$ i $n \times 1$, dane są w postaci

$$D_j = \sum_{k=0}^{j-1} w^k g(-k) g^T(-k) \quad (4.25)$$

$$d_j = \sum_{k=0}^{j-1} w^k g(-k) y_{j-k} \quad (4.26)$$

Po pozyskaniu w chwili $j+1$ kolejnej obserwacji y_{j+1} , wyznaczana dzięki wzorom (4.22) i (4.24)-(4.26) prognoza może być uaktualniona za pomocą nieskomplikowanego algorytmu (rys. 4.1). Otóż, zależności (4.22) i (4.24) określające prognozę, podlegają jedynie dopasowaniu wskaźników

$$\hat{\mathcal{Y}}_{j+1}^s = \hat{C}_{j+1}^T g(s) \quad (4.27)$$

$$\hat{C}_{j+1} = D_{j+1}^{-1} d_{j+1} \quad (4.28)$$

natomiast macierze D_j oraz d_j zmieniane są zgodnie ze wzorami

$$D_{j+1} = D_j + w^j g(-j) g^T(-j) \quad (4.29)$$

$$d_{j+1} = wL^{-1} d_j + g(0) y_{j+1} \quad (4.30)$$

Warto zauważyć, że występująca w powyższym wzorze macierz L nie zależy od parametru j , a zatem jej odwrotność obliczana może być tylko jeden raz podczas wstępnego etapu ustalania postaci modelu. (Co więcej, jest to o tyle nieskomplikowane, że macierz ta jest blokowo-diagonalna.) Jeżeli $w \in (0,1)$, to dla dostatecznie dużych j wprowadzić można procedurę eliminującą także konieczność obliczania w każdym kroku odwrotności macierzy D_j . Mianowicie, w przypadku funkcji g_i typu potęgowego i trygonometrycznego, ciąg $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ jest zbieżny:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} D_j = D \quad (4.31)$$

przy czym

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} w^k g(-k) g^T(-k) \quad (4.32)$$

a zatem dla dużych wartości j , zmiany macierzy D_j stają się w praktyce pomijalne. Modyfikacja wartości estymatora \hat{C}_j , określana wzorami (4.28)-(4.30), jest wtedy równoważna pojedynczej zależności:

$$\hat{C}_{j+1} = L^T \hat{C}_j + D^{-1} g(0) (y_{j+1} - \hat{y}_j^1) \quad (4.33)$$

Interpretując powyższy wzór łatwo zauważyć, że aktualizacja prognozy polega nie tylko na przesunięciu wskaźników (składnik $L^T \hat{C}_j$), ale także jest reakcją na popełniane błędy – wyrażenie $y_{j+1} - \hat{y}_j^1$ oznacza bowiem błąd ostatniej prognozy dla jednostkowego wyprzedzenia.

Samą macierz D można wyznaczyć bezpośrednio z jej definicji (4.32), wykorzystując sumy szeregów podanych na rysunku 4.2. W szczególności dla modelu liniowego określonego zależnością (4.6), otrzymuje się

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} w^k \begin{bmatrix} 1 \\ -k \end{bmatrix} [1 \quad -k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-w} & \frac{-w}{(1-w)^2} \\ \frac{-w}{(1-w)^2} & \frac{w(1+w)}{(1-w)^3} \end{bmatrix}; \quad (4.34)$$

wtedy

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1-w^2 & (1-w)^2 \\ (1-w)^2 & \frac{(1+w)^3}{w} \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

natomiast wyrażenie $D^{-1}g(0)$ występujące we wzorze (4.33) wynosi

$$D^{-1}g(0) = \begin{bmatrix} 1-w^2 \\ (1-w)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

W przypadku dołączenia do modelu liniowego czynnika okresowego składającego się jedynie ze składowej podstawowej (4.16), macierz D przyjmuje postać

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} w^k \begin{bmatrix} 1 \\ -k \\ -\sin\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -k & -\sin\left(\frac{2\pi k}{T}\right) & \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \end{bmatrix} = \quad (4.37)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-w} & \frac{-w}{(1-w)^2} & \frac{-w \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1} & \frac{1-w \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1} \\ \frac{-w}{(1-w)^2} & \frac{w(1+w)}{(1-w)^3} & \frac{w(1-w^2) \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1^2} & \frac{2w^2 - w(1+w^2) \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1^2} \\ \frac{-w \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1} & \frac{w(1-w) \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1^2} & \frac{1}{2(1-w)} - \frac{1-w \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T}\right)}{c_2} & \frac{w \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T}\right)}{c_2} \\ \frac{1-w \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1} & \frac{2w^2 - w(1+w^2) \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{c_1^2} & \frac{w \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T}\right)}{c_2} & \frac{1}{2(1-w)} + \frac{1-w \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T}\right)}{c_2} \end{bmatrix},$$

Szereg	Suma szeregu
$\sum_{k=0}^{\infty} w^k$	$\frac{1}{1-w}$
$\sum_{k=0}^{\infty} kw^k$	$\frac{w}{(1-w)^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 w^k$ (*)	$\frac{w(1+w)}{(1-w)^3}$
$\sum_{k=0}^{\infty} w^k \sin(\omega k)$	$\frac{w \sin \omega}{1-2w \cos \omega + w^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} w^k \cos(\omega k)$	$\frac{1-w \cos \omega}{1-2w \cos \omega + w^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} kw^k \sin(\omega k)$	$\frac{w(1-w^2) \sin \omega}{(1-2w \cos \omega + w^2)^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} kw^k \cos(\omega k)$	$-\frac{2w^2 - w(1+w^2) \cos \omega}{(1-2w \cos \omega + w^2)^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} w^k \sin(\omega^- k) \sin(\omega^{\approx} k)$	$-\frac{1}{2} \left[\frac{1-w \cos(\omega^- + \omega^{\approx})}{1-2w \cos(\omega^- + \omega^{\approx}) + w^2} - \frac{1-w \cos(\omega^- - \omega^{\approx})}{1-2w \cos(\omega^- - \omega^{\approx}) + w^2} \right]$
$\sum_{k=0}^{\infty} w^k \sin(\omega^- k) \cos(\omega^{\approx} k)$	$\frac{1}{2} \left[\frac{w \sin(\omega^- + \omega^{\approx})}{1-2w \cos(\omega^- + \omega^{\approx}) + w^2} + \frac{w \sin(\omega^- - \omega^{\approx})}{1-2w \cos(\omega^- - \omega^{\approx}) + w^2} \right]$
$\sum_{k=0}^{\infty} w^k \cos(\omega^- k) \cos(\omega^{\approx} k)$	$\frac{1}{2} \left[\frac{1-w \cos(\omega^- + \omega^{\approx})}{1-2w \cos(\omega^- + \omega^{\approx}) + w^2} + \frac{1-w \cos(\omega^- - \omega^{\approx})}{1-2w \cos(\omega^- - \omega^{\approx}) + w^2} \right]$

przy czym $\omega, \omega^-, \omega^{\approx} \in (0, \infty)$. Dowolny szereg będący elementem macierzy D , może być sprowadzony do jednej z powyższych postaci za pomocą różniczkowania, często wielokrotnego.

Jako przykład rozważony zostanie szereg potęgowy $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 w^k$; prawdziwa jest zależność

$$\frac{\partial}{\partial w} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 w^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial w} k^2 w^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^3 w^{k-1},$$

a zatem korzystając ze wzoru (*) otrzymuje się

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^3 w^k = w \frac{\partial}{\partial w} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 w^k = w \frac{\partial}{\partial w} \frac{w(1+w)}{(1-w)^3} = \frac{w(1+4w+w^2)}{(1-w)^4}.$$

(Niemał jednostajna zbieżność powyższych szeregów jest zapewniona dla $w \in (0, 1)$.)

Rys. 4.2. Sumy szeregów wykorzystywane przy wyznaczaniu macierzy D .

gdzie

$$c_1 = 1 - 2w \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) + w^2 \quad (4.38)$$

$$c_2 = 2 \left(1 - 2w \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T}\right) + w^2 \right) \quad (4.39)$$

Aczkolwiek – jak wspomniano – z formalnego punktu widzenia wystarczy założyć, iż liczba dostępnych obserwacji jest nie mniejsza od wymiaru wektora parametrów, to w praktyce powinna być ona możliwie jak największa, a jako minimum przyjmuje się $20+n$, w wyjątkowych przypadkach $10+n$.

Tak więc w celu ostatecznego ustalenia procedury prognozowania metodą regresji, konieczne jest wyznaczenie wartości parametrów s , w , n^* , n^{\sim} oraz T . Należy jednak zaznaczyć, że istniejące reguły nie mają charakteru absolutnego i czynnościom tym nie powinny być także obce elementy bazujące na inżynierskiej wyobraźni.

Przyjęcie konkretnej wartości parametru wyprzedzenia s wynika ściśle z uwarunkowań aplikacyjnych. Jego specyfikacja nie stanowi jednak nadmiernego utrudnienia, gdyż bez znaczącego wzrostu komplikacji obliczeń możliwe jest wyznaczenie prognoz dla wielu wartości tego parametru, także dla całego przedziału pokrywającego zakres zainteresowań użytkownika. Należy jednak podkreślić, że w miarę wzrostu wartości wyprzedzenia, dokładność otrzymywanej prognozy maleje, czasem dosyć gwałtownie.

Wyznaczenie wartości okresu podstawowego T jedynie na podstawie zbioru obserwacji procesu stochastycznego Y nie rokuje nadziei na zadowalający rezultat. W praktyce wartość parametru T określa się poprzez analizę zjawisk o charakterze fizycznym i technologicznym, towarzyszących badanemu procesowi. Formułowany jest wręcz osąd, że jeżeli takie postępowanie nie prowadzi do wiarygodnych wyników, to należy zrezygnować ze stosowania czynnika okresowego, traktując go jako część zakłóceń losowych ε (co jednak zmniejsza dokładność prognozy).

Wartości parametrów n^* oraz n^{\sim} , a więc poprzez zależność (4.12) także n , ustalane są najczęściej na podstawie wieloelementowej analizy, gdzie ze świadomą tendencją do nadmiernego powiększenia określane są wstępnie ich oszacowania, po czym testuje się istotność współczynników przy największych potęgach wielomianu trendu i najwyższych harmonicznych czynnika okresowego.

Wspomnianą analizę oprzeć można na szeregu wskazań użytecznych w większości zastosowań.

I tak, poza specjalnymi przypadkami, unika się stosowania wartości parametru n^* większych niż 3. Wynika to z powszechnej cechy aproksymacji na przedziałach skończonych stanowiącej, iż funkcja mająca zbyt wiele stopni swobody nie zapewnia dokładności przybliżenia przy krańcach takiego przedziału. Zwłaszcza w zagadnie-

niach prognozy, powyższa własność dyskwalifikuje użycie wielomianów o wysokich stopniach. Co więcej, nawet wartość $n^* = 3$ stosowana powinna być z zachowaniem dużego marginesu ostrożności. Z kolei gdy $n^* = 1$, każda prognoza zawarta jest pomiędzy minimalną i maksymalną wartością dotychczasowych obserwacji, co poważnie ogranicza możliwości aplikacyjne takiego modelu. Nie jest więc przypadkiem, że model liniowy, dla $n^* = 2$, stał się zdecydowanie dominującym w praktyce prognozowania.

Ocenę wartości parametru n^* uzyskać można analizując wykres przyrostów pozyskanych obserwacji. W zależności od tego, czy różnice $y_{j+1} - y_j$ oscylują wokół zera, czy też wzdłuż stałej lecz niezerowej wartości, albo mają tendencję rosnącą, powinno to wstępnie zasugerować odpowiednio $n^* = 1, 2$ lub 3 .

Podobne wskazówki sformułować można w odniesieniu do parametru n^{\sim} . Przede wszystkim, jego wartość jest ograniczona tzw. warunkiem Nyquista:

$$n^{\sim} \leq \frac{T}{2} \quad (4.40)$$

Jak wynika ze wzorów (4.10)-(4.11), niniejszym eliminowane są bowiem te harmoniczne, których okresy nie zawierają nawet dwóch wartości zmiennej niezależnej j , a więc nieidentyfikowalne za pomocą modeli dyskretnych.

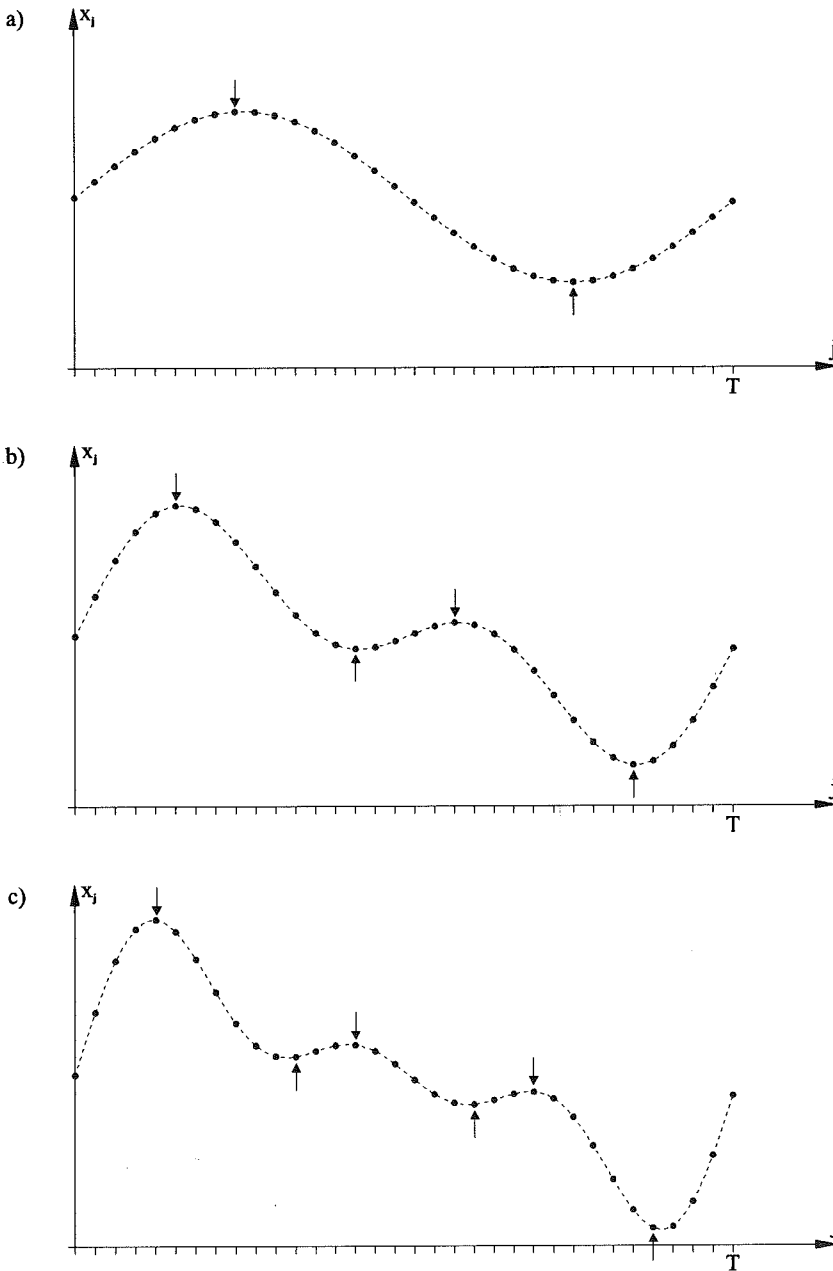
Wstępne oszacowanie wartości parametru n^{\sim} uzyskać można interpretując wykres dotychczasowych obserwacji. Wartość ta powinna być równa liczbie powtarzających się lokalnych maksimum lub – jeśli łatwiej to zaobserwować – minimum. Uzasadnienie powyższej reguły ilustruje rysunek 4.3.

W praktyce ilość rozważanych harmonicznych najczęściej nie przekracza trzech (wtedy $n^{\sim} = 4$), w wyjątkowych przypadkach pięciu (czyli $n^{\sim} = 6$).

Ścisłą analizę występujących harmonicznych przeprowadzić można, po ustaleniu trendu (wyznaczonego z pominięciem czynnika okresowego), rozważając wobec procesu stochastycznego

$$Y(\omega, j) = c_1 - c_2 j - c_3 \frac{j^2}{2} - \dots - c_{n^*} \frac{j^{n^*-1}}{(n^* - 1)!} \quad (4.41)$$

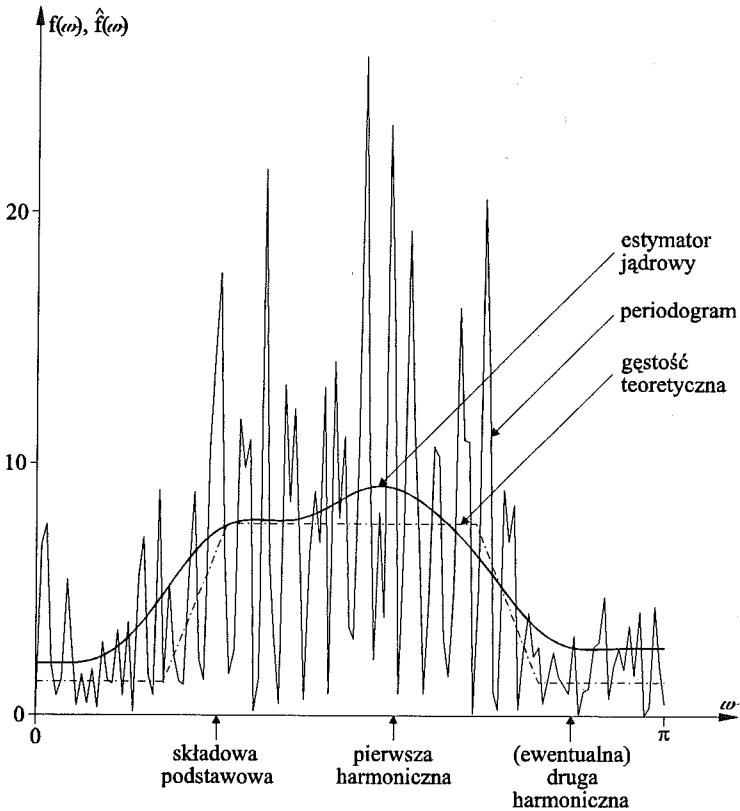
pojęcie gęstości spektralnej, czyli mierzalnej funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że wartość całki $\int_a^b f(\omega) d\omega$ interpretuje się jako łączną moc, a ściślej – wariancję, składowych okresowych o częstotliwościach ω z przedziału $[a, b]$. Częstotliwość najwyższej harmonicznej, czyli $\frac{2\pi n^{\sim}}{T}$, powinna być zatem zbliżona do kresu górnego nośnika gęstości spektralnej. W praktyce należy jednak pamiętać o częstej obecności zakłóceń o charakterze szumu białego, którego gęstość spektralna jest funkcją stałą. Przeciw-



Rys. 4.3. Czynniki okresowe złożony z:

- a) składowej podstawowej ($n^- = 1$),
- b) składowej podstawowej i jednej harmonicznej ($n^- = 2$),
- c) składowej podstawowej i dwóch harmonicznych ($n^- = 3$).

działając temu zjawisku, powyższy nośnik powinien być ustalany dla funkcji f pomniejszonej o wynikającą stąd stałą (rys. 4.4).



Rys. 4.4. Teoretyczna gęstość spektralna, jej periodogram oraz estymator jądrowy.

Najczęściej stosowane estymatory gęstości spektralnej definiowane są jako funkcje $\hat{f}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ następującej postaci:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-m+1}^{m-1} c_i \left(1 - \frac{|i|}{m}\right) r(|i|) \cos(i\omega), \quad (4.42)$$

przy czym

$$r(i) = \frac{1}{m-i} \sum_{k=1}^{m-i} y_k y_{k+i} - \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k\right)^2 \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.43)$$

współczynniki c_i są rzeczywiste, natomiast m oznacza ilość obserwacji na podstawie których dokonuje się analizy spektralnej. Ograniczenie dziedziny przez liczbę π ,

wynika z tych samych przesłanek co warunek (4.40).

Jeżeli $c_i \equiv 1$, to wzór (4.42) reprezentuje najprostszą postać estymatora, zwaną periodogramem (rys. 4.4). Jest on estymatorem jedynie asymptotycznie nieobciążonym, a jego wykres ma kształt bardzo nieregularny i może przyjmować wartości ujemne, co pozostaje w jawnej sprzeczności z własnościami gęstości spektralnej. Aby wyeliminować powyższe niedogodności, wprowadza się estymatory jądrowe gęstości spektralnej, powstałe z zastosowania wobec periodogramu koncepcji estymatorów jądrowych, przedstawionej w podrozdziale 3.1. Przekształcenia oparte na transformacji Fouriera implikują, iż współczynniki c_i występujące we wzorze (4.42) przyjmują postać

$$c_i = \mathcal{K}\left(\frac{i}{h}\right), \quad (4.44)$$

gdzie $\mathcal{K}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwrotną transformatą Fouriera pewnego jądra K , natomiast stałą $h \in (0, \infty)$ wyznacza się empirycznie w celu odpowiedniego wygładzenia wykresu. Szczególnie korzystne własności charakteryzują odwzorowanie \mathcal{K} postaci

$$\mathcal{K}(y) = \begin{cases} 1 - 6y^2 + 6|y|^3 & \text{gdy } |y| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |y|)^3 & \text{gdy } \frac{1}{2} \leq |y| \leq 1, \\ 0 & \text{gdy } |y| \geq 1 \end{cases}, \quad (4.45)$$

natomiast jako wstępne oszacowanie parametru h przyjąć można liczbę $5m^{1/5}$. Zwiększenie jego wartości może skutkować pojawieniem się nadmiernej ilości lokalnych ekstremów, podczas gdy zmniejszenie implikuje zbyt duże wygładzenie maskujące rzeczywisty charakter estymowanej funkcji. Jeżeli wartość parametru h uzależnia się od liczności próby losowej m tak aby spełnione były warunki

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = \infty \quad (4.46)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h}{m} = 0, \quad (4.47)$$

to jądrowy estymator gęstości spektralnej jest asymptotycznie nieobciążony i, co najważniejsze, zgodny.

Estymatory gęstości spektralnej mogą okazać się także użyteczne podczas wzmiankowanej wcześniej analizy zjawisk o charakterze fizycznym i technologicznym, prowadzącej do specyfikacji okresu podstawowego T . Wtedy, częstotliwość odpowiadająca wartości T powinna być zbliżona do dolnego kresu nośnika gęstości spektralnej (rys. 4.4).

Jak wspomniano, wartości parametrów n^* oraz n^{\sim} wyznacza się ze świadomą tendencją do nadmiernego powiększenia, a następnie kolejno weryfikowane są istotności współczynników przy największych potęgach wielomianu trendu i najwyższych harmonicznych czynnika okresowego. W przypadku stwierdzenia nieistotności któregoś z tych współczynników, odpowiadający mu składnik jest usuwany z modelu.

Niech więc testowana hipoteza \mathcal{H} stanowi, że k założonych składników rozważanego modelu regresji jest nieistotnych, czyli odpowiednie współrzędne n -wymiarowego wektora parametrów $\hat{C} = [\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n]^T$ równe są zero:

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \dots = \hat{c}_k = 0 \quad . \quad (4.48)$$

Niech ponadto

$$e_M = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} w^i \left(y_{m-i} - \hat{C}_m^T g(-i) \right)^2 \quad (4.49)$$

oznacza, w nawiązaniu do warunku (4.23), błąd średniokwadratowy modelu regresji M , wyznaczony na podstawie m obserwacji. Rozważane będą dwa modele: podstawowy (pełny), oznaczany jako M_p , oraz model zredukowany M_r powstały z podstawowego przy założeniu prawdziwości warunków (4.48).

Uwzględniając tymczasowo zależność obserwacji, a zatem także powyższego błędu średniokwadratowego, od czynnika losowego ω , zdefiniować można statystykę testową $\mathcal{S} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ następującym wzorem:

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{m-n}{k} \frac{e_{M_r}(\omega) - e_{M_p}(\omega)}{e_{M_p}(\omega)} \quad (4.50)$$

Ma ona rozkład $F(k, m-n)$, czyli rozkład Snedecora z $(k, m-n)$ stopniami swobody. Przeciw hipotezie \mathcal{H} świadczą oczywiście duże wartości statystyki \mathcal{S} , a zatem zbiór krytyczny \mathcal{A} określony zostanie w formie prawostronnej:

$$\mathcal{A} = [a, \infty) \quad , \quad (4.51)$$

przy czym dla ustalonego poziomu istotności $\alpha \in (0,1)$ wartość krytyczna a jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu $F(k, m-n)$, który dla preferowanych w praktyce wielkości 0,01, 0,02, 0,05, 0,1 może być odczytany z tablic zamieszczonych na rysunku 4.5. Jako podstawową traktować należy wartość 0,05. Jej ewentualne zmniejszenie skutkuje niebezpieczeństwem uwzględnienia mało znaczącego współczynnika, natomiast zwiększenie może spowodować odrzucenie istotnego składnika modelu regresji. Obie te ewentualności mają negatywny wpływ na jakość prognozy. Przesadna redukcja stopnia wielomianu trendu i ilości harmonicznych ogranicza bowiem możliwość dopasowania modelu regresji do istniejącej rzeczywistości. Przeciwnie działanie

$\alpha = 0,01$			$\alpha = 0,02$			$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,1$		
m-n	k		m-n	k		m-n	k		m-n	k	
	1	2		1	2		1	2		1	2
10	10,04	7,56	10	7,64	5,93	10	4,96	4,10	10	3,28	2,92
11	9,65	7,21	11	7,39	5,70	11	4,86	3,98	11	3,23	2,86
12	9,33	6,93	12	7,19	5,52	12	4,75	3,89	12	3,18	2,81
13	9,07	6,70	13	7,02	5,37	13	4,67	3,81	13	3,14	2,76
14	8,86	6,51	14	6,89	5,24	14	4,60	3,74	14	3,10	2,73
15	8,68	6,36	15	6,77	5,14	15	4,54	3,68	15	3,07	2,70
16	8,53	6,23	16	6,67	5,05	16	4,49	3,63	16	3,05	2,67
17	8,40	6,11	17	6,59	4,97	17	4,45	3,59	17	3,03	2,64
18	8,29	6,01	18	6,51	4,90	18	4,41	3,55	18	3,01	2,62
19	8,18	5,93	19	6,45	4,84	19	4,38	3,52	19	2,99	2,61
20	8,10	5,85	20	6,39	4,79	20	4,35	3,49	20	2,97	2,59
22	7,95	5,72	22	6,29	4,70	22	4,30	3,44	22	2,95	2,56
24	7,82	5,61	24	6,21	4,62	24	4,26	3,40	24	2,93	2,54
26	7,72	5,53	26	6,14	4,56	26	4,23	3,37	26	2,91	2,52
28	7,64	5,45	28	6,09	4,51	28	4,20	3,34	28	2,89	2,50
30	7,56	5,39	30	6,04	4,47	30	4,17	3,32	30	2,88	2,49
35	7,42	5,27	35	5,94	4,38	35	4,12	3,27	35	2,85	2,46
40	7,31	5,18	40	5,87	4,32	40	4,08	3,23	40	2,84	2,44
45	7,23	5,11	45	5,82	4,27	45	4,06	3,20	45	2,82	2,42
50	7,17	5,06	50	5,78	4,23	50	4,03	3,18	50	2,81	2,41
60	7,08	4,98	60	5,71	4,18	60	4,00	3,15	60	2,79	2,39
80	6,96	4,88	80	5,64	4,11	80	3,96	3,11	80	2,77	2,37
100	6,90	4,82	100	5,59	4,07	100	3,94	3,09	100	2,76	2,36
200	6,76	4,71	200	5,50	3,99	200	3,89	3,04	200	2,73	2,33
500	6,69	4,65	500	5,45	3,94	500	3,86	3,01	500	2,72	2,31
∞	6,63	4,61	∞	5,41	3,91	∞	3,84	3,00	∞	2,71	2,30

Rys. 4.5. Kwantyl stopnia $1 - \alpha$ dla rozkładu $F(k, m - n)$.

powoduje natomiast, że każde zakłócenie oddziałujące na nadmierną ilość składników trendu i czynnika okresowego, zwiększa probabilistyczną nieokreśloność prognozy.

W przypadku niestosowania czynnika okresowego, testuje się kolejno istotność współczynników przy najwyższych potęgach wielomianu trendu, aż do odrzucenia hipotezy \mathcal{H} . Jeżeli natomiast przyjęty model regresji zawiera czynnik okresowy, to na ogół jednocześnie testuje się dwie hipotezy: pierwszą, dotyczącą istotności współczynnika przy największej potędze wielomianu trendu oraz drugą, stanowiącą o istotności obu współczynników związanych z najwyższą harmoniczną. Jeśli obydwie hipotezy zostaną odrzucone, to procedura ulega zakończeniu. W przypadku nie odrzucenia tylko jednej z nich, usunięty zostaje odpowiedni składnik trendu lub harmoniczna. Natomiast gdy żadna z testowanych hipotez nie może być odrzucona, eliminowany jest wtedy czynnik trendu albo harmoniczna w zależności od tego, dla którego testu większe okazuje się wyrażenie

$$\frac{\mathcal{J}(\omega) - a}{a} \quad (4.52)$$

I wreszcie, jeżeli testowanie hipotez przeprowadzane jest jedynie w celu ustalenia ilości harmoniczných, to testuje się kolejno istotność obu współczynników związanych z najwyższą harmoniczną, aż do uzyskania wyniku negatywnego.

Ostatnią stałą, której wartość wymaga ustalenia, stanowi parametr dezaktualizacji w . Przeważnie określa się go korzystając z heurystycznego wzoru

$$w = v^{1/n} \quad (4.53)$$

przy czym najczęściej $v \in [0,7, 0,99]$, a szczególnie preferowane jest $v = 0,9$. Zmniejszenie wartości v polepsza perspektywy dopasowywania się modelu do zachodzących zmian, jednak w równym stopniu zwiększa jego wrażliwość na zakłócenia. Przeciwny rezultat byłby wynikiem powiększenia tej wartości.

Interesujący z praktycznego punktu widzenia kompromis osiągnąć można stosując adaptację parametru dezaktualizacji. W tym celu sukcesywnie wyznaczane są wartości

$$z_j = \left| \frac{\tilde{z}_j}{z_j^\infty} \right| \quad \text{dla } j = j^*, j^* + 1, \dots \quad (4.54)$$

gdzie

$$\tilde{z}_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } j = j^* \\ (1-u) e_j + u z_{j-1}^\infty & \text{dla } j = j^* + 1, j^* + 2, \dots \end{cases} \quad (4.55)$$

$$z_j^\infty = \begin{cases} |e_{j^*+1}| & \text{dla } j = j^* \\ (1-u) |e_j| + u z_{j-1}^\infty & \text{dla } j = j^* + 1, j^* + 2, \dots \end{cases} \quad (4.56)$$

$$e_j = \hat{y}_{j-1}^1 - y_j \quad \text{dla } j = j^*, j^* + 1, \dots, \quad (4.57)$$

przy czym $j^* \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ oznacza chwilę rozpoczęcia procedury adaptacyjnej, $u \in (0,1)$, a także dodatkowo definiuje się

$$\frac{0}{0} = 0. \quad (4.58)$$

Wartość parametru w wyznaczona dla chwili j , oznaczana jest wówczas przez w_j i ustalana zgodnie z następującą formułą:

$$w_j = (1 - z_j)^{1/n}. \quad (4.59)$$

Standardowo przyjmuje się $u = 0,9$, a ogólniej $u \in [0,8, 0,95]$. Należy podkreślić, że aczkolwiek ewentualne zmiany tej wartości implikują podobne skutki do opisanych powyżej dla parametru v , to wpływ tych zmian na licznik i mianownik ułamka występującego we wzorze (4.54) ulega w znacznym stopniu zrównoważeniu. (Oczywiście, stosowanie przedstawionej powyżej procedury adaptacyjnej uniemożliwia wykorzystanie asymptotycznej koncepcji zmian estymatora \hat{C}_j danej zależnościami (4.31)-(4.33), gdyż przy definiowaniu macierzy granicznej D formułą (4.32) zakładana była stała wartość parametru w .)

Podczas procesu wyznaczania kolejnych prognoz, wielkość z_j może być traktowana jako miernik poprawności używanego modelu regresji. Częste lub długotrwałe przekraczanie poziomu 0,2, a zwłaszcza 0,4 wskazuje, iż aktualny model nie odpowiada rzeczywistości i powinien być zmieniony. W przeciwnym przypadku, uzyskiwane z jego wykorzystaniem wyniki nie mogą być uznawane za w pełni wiarygodne. Odczytywane sukcesywnie przez obsługę wartości z_j nazywane są sygnałem śledzenia.

Przedstawiona powyżej metoda regresji znajduje duże uznanie wśród praktyków zajmujących się zagadnieniami prognozowania. Okazuje się bowiem, że jest sposobem tyleż nieskomplikowanym w użyciu, co skutecznym. Wśród wielu jej zalet zwraca uwagę szybkość algorytmów obliczeniowych, stosunkowo mała wrażliwość na zmiany badanego procesu stochastycznego, a przede wszystkim prostota i nikła – jak na sztukę prognozowania statystycznego – uznaniowość przy określaniu modelu i jego parametrów.

Znacznie bardziej złożoną metodę prognozowania reprezentuje grupa algorytmów opartych na modelach ARIMA. Dla ustalonych parametrów $p, d, q \in \mathbb{N}$, podstawową postać takiego modelu definiuje się jako

$$\begin{aligned} (1 - a_1 D - a_2 D^2 - \dots - a_p D^p)(1 - D)^d Y(\cdot, j) = \\ = b_0 + (1 - b_1 D - b_2 D^2 - \dots - b_q D^q) \varepsilon(\cdot, j), \end{aligned} \quad (4.60)$$

gdzie ε oznacza biały szum, D stanowi operator opóźnienia, czyli w przypadku proce-

su stochastycznego Y spełnia zależność

$$D^c(Y(\cdot, j)) \equiv Y(\cdot, j-c) \quad \text{dla } c=1,2,\dots,j-1, \quad (4.61)$$

natomiast wektory parametrów $a=[a_1, a_2, \dots, a_p]^T$ oraz $b=[b_0, b_1, \dots, b_q]^T$ należą do zbiorów $A \subset \mathbb{R}^p$ oraz $B \subset \mathbb{R}^{q+1}$, przy czym postaci tych zbiorów są takie aby moduły pierwiastków równań

$$1 - a_1 y - a_2 y^2 - \dots - a_p y^p = 0 \quad (4.62)$$

$$1 - b_1 y - b_2 y^2 - \dots - b_q y^q = 0 \quad (4.63)$$

były większe od 1. Interpretacja definicji (4.60) stanowi, iż aktualna wartość procesu stochastycznego Y jest liniową kombinacją jego poprzednich wartości oraz obecnej i przeszłych wartości zakłóceń ε . Prognozę otrzymuje się z powstałego stąd równania rekurencyjnego, przyjmując zerowe wartości przyszłych zakłóceń.

Identyfikacja postaci modelu, czyli określenie parametrów p , d oraz q , jest procedurą o niemałym stopniu trudności, przede wszystkim ze względu na brak uniwersalnego aparatu matematycznego. Tradycyjnie dokonuje się tego poprzez ogląd wykresów charakterystyk probabilistycznych badanego procesu stochastycznego, aczkolwiek rezultaty takiego postępowania są w znacznym stopniu uznaniowe. Algorytmy eliminujące tę niedogodność prowadzą najczęściej do odmiennych, a zatem z teoretycznego punktu widzenia słabo uzasadnionych wartości, lub też polegają na selekcji całej grupy parametrów i żmudnej weryfikacji uzyskanych modeli.

Wartości wektorów parametrów a oraz b wyznacza się najczęściej z wykorzystaniem algorytmów regresji, lecz – w ogólnym przypadku – nieliniowej. Jeżeli parametry te znajdują się w pobliżu brzegów zbiorów A oraz B , to koniecznym może okazać się jednak stosowanie bardziej złożonej metody największej wiarygodności. Szereg proponowanych jej uproszczeń wymaga wszakże uciążliwego sprawdzania otrzymanych tym sposobem wyników.

Z uwagi na znaczną złożoność powyższych zagadnień, istotne znaczenie ma proces weryfikacji poprawności uzyskanego modelu. Najczęściej analizowane jest podobieństwo błędów kolejnych prognoz do szumu białego, w szczególności poprzez badanie ich korelacji, czasem także gęstości spektralnej.

I wreszcie, najbardziej wyrafinowaną metodę prognozowania stanowi tzw. prognozowanie bayesowskie. (Istotą szeroko rozumianej statystycznej estymacji bayesowskiej jest minimalizacja potencjalnych strat powstałych w wyniku przyjęcia danej wartości estymatora, w praktyce różnej od prawdziwej ale przecież niewiadomej wartości. Podstawą takiego działania jest znajomość rozkładu estymowanej wielkości – jego wyznaczenie stanowi meritum metod bayesowskich.)

W metodyce prognozowania bayesowskiego dopuszcza się aby wielkość Y , której

wartości podlegają prognozowaniu, była uzależniona od pewnego procesu stochastycznego X , niedostępnego bezpośrednio metrologicznie, przy czym powyższe procesy traktuje się jako stan i wyjście stochastycznego dyskretnego układu dynamicznego

$$X(\omega, j+1) = G(\omega, X(\omega, j), j) + \varepsilon^{\sim}(\omega, j), \quad X(\cdot, 1) \equiv X_1 \quad (4.64)$$

$$Y(\omega, j) = H(\omega, X(\omega, j), j) + \varepsilon^{\sim}(\omega, j), \quad (4.65)$$

gdzie – poza standardowymi oznaczeniami – X_1 jest zmienną losową o znanym rozkładzie, natomiast ε^{\sim} oraz ε^{\sim} reprezentują szumy białe także o znanych rozkładach. Podstawę prognozowania bayesowskiego stanowi wyznaczenie algorytmu

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(X(\cdot, j)|\mathcal{Y}(j)) &\xrightarrow[\text{w oparciu o wzór (4.64)}]{(A)} \mathcal{X}(X(\cdot, j+1)|\mathcal{Y}(j)) \longrightarrow \\ &\xrightarrow[\text{w oparciu o wzór (4.65)}]{(B)} \mathcal{X}(X(\cdot, j+1)|\mathcal{Y}(j+1)) \end{aligned} \quad (4.66)$$

opisującego zmiany rozkładu \mathcal{X} zmiennej losowej $X(\cdot, j)$, określonego na podstawie $\mathcal{Y}(j)$ – zbioru obserwacji pozyskanych do chwili j włącznie. Dzięki założonej znajomości rozkładu zmiennej losowej $X_1 = X(\cdot, 1)$, czyli zgodnie z powyższymi oznaczeniami $\mathcal{X}(X(\cdot, 1)|\mathcal{Y}(1))$, procedura ta umożliwia sukcesywne uaktualnianie rozkładu zmiennej $X(\cdot, j)$. W szczególności, s -krotne powtórzenie w dowolnej chwili j czynności (A) pozwala wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X(\cdot, j+s)$ i dzięki temu bayesowski estymator jej wartości (będący czasem kwantylem tej zmiennej), a stąd już prognozę \hat{y}_j^s .

W najprostszym przypadku, gdy układ dynamiczny (4.64)-(4.65) jest liniowy i zmienne losowe X_1 , $\varepsilon^{\sim}(\cdot, j)$, $\varepsilon^{\sim}(\cdot, j)$ mają rozkłady normalne, rozkład \mathcal{X} jest również normalny. Definiujące go jednoznacznie wartość oczekiwana i macierz kowariancji pozyskane mogą być za pomocą filtru Kalmana.

Identyfikacja równań układu (4.64)-(4.65) dokonywana jest jedynie na podstawie doświadczalnie uzyskanych wartości procesu stochastycznego Y , bez znajomości fizycznych lub technicznych uwarunkowań generującego go obiektu. Każda z faz identyfikacji, a to ustalenie wymiaru procesu X , określenie postaci funkcji G i H , czy też wyznaczenie definiujących je parametrów, staje się w tej sytuacji czynnością o ogromnej skali trudności, wymagającą zmuudnej analizy i uciążliwej weryfikacji. Szczególnie cenną, natomiast, własnością prognozowania bayesowskiego jest możliwość nadszania za zmianami obiektu badań, które są przecież uwzględnione w podstawowej formule algorytmu (4.66).

Modele ARIMA stanowią uogólnienie metody regresji. Z kolei procedury oparte na modelach ARIMA są szczególnym przypadkiem prognozowania bayesowskiego.

Tak więc prognoza otrzymana za pomocą prawidłowo uzyskanego modelu ARIMA, z teoretycznego punktu widzenia, nie powinna być gorsza od wyniku metody regresji. Podobnie prognoza otrzymana na podstawie poprawnie stosowanej metodyki bayesowskiej nie może być mniej precyzyjna od rezultatów dwóch poprzednich. Jednak w praktyce, gdy występują ograniczenia w dostępności danych, czasu niezbędnego na otrzymanie prognozy, w tym także na algorytmy obliczeniowe, a przede wszystkim braku doświadczenia w stosowaniu tych procedur, zależności te nie są tak jednoznaczne. Wtedy to prognozy uzyskane z wykorzystaniem metody regresji mogą okazać się wręcz dokładniejsze od otrzymanych za pomocą modeli ARIMA, czy też programowania bayesowskiego.

W praktyce powyższe metody mają charakter komplementarny i stosowane powinny być w zależności od uwarunkowań aplikacyjnych. Modele ARIMA, a zwłaszcza prognozowanie bayesowskie użyteczne są szczególnie w ekonomii, gdzie dysponuje się czasem i środkami materialnymi na wszechstronne badania, a precyzja prognoz ma niebagatelne znaczenie finansowe. W przeciwnym razie dominująca pozostaje metoda regresji, której zalety szczególnie manifestują się w przypadku rygorystycznych ograniczeń czasowych. Warto pamiętać, że błąd prognozy jest sumą niedoskonałości stosowanej metodyki oraz przede wszystkim naturalnej nieokreśloności i nieprzewidywalnej zmienności badanego zjawiska. Wobec ostatnich dwóch czynników nawet złożone metody analityczne stają się bezradne.

Uwagi bibliograficzne

Literatura polskojęzyczna dotycząca zagadnień prognozowania statystycznego praktycznie ogranicza się do podstawowego podręcznika prezentującego modele ARIMA [20]. Poszczególne elementy prezentowane są także w pozycjach o charakterze ekonomicznym – ich szczegółowy wykaz znaleźć można w monografii [160].

Prognozowaniu z wykorzystaniem metody regresji i modeli ARIMA poświęcone są książki [61, 62, 110], a zwłaszcza [1]. Ponadto, pierwszą z tych metod przedstawiono w fundamentalnej pracy [22] oraz wartej polecenia publikacji [115], natomiast drugą, we wspomnianym klasycznym podręczniku [20], książce [120], a także ścisłym matematycznie opracowaniu [21]. Podstawową pozycję traktującą o prognozowaniu bayesowskim stanowi monografia [154]. Szeroki przegląd bibliograficzny dotyczący powyższych procedur dostępny jest również w artykułach przeglądowych [24, 53, 54, 55, 107, 108, 149] oraz ich zbiorze [109]. Zagadnieniom prognozowania poświęcone są periodyki „Journal of Forecasting” i „International Journal of Forecasting”.

Ogólne zagadnienia związane z metodą regresji przedstawiono w książkach [39], a także [27, 127, 155]. Analiza spektralna zawarta jest w pracy [13] oraz [3, 16, 80], a ponadto jednotematycznym zeszycie Vol. 3, No. 2 czasopisma „Technometrics”. Specjalne zagadnienia prognozowania: zastosowanie sztucznych sieci neuronowych i

użycie kombinacji różnych metod, są przedmiotem artykułów przeglądowych – odpowiednio – [71] oraz [31], gdzie podana jest także bogata literatura przedmiotowa. Szereg użytecznych informacji dotyczących analizy procesów stochastycznych znaleźć można również w podręczniku [52].

Przypadek, gdy estymatorem bayesowskim okazuje się kwantyl, rozważany jest w publikacjach [88, 90].

4.2. PREDYKCJA USZKODZEŃ

Idea układu predykcji polega na sukcesywnej analizie ewolucji wektora symptomów i wnioskowaniu na tej podstawie o możliwościach wystąpienia w przyszłym czasie nieprawidłowych warunków pracy nadzorowanego systemu. Przewidywane będzie zarówno samo pojawienie się uszkodzenia (zakres detekcji), jak i poszczególnych diagnozowanych jego typów. Stosowana metodyka łączy elementy teorii testowania hipotez, użyte w rozdziale 3 dla potrzeb detekcji i diagnozy, z techniką prognozowania statystycznego przedstawioną w podrozdziale 4.1. I tak, przedmiot weryfikacji stanowi przypuszczenie, iż wartości statystyk S_0 oraz S_1, S_2, \dots, S_k definiowanych zależnościami (3.39) i (3.104) należąc będą w przyszłości do zbiorów A_0 oraz A_1, A_2, \dots, A_k lub B_1, B_2, \dots, B_k , danych wzorami (3.105) i (3.41) lub (3.43).

Niech więc $s_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ reprezentuje wyprzedzenie z jakim prognozowane jest pojawienie się uszkodzenia systemu (w sensie detekcji). Ponownie, borelowskie odwzorowanie f_0 oznacza funkcję gęstości 1-wymiarowych rozkładów wektora symptomów Z dla poprawnych warunków pracy – konstrukcja jej estymatora jądrowego została przedstawiona w podrozdziałach 3.1 i 3.4. Traktując w chwili $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dotychczasowe wartości statystyki S_0 :

$$S_0(\omega, 1), S_0(\omega, 2), \dots, S_0(\omega, j) \quad (4.67)$$

czyli odpowiednio

$$f_0(Z(\omega, 1)), f_0(Z(\omega, 2)), \dots, f_0(Z(\omega, j)) \quad (4.68)$$

jako obserwacje

$$y_1, y_2, \dots, y_j \quad (4.69)$$

wyznaczyć można – zgodnie ze wskazaniem podrozdziału 4.1 – prognozę $\hat{y}_j^{s_0}$. Reprezentuje ona estymator wartości statystyki S_0 dla chwili $j + s_0$. Jeżeli zachodzi relacja

$$\hat{y}_j^{s_0} \in A_0 \quad (4.70)$$

to należy domniemywać, że w przyszłości hipoteza H_0 stanowiąca o prawidłowym działaniu nadzorowanego systemu będzie fałszywa, a ściślej, można przypuszczać, iż za s_0 jednostek czasowych (czyli w chwili o s_0 późniejszej niż aktualna) pojawi się uszkodzenie. W przeciwnym przypadku, gdy

$$\hat{y}_j^{s_0} \notin A_0, \quad (4.71)$$

brak jest podstaw do odrzucenia osądu o spodziewanej za s_0 jednostek czasowych poprawnej pracy badanego urządzenia.

Podobnie, niech dla każdego $k = 1, 2, \dots, d$ parametr $s_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ reprezentuje wyprzedzenie z jakim prognozowane jest wystąpienie k -tego typu diagnozowanego uszkodzenia, natomiast borelowskie odwzorowanie f_k oznacza funkcję gęstości 1-wymiarowych rozkładów wektora symptomów Z w warunkach wystąpienia takiego uszkodzenia – konstrukcja jej estymatora jądrowego została opisana w podrozdziałach 3.1 i 3.3. W dowolnej chwili $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ przeszłe wartości statystyki S_k :

$$S_k(\omega, 1), S_k(\omega, 2), \dots, S_k(\omega, j) \quad (4.72)$$

czyli odpowiednio

$$f_k(Z(\omega, 1)), f_k(Z(\omega, 2)), \dots, f_k(Z(\omega, j)), \quad (4.73)$$

traktowane są w procesie prognozowania jako obserwacje (4.69). Wyznaczając dla ustalonej wartości wyprzedzenia s_k prognozę $\hat{y}_j^{s_k}$ uzyskuje się estymator statystyki S_k dla chwili $j + s_k$. Jeśli zatem zachodzi relacja

$$\hat{y}_j^{s_k} \in B_k, \quad (4.74)$$

to spodziewana jest przyszła prawdziwość hipotezy H_k , a ściślej, wnioskuje się, iż za s_k jednostek czasowych wystąpi k -ty typ diagnozowanego uszkodzenia. W przeciwnym przypadku, czyli gdy

$$\hat{y}_j^{s_k} \in A_k, \quad (4.75)$$

przypuszczenie takie należy odrzucić.

Koncepcja zmodyfikowanej hipotezy H_0^* , wyrażona wzorem (3.143), może być łatwo transponowana na zagadnienie predykcji uszkodzeń. Zmodyfikowana prognoza prawidłowej pracy systemu jest tu bowiem w naturalny sposób równoważna koniunkcji podstawowej, rozważanej powyżej prognozy poprawnego działania (w sensie detekcji) i zaprzeczeń prognoz z zakresu diagnozy, stanowiących o wystąpieniu poszczególnych typów uszkodzeń. A zatem, o przyszłej niesprawności urządzenia stanowi spełnienie warunku (4.70) lub (4.74) dla dowolnego indeksu k . Można zatem sformułować osąd, że w przypadku stosowania zmodyfikowanej hipotezy H_0^* , para-

metry s_k powinny być dobierane tak by

$$s_k \leq s_0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, d \quad (4.76)$$

Ostatecznie, zgodnie z przedstawionym projektem, realizacja koncepcji predykcji wymaga, w ogólnym przypadku, osobnego prognozowania wartości $d+1$ procesów stochastycznych: jednego dotyczącego pojawienia się uszkodzenia systemu (detekcja) oraz d związanych z poszczególnymi diagnozowanymi jego typami. Aczkolwiek w ogólnym przypadku prognozy te wyznaczane są niezależnie, to jednak reguły postępowania oraz procedury określania modeli są w znacznym stopniu komplementarne.

Wybór konkretnej metody prognozowania determinowany jest przez specyficzne uwarunkowania zagadnienia predykcji uszkodzeń. Przede wszystkim, praca w czasie rzeczywistym stawia rygorystyczne wymagania z zakresu szybkości obliczeń i możliwości uaktualniania danych. Ponadto, wprost z samej istoty problemu wykrywania uszkodzeń wynika żądanie odporności na nierzadko gwałtowne zmiany charakterystyk badanego procesu stochastycznego. Należy także wziąć pod uwagę, iż proces projektowania wykonywany jest często przez zespół inżynierski bez udziału statystyka i wobec tego metoda powinna być możliwie prosta, poparta jednoznacznymi formułami i sugestywnymi interpretacjami. Z drugiej strony, w przeciwieństwie do zagadnień ekonomicznych, pierwszorzędnego znaczenia nie ma tu dokładność prognozy, lecz jedynie właściwa identyfikacja tendencji zmian.

Wobec powyższych warunków, w większości zastosowań szczególnie predestynowaną do zagadnienia predykcji uszkodzeń okazuje się metoda regresji. Należy jednak podkreślić, iż aczkolwiek w dalszej części będą szczegółowo rozważone aspekty zastosowań tej właśnie metody, to problem predykcji sformułowany został powyżej w taki sposób, że nic nie stanowi przeszkody w użyciu modeli ARIMA lub prognozowania bayesowskiego, gdyby w konkretnym przypadku mogło okazać się to korzystne.

I tak, zastosowanie metody regresji wymaga ustalenia wartości parametrów s_k , w_k , n_k^* , n_k^{\sim} oraz T_k , przy czym dolny indeks wskazuje czy dany parametr przypisany jest modelowi używanemu do prognozowania samej możliwości pojawienia się uszkodzenia ($k=0$), czy też jego poszczególnych, diagnozowanych typów ($k=1, 2, \dots, d$).

Wybór wartości parametrów wyprzedzenia s_k najczęściej wynika z uwarunkowań technologicznych nadzorowanego systemu. W praktyce oznacza to przyjęcie minimalnego czasu niezbędnego do zatrzymania urządzenia lub przynajmniej odpowiedniej do przewidywanego typu uszkodzenia zmiany reżymu pracy, albo do przejęcia funkcji niesprawnego podzespołu przez aparaturę zastępczą. Postulat minimalizacji sformułowany jest ze względu na precyzję prognozy. Jednak w praktyce, wynikające stąd ograniczenia mogą wręcz wymusić przyjęcie wartości parametrów s_k w wymiarze niewystarczającym do pełnego zaspokojenia wymagań technologicznych. Jeśli używana jest zmodyfikowana hipoteza H_0^* , warto pamiętać o ograniczeniu (4.76).

W przypadku predykcji uszkodzeń, gdzie istotą analizowanych zjawisk są zmiany zachodzące w badanym systemie, przy ustalaniu wartości parametrów dezaktualizacji w_k szczególną uwagę powinno się zwrócić na procedurę adaptacyjną (4.54)-(4.59). Z tego samego powodu warto udostępnić obsłudze sygnał śledzenia (4.54), stanowiący o poprawności stosowanego modelu regresji. Należy także podkreślić znaczenie, jakie w zagadnieniu predykcji ma wybór wartości parametrów w_k lub, w nieco mniejszym stopniu, stałych u_k gdy stosowana jest procedura adaptacyjna. Relatywnie duże w praktyce zagadnienia predykcji uszkodzeń wyprzedzenie prognozowania oraz, z drugiej strony, konieczność nadszyczenia za często gwałtownymi zmianami, implikują sprzeczne wymagania, wymuszające starannie dopracowywane kompromisy.

Wartości parametrów n_k^* definiujących stopień wielomianów trendu można wyznaczyć za pomocą opisanego algorytmu testowania istotności współczynników przy najwyższych potęgach, jedynie w przypadku znajomości charakterystyk powstawania uszkodzeń, co w praktyce jest okolicznością raczej rzadką. Ograniczenie możliwości do liczb 1, 2, 3 pozwala jednak na dokonanie wyboru drogą eliminacji. I tak, wartość $n_k^* = 1$ jest tu nie do zaakceptowania, gdyż – jak wspomniano – prognoza zawarta jest wtedy między minimalną i maksymalną obserwacją, a więc niesprawność systemu byłaby awizowana później przez układ predykcji niż wykrywana w procesie detekcji lub diagnozy. Z kolei, ze względu na możliwość nadmiernej ilości fałszywych alarmów, wariant $n_k^* = 3$ powinien być ograniczony jedynie do przypadków, gdy spodziewana jest szczególna gwałtowność narastania objawów uszkodzenia i jednocześnie możliwe byłoby przyjęcie małej wartości wyprzedzenia s_k . Ostatecznie model liniowy, $n_k^* = 2$, należy traktować jako podstawowy.

Wartości n_k^{\sim} oraz T_k wyznacza się zgodnie z ogólnymi regułami, przy czym ze względu na wymaganie szybkości działania algorytmów obliczeniowych i przyjmowane tu duże wartości parametru wyprzedzenia, w przypadku zagadnienia predykcji uszkodzeń należy zwrócić szczególną uwagę na eliminację zbędnych harmonicznych. W większości zastosowań można spodziewać się tożsamości

$$T_0 = T_1 = \dots = T_d \quad (4.77)$$

$$n_0^{\sim} = n_1^{\sim} = \dots = n_d^{\sim} \quad (4.78)$$

Warto jeszcze skomentować warunki dotyczące minimalnej ilości dostępnych obserwacji m_k^* , łącząc je z ewentualnym zadaniem ustalenia wartości j_k^* wprowadzonej zależności (4.54)-(4.57). Otóż, jeżeli zaniechana jest adaptacja parametru dezaktualizacji, to spełnione powinno być następujące wymaganie:

- (1) wartość m_k^* nie powinna być mniejsza niż $20 + n_k^* + 2n_k^{\sim}$, w najmniej korzystnych przypadkach $10 + n_k^* + 2n_k^{\sim}$.

Natomiast w przypadku gdy procedura adaptacyjna znajduje zastosowanie, dostępne

obserwacje należy podzielić na dwa podzbiory:

$$y_1, y_2, \dots, y_{j_k^*} \quad (4.79)$$

$$y_{j_k^*+1}, y_{j_k^*+2}, \dots, y_{m_k^*}, \quad (4.80)$$

przy czym $1 < j_k^* < m_k^*$, najczęściej

$$j_k^* = \frac{2}{3} m_k^* . \quad (4.81)$$

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami, na podzbiór (4.79) składają się obserwacje wykorzystywane do wyznaczenia pierwszej prognozy, natomiast podzbiór (4.80) służy do ustabilizowania parametrów procedury adaptacyjnej. Uwzględniając podane wcześniej sugestie, sformułować można następujące warunki:

- (2) wartość j_k^* nie powinna być mniejsza niż $20 + n_k^* + 2n_k^{\sim}$, w najmniej korzystnych przypadkach $10 + n_k^* + 2n_k^{\sim}$;
- (3) liczność podzbioru (4.80) powinna być nie mniejsza od 10, wyjątkowo 5.

Spełnienie powyższych wymagań nie stwarza w praktyce istotnych trudności. Łatwo bowiem sprawić, aby ilość dostępnych obserwacji była równa m_0 , czyli liczbie dostępnych eksperymentalnie wartości wektora symptomów pozyskanych dla potrzeb detekcji w warunkach prawdziwości hipotezy H_0 :

$$m_0^* = m_1^* = \dots = m_d^* = m_0 . \quad (4.82)$$

Ponieważ wymiar tego wektora w praktyce jest zawsze większy od 1, to zgodnie z danymi pokazanymi na rysunku 3.6, niezbędna liczba pozyskanych jego wartości przewyższa ograniczenia wynikające ze sformułowanych powyżej warunków (1)-(3) nawet o kilka rzędów wielkości.

Ostatecznie, projektując układ statystycznej predykcji uszkodzeń (z wykorzystaniem do prognozowania metody regresji) należy:

- (1) na podstawie uwarunkowań technologicznych, określić wartości parametrów wyprzedzenia s_0, s_1, \dots, s_d ; jeśli stosowana jest zmodyfikowana hipoteza H_0^* , to dla większości zastosowań powinien być spełniony warunek (4.76);
- (2) zgodnie z treścią rozdziału 3 wyznaczyć jądrowe estymatory funkcji gęstości rozkładu zmiennych losowych $Z(\cdot, j)$ dla poprawnych warunków pracy nadzorowanego systemu i w przypadkach występowania poszczególnych typów diagnozowanych uszkodzeń, czyli odwzorowania $\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_d$, a także zbiory A_0, A_1, \dots, A_d oraz B_1, B_2, \dots, B_d ; (dla potrzeb następnego punktu warto zapewnić, aby wartości wektora symptomów dla poprawnych warunków pracy tworzyły sekwencję);
- (3) pozyskać eksperymentalnie sekwencję wartości wektora symptomów Z przy zało-

zeniu prawidłowego stanu technicznego: $z_1^0, z_2^0, \dots, z_{m_0}^0$; warto zapewnić możliwie największą licznosc m_0 ; w szczególności powinna ona przewyższać 32, w najmniej korzystnych przypadkach 12;

(4) zdefiniować rzeczywiste procesy stochastyczne Y_0, Y_1, \dots, Y_d uznając: $Y_0 \equiv \hat{f}_0 \circ Z, Y_1 \equiv \hat{f}_1 \circ Z, \dots, Y_d \equiv \hat{f}_d \circ Z$;

(5) jako sekwencje obserwacji przyjąć kolejno posiadane wartości procesów stochastycznych Y_0, Y_1, \dots, Y_d , czyli odpowiednio

$$\hat{f}_0(z_1^0), \hat{f}_0(z_2^0), \dots, \hat{f}_0(z_{m_0}^0)$$

$$\hat{f}_1(z_1^0), \hat{f}_1(z_2^0), \dots, \hat{f}_1(z_{m_0}^0)$$

⋮

$$\hat{f}_d(z_1^0), \hat{f}_d(z_2^0), \dots, \hat{f}_d(z_{m_0}^0) ;$$

(6) w oparciu o powyższe sekwencje obserwacji, wyznaczyć $d+1$ modeli regresji (4.1); wymaga to dla każdego $k = 0, 1, \dots, d$ ustalenia wartości parametrów s_k, w_k (ewentualnie z użyciem procedury adaptacyjnej), n_k^*, \tilde{n}_k, T_k oraz określenia algorytmu uaktualniania prognozy; ogólne reguły opisane zostały w podrozdziale 4.1, natomiast szczegółowe aspekty związane z zagadnieniem predykcji uszkodzeń przedstawiono w niniejszym podrozdziale; pierwszą prognozę definiują formuły (4.22) i (4.24)-(4.26); jeśli stosowana jest adaptacja parametru dezaktualizacji (4.54)-(4.57), to obserwacje należy podzielić na dwa podzbiory (4.79)-(4.80), wykorzystując je kolejno do wygenerowania pierwszej prognozy i zainicjowania tej procedury; podobnie, gdy stosowana jest adaptacja, to algorytm uaktualniania prognozy opiera się na zależnościach (4.27)-(4.30), natomiast w przeciwnym przypadku (jeżeli dodatkowo $w_k \neq 1$) może on być uproszczony poprzez użycie wzoru (4.27) wraz z równością (4.33).

Stosowanie w praktyce układu predykcji uszkodzeń wobec systemu pracującego w czasie rzeczywistym, polega na wykonywaniu w każdej chwili j oraz osobno dla każdego $k = 0, 1, \dots, d$ następujących czynności:

(7) wyznaczeniu prognozy $\hat{y}_j^{s_k}$, a następnie stwierdzeniu czy wartość ta należy do odpowiednich zbiorów A_0 i B_1, B_2, \dots, B_d ; w przypadku gdy $\hat{y}_j^{s_0} \in A_0$ należy sądzić, że za s_0 jednostek czasowych pojawi się uszkodzenie (jeśli wykorzystywana jest zmodyfikowana hipoteza H_0^* , to świadczy o tym również prawdziwość dowolnej relacji $\hat{y}_j^{s_k} \in B_k$ dla $k = 1, 2, \dots, d$); jeżeli $\hat{y}_j^{s_k} \in B_k$ gdy $k = 1, 2, \dots, d$, to wnioskuje się, iż za s_k jednostek czasowych wystąpi k -ty typ diagnozowanego uszkodzenia; w pozostałych przypadkach brak jest podstaw do przypuszczeń o przyszłej niesprawności nadzorowanego systemu;

(8) gdy stosowana jest adaptacja parametru dezaktualizacji, to poprawność modelu regresji można weryfikować w oparciu o sygnał śledzenia (4.54).

Czynności pozycji (7)-(8) są sukcesywnie powtarzane do momentu dezaktualizacji danych – w takiej sytuacji należy powtórzyć powyższy algorytm.

5. UKŁAD WYKRYWANIA USZKODZEŃ

W rozdziałach 3 i 4 niniejszej publikacji przedstawiona została kompletna procedura, umożliwiająca realizację statystycznego układu wykrywania uszkodzeń w zakresie detekcji, diagnozy i związanej z oboma tymi funkcjami predykcji. Od projektanta wymagane jest zdefiniowanie wektora symptomów, określenie prostych w identyfikacji ilorazów reprezentujących stosunek strat wynikłych z niewykrycia danego typu diagnozowanego uszkodzenia oraz związanego z nim fałszywego alarmu, a także ustalenie wyprzedzeń poszczególnych prognoz. Wobec pozostałych parametrów podane zostały algorytmy wyznaczania ich wartości oparte na kryteriach optymalizacyjnych lub heurystycznych, wraz z interpretacjami skutków ich ewentualnego zmniejszenia lub powiększenia. Aczkolwiek – podobnie jak przy realizacji większości wyspecjalizowanych układów współczesnej inżynierii – twórcza inicjatywa zespołu projektującego jest czynnikiem o istotnym znaczeniu, to w przypadku przedstawionego tu statystycznego układu wykrywania uszkodzeń może mieć ona wpływ raczej na polepszenie jakości, niż na samą istotę jego działania.

Stosowany aparat matematyczny ograniczony został praktycznie do dowolnej metody prognozowania statystycznego, a także techniki estymatorów jądrowych wykorzystywanej w celu estymacji wielowymiarowej funkcji gęstości oraz dystrybuanty i – opcjonalnie – kwantyla rzeczywistej zmiennej losowej. Dowolność metody prognozowania umożliwia uwzględnienie indywidualnych preferencji projektanta (można wszakże ponowić przekonanie, iż w większości aplikacji najkorzystniejsze rezultaty będą uzyskiwane przy użyciu metody regresji). Z kolei dla potrzeb estymacji funkcji gęstości, dystrybuanty i kwantyla możliwe jest użycie jednakowej formuły zastosowania techniki estymatorów jądrowych. W znacznym stopniu ułatwia to proces konstruowania układu, przyczyniając się także do efektywniejszego wykorzystania pozyskiwanego sukcesywnie doświadczenia.

Prezentowana w niniejszej pracy procedura wykrywania uszkodzeń przeznaczona jest do stosowania w czasie rzeczywistym, podczas wykonywania przez nadzorowane urządzenie właściwych mu czynności technologicznych. Proponowana metoda nie wymaga szczegółowej znajomości modelu nadzorowanego systemu dynamicznego.

Nie zostały także wprowadzone ograniczenia dotyczące postaci funkcji gęstości f_0, f_1, \dots, f_d ani ich estymatorów, charakteryzujących poprawne warunki pracy i diagnozowane typy uszkodzeń; w szczególności, dopuszcza się istnienie lokalnych ekstremów, czy też brak spójności zbiorów

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \leq c\} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, d \text{ oraz } c > 0. \quad (5.1)$$

Nie wykluczono również jednoczesnego wystąpienia kilku różnych typów diagnozowanych uszkodzeń. Prezentowany układ posiada możliwości identyfikacji zmian w wartościach poszczególnych składowych wektora symptomów oraz, przede wszystkim, złożonych relacji jakościowych i ilościowych zachodzących między nimi. Zmiany te mogą mieć zarówno gwałtowny, jak i – dzięki predykcji – również powolny charakter. Powyższe cechy wyróżniają opracowaną tu koncepcję spośród większości stosowanych współcześnie metod wykrywania uszkodzeń. Wymagania dotyczące układu komputerowego, realizującego zaprojektowany algorytm, nie wykraczają poza możliwości nowoczesnych urządzeń automatyki o stopniu zaawansowania adekwatnym do stosowania procedur wykrywania uszkodzeń. Parametry współczesnych układów numerycznych w praktyce ograniczają wymiar wektora symptomów do 7-9. Uwzględniając dodatkowo aspekty statystyczne w zakresie całkowitego prawdopodobieństwa błędu, ilość diagnozowanych uszkodzeń w większości zastosowań nie powinna przekraczać 3-6.

Jak wspomniano, przedstawiony układ przeznaczony jest zarówno do wykrywania oraz rozpoznawania nieprawidłowości o powolnym, jak i gwałtownym charakterze. Pierwsze z nich wynikają z sukcesywnego zużycia materiałowego lub rozregulowania i nie implikują krytycznych żądań dotyczących szybkości podejmowanej reakcji. Ich identyfikacja może być w pewnym stopniu utrudniona i jest wręcz bardziej podatna na działanie predykcji niż detekcji i diagnozy. Uszkodzenia o gwałtownej naturze, często wynikłe ze zmęczenia materiałowego i związane z nagłymi zdarzeniami, są łatwiejsze do rozpoznania, aczkolwiek wymagają szybkiego działania. Przeważnie nie są one poprzedzone wyrazistymi symptomami. Warto więc w tym miejscu sformułować ogólną sugestię, iż predykcja nie musi dotyczyć wszystkich typów diagnozowanych nieprawidłowości.

Kolejne etapy procesu projektowania prezentowanego tu statystycznego układu wykrywania uszkodzeń można ująć w następującą sekwencję:

- (1) ustalenie struktury algorytmu,
- (2) zebranie zbiorów reprezentatywnych danych charakteryzujących poprawne warunki pracy oraz poszczególne typy diagnozowanych nieprawidłowości,
- (3) obliczenie wartości parametrów

i wreszcie

- (4) przystąpienie do procedury wykrywania uszkodzeń podczas pracy urządzenia.

Czynności punktu (1) wykonuje się jednorazowo podczas instalacji systemu. Zbiory wyszczególnione w punkcie (2) zmieniane są także po każdej dezaktualizacji danych lub drastycznej zmianie reżymu technologicznego (w praktyce dotyczy to zwłaszcza charakterystyki poprawnych warunków pracy). W tej sytuacji czasochłonne procedury punktu (3) muszą być powtórzone. Można w tym celu wykorzystać naturalne przerwy technologiczne, gdy nadzorujący układ komputerowy nie jest nadmiernie obciążony. Aktualizacja danych może być zadeklarowana jako operacja powtarzana sukcesywnie.

Wartości pozyskane w ramach punktów (1)-(3) mogą być także dostarczone przez producenta wraz z urządzeniem. W takim przypadku prawidłowe działanie układu wykrywania uszkodzeń w trakcie fazy rozruchu, stanowi dodatkowy sprawdzian jakości dostarczonego sprzętu oraz poprawności montażu.

Wyniki przedstawionych w podrozdziałach 3.3, 3.4 oraz 4.2 procedur detekcji, diagnozy i predykcji przekazywane są do układu serwisu uszkodzeń, w ramach którego możliwe jest podjęcie stosownych działań, w szczególności zmian w algorytmie sterowania nadzorowanym systemem. W większości zastosowań powyższe procedury mogą być jednak kontynuowane także po wykryciu niesprawności urządzenia, dzięki czemu następuje sukcesywna aktualizacja danych o zmieniającym się, nieprawidłowym stanie technicznym.

Jak łatwo wnioskować z podsumowań kończących podrozdziały 3.3, 3.4 i 4.2, czynności projektowania detekcji, diagnozy i predykcji wzajemnie się przenikają. Widoczna jest jednak wyraźna nadrzędność detekcji i diagnozy, których elementy wykorzystywane są również dla potrzeb predykcji. Dominacja ta uzewnętrznia się szczególnie, gdy rozważane jest ich funkcjonalne znaczenie, ponieważ podstawowe zadania układu wykrywania uszkodzeń, zwłaszcza związane z bezpieczeństwem, realizowane są głównie przez detekcję i diagnozę, a z uwagi na niedoskonałość statystycznych metod prognozowania, wnioski pozyskiwane dzięki predykcji mogą mieć w niektórych zastosowaniach znaczenie jedynie informacyjne, aczkolwiek o bardzo istotnej randze.

Tymczasem interwencje predykcji muszą być równomierne w czasie, w przeciwieństwie do ingerencji detekcji i diagnozy. Pojawia się zatem sugestia dodatkowych, nieregularnych sprawdzianów dla potrzeb detekcji i diagnozy, zależnie od wolnego czasu wykorzystywanego układu komputerowego.

Z praktycznego punktu widzenia korzystne może okazać się ograniczenie wymiaru wektora symptomów Z , dla potrzeb poszczególnych testów diagnozy, jedynie do tych współrzędnych, które mają istotne znaczenie dla identyfikacji danego typu uszkodzenia. Oznacza to, że dla każdego $k = 1, 2, \dots, d$ definicja statystyki (3.39) powinna być uogólniona do postaci

$$S_k(\omega, j) = f_k(g_k(Z(\omega, j))) \quad , \quad (5.2)$$

gdzie $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ ($n_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) jest odwzorowaniem projekcji przestrzeni \mathbb{R}^n na podprzestrzeń \mathbb{R}^{n_k} składającą się ze wspomnianych powyżej, istotnych dla danego typu uszkodzenia składowych wektora symptomów. Wtedy $f_k : \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}$ i – zgodnie z rysunkiem 3.6 – odpowiedniemu pomniejszeniu może ulec liczność próby m_k .

Podobnie, pozytywne rezultaty w niektórych zastosowaniach mogą być następstwem uprzywilejowania wybranych, bardziej wiarygodnych danych. Wzór (3.1), definiujący podstawową formułę estymatora funkcji gęstości, ulega wtedy zmianie na

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{mh^n \sum_{i=1}^m w_i} \sum_{i=1}^m w_i K\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad (5.3)$$

gdzie nieujemne, nie wszystkie równe zero współczynniki w_i , ustalane są tak aby ich wartość była proporcjonalna do znaczenia przypisywanego odpowiednim danym x_i . W przypadku dystrybuanty definicja (3.63) przyjmuje postać

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m w_i} \sum_{i=1}^m w_i I\left(\frac{y-y_i}{h}\right); \quad (5.4)$$

i podobnie, równanie (3.113) określające jądro estymatora kwantyla \hat{q}_J , dane jest jako

$$\sum_{i=1}^m w_i I\left(\frac{\hat{q}_J - y_i}{h}\right) = r \sum_{i=1}^m w_i. \quad (5.5)$$

Analogicznej modyfikacji podlegają wtedy zależności z podrozdziałów 3.3. i 3.4.

Uwagi o ściśle aplikacyjnym charakterze, będące rezultatem analizy wyników programu symulacyjnego, weryfikującego poprawność działania prezentowanego w niniejszej pracy statystycznego układu wykrywania uszkodzeń, przedłożone są w podrozdziale 6.2.

6. SYMULACJA NUMERYCZNA

Poprawność funkcjonowania zaprojektowanego w niniejszej pracy statystycznego układu wykrywania uszkodzeń została zweryfikowana za pomocą numerycznego programu symulacyjnego. Nadzorowanym obiektem był nieciągły system pozycyjny poddany działaniu losowego sterowania czasooptymalnego. Wstęp przedstawiający teoretyczne aspekty tego zagadnienia stanowi przedmiot podrozdziału 6.1. Wyniki symulacji oraz wynikające stąd wnioski aplikacyjne zaprezentowano w podrozdziale 6.2.

6.1. LOSOWE CZASOOPTYMALNE STEROWANIE SYSTEMAMI POZYCYJNYMI

We współczesnej praktyce inżynierskiej, istotne znaczenie posiada szeroka klasa urządzeń przemysłowych, które swój cykl produkcyjny realizują głównie poprzez zmiany pozycji poszczególnych mechanizmów, np. suporty obrabiarek i szlifierek, walcarki nawrotne oraz przede wszystkim manipulatory i roboty przemysłowe. Nazywane są one systemami pozycyjnymi. Czas powyższej zmiany jest bezefektywny z punktu widzenia technologicznego, a zatem sterowanie realizujące jego minimum (czasooptymalne) wpływa bezpośrednio na wydajność takiego urządzenia. Inny przykład systemu pozycyjnego reprezentują wszelkie układy zabezpieczające; możliwie najkrótszy czas reakcji stanowi podstawowy element skuteczności ich działania.

Dynamika systemów pozycyjnych opisywana jest za pomocą inkluzji różniczkowej

$$\ddot{y}(t) \in H(\dot{y}(t), y(t), t) + u(t) \quad , \quad (6.1)$$

gdzie u oznacza ograniczone sterowanie, y wyraża pozycję obiektu, natomiast funkcja H reprezentuje model oporów ruchu. W przypadku pominięcia tego czynnika, tzn. gdy odwzorowanie H jest tożsamościowo równe zeru, inkluzja (6.1) redukuje się do równania różniczkowego przedstawiającego drugą zasadę dynamiki Newtona.

Istotnym elementem powyższego opisu jest ograniczona wielowartościowa fun-

kcja H , charakteryzująca opory ruchu. Dla większości występujących w praktyce ich rodzajów, funkcja ta może być przedłożona w następującej postaci:

$$H(\dot{y}(t), y(t), t) = v(\dot{y}(t), y(t), t) F(\dot{y}(t)) \quad , \quad (6.2)$$

przy czym v oznacza odwzorowanie ciągłe, natomiast F stanowi funkcję przedziałami ciągłą, dodatkowo wielowartościową w punktach nieciągłości. Niech dla potrzeb ilustracji, jej najprostsza forma dana będzie wzorem

$$F(\dot{y}(t)) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } \dot{y}(t) > 0 \\ [-s, s] & \text{gdy } \dot{y}(t) = 0 \\ 1 & \text{gdy } \dot{y}(t) < 0 \end{cases} \quad , \quad (6.3)$$

gdzie parametr $s > 1$ związany jest ze współczynnikiem tarcia statycznego. Tak ogólne założenia nie pozwalają na zastosowanie metod klasycznej optymalizacji dynamicznej, w szczególności zasady maksimum Pontriagina. Ostatecznie, poza trywialnymi przypadkami odwzorowania v , synteza sterowania czasoptymalnego okazuje się niemożliwa do zrealizowania dla powyższego zagadnienia deterministycznego.

Poniżej przedstawiona zostanie probabilistyczna koncepcja rozwiązania problemu. W przyjętym tu losowym modelu oporów ruchu założone będzie, że określona w równaniu (6.2) funkcja v jest realizacją zadanego procesu stochastycznego o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i wspólnie ograniczonych. Taki model oporów ruchu uwzględni, w postaci probabilistycznej nieokreśloności, zależność powyższych oporów od szeregu innych czynników, nie tylko $\dot{y}(t)$, $y(t)$, t , ale także tych, które w ujęciu deterministycznym najczęściej są pomijane ze względu na konieczność uproszczenia modelu. Koncepcja probabilistyczna uwzględni również w sposób naturalny pojawiające się w systemie zakłócenia.

Czynnik losowy wprowadzony przez proces stochastyczny powoduje, że rozważany system dynamiczny opisywany będzie za pomocą losowej inkluzji różniczkowej. Ponieważ miara probabilistyczna związana z tym procesem może mieć również rozkład jednopunktowy, to tak sformułowane zagadnienie sterowania losowego jest uogólnieniem odpowiedniego problemu deterministycznego, w którym sterowany system jest nieciągły i niestacjonarny. Jeżeli ponadto powyższy rozkład jednopunktowy skoncentrowany jest na stałej realizacji o wartości zero, to problem redukuje się do elementarnego zadania czasoptymalnego przemieszczenia masy*.

Zostaną teraz przedstawione podstawowe pojęcia dotyczące zagadnienia rozwiązań inkluzji różniczkowych.

Niech T będzie przedziałem o niepustym wnętrzu.

Najpierw rozważana będzie deterministyczna inkluzja różniczkowa

* [5] – sekcja 7.2.

$$\dot{x}(t) \in G(x(t), t) \quad , \quad (6.4)$$

gdzie $G : \mathbb{R}^n \times T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, natomiast $\mathcal{P}(A)$ oznacza zbiór podzbiorów zbioru A . Poniżej zaprezentowane są trzy koncepcje rozwiązań, stosowane najczęściej w trakcie analizy nieciągłych systemów dynamicznych.

Funkcja x , absolutnie ciągła na każdym zwartym podprzedziale zbioru T , jest rozwiązaniem deterministycznej inkluzji różniczkowej (6.4):

- w sensie Caratheodory'ego (C-rozwiazaniem), jeżeli spełnia inkluzję (6.4) prawie wszędzie w T ,
- w sensie Filippova (F-rozwiazaniem), jeżeli

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}[G](x(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } T \quad , \quad (6.5)$$

- w sensie Krasovskiego (K-rozwiazaniem), jeżeli

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{K}[G](x(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } T \quad , \quad (6.6)$$

przy czym operatory \mathcal{F} oraz \mathcal{K} zdefiniowane są następująco:

$$\mathcal{F}[G](x(t), t) = \bigcap_{e>0} \bigcap_{Z \subset \mathbb{R}^n: m(Z)=0} \text{conv}[G((x(t)+eB) \setminus Z, t)] \quad (6.7)$$

$$\mathcal{K}[G](x(t), t) = \bigcap_{e>0} \text{conv}[G(x(t)+eB, t)] \quad , \quad (6.8)$$

gdzie B jest otwartą kulą jednostkową w przestrzeni \mathbb{R}^n , m stanowi n -wymiarową miarę Lebesgue'a, a $\text{conv}[C]$ oznacza wypukłą domkniętą powłokę zbioru C . Należy podkreślić, iż funkcja absolutnie ciągła posiada pochodną prawie wszędzie w przedziale T .

Niech ponadto $t_0 \in T$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

C-, F- lub K-rozwiazanie deterministycznej inkluzji różniczkowej (6.4) z warunkiem początkowym

$$x(t_0) = x_0 \quad (6.9)$$

jest jednoznaczne, jeżeli każde – odpowiednio – C-, F- lub K-rozwiazanie jest funkcją równą mu tożsamościowo.

W przypadku C-rozwiazania, pochodna $\dot{x}(t)$ uzależniona jest (poza zmienną t) jedynie od aktualnej wartości rozwiązania. Tymczasem, mając na uwadze nieuniknione w praktyce błędy identyfikacji, K-rozwiazanie dopuszcza już wszystkie punkty z otoczenia tej wartości. Kontynuując koncepcję uwzględniania błędów, F-rozwiazanie pomija dodatkowo zbiory miary zero – nieistotne z praktycznego punktu widzenia.

Wprost z powyższych definicji wynika, że każde C-rozwiazanie jest K-rozwiazaniem, ponieważ $G(x(t), t) \in \mathcal{K}[G](x(t), t)$, oraz każde F-rozwiazanie jest K-rozwia-

zaniem, gdyż $\mathcal{F}[G](x(t), t) \subset \mathcal{H}[G](x(t), t)$. K-rozwiązania stanowią jednak w praktyce zbyt rozległą klasę. I tak, w rozważaniach nad nieciągłymi systemami dynamicznymi, istotne utrudnienie stanowi brak uniwersalnego pojęcia rozwiązania. Oczywiście, istnienie jednoznacznych i równych sobie C-, F- oraz K-rozwiązań, znacznie upraszcza analizę i interpretację rozważanego zagadnienia.

Przedstawione powyżej pojęcia zostaną teraz uogólnione na losowe inkluzje różniczkowe. Uogólnienie takie nie jest ściśle ustalone. W dalszej części pracy stosowana będzie koncepcja rozwiązania prawie pewnego (z prawdopodobieństwem 1, pierwszego rodzaju) z uwagi na jej dogodną, oczywistą interpretację.

Niech (Ω, Σ, P) oznacza przestrzeń probabilistyczną. Z praktycznego punktu widzenia jej zupełność może być założona bez zmniejszenia ogólności rozważań.

Rozpatrywana będzie losowa inkluzja różniczkowa

$$\dot{X}(\omega, t) \in G(\omega, X(\omega, t), t), \quad (6.10)$$

gdzie $G: \Omega \times \mathbb{R}^n \times T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, natomiast X jest n -wymiarowym procesem stochastycznym (określonym na przedziale T).

Proces stochastyczny X jest prawie pewnym C-, F- lub K-rozwiazaniem losowej inkluzji różniczkowej (6.10), jeżeli prawie wszystkie jego realizacje są odpowiednio C-, F- lub K-rozwiazaniami odpowiednich deterministycznych inkluzji różniczkowych otrzymanych przy ustalonym czynniku ω .

Niech ponadto X_0 będzie n -wymiarową zmienną losową.

Prawie pewne C-, F- lub K-rozwiazanie losowej inkluzji różniczkowej (6.10) z warunkiem początkowym

$$X(\omega, t_0) = X_0(\omega) \quad \text{dla prawie każdego } \omega \in \Omega \quad (6.11)$$

jest jednoznaczne, jeżeli każde prawie pewne – odpowiednio – C-, F- lub K-rozwiazanie jest procesem stochastycznie z nim równoważnym (w przypadku procesów X^{\sim} i X^{\approx} oznacza to, iż $P(\{\omega \in \Omega : X^{\sim}(\omega, t) = X^{\approx}(\omega, t)\}) = 1$ dla każdego $t \in T$).

Również uogólnienie na systemy losowe pojęcia sterowania czasooptymalnego nie jest ściśle ustalone. Z praktycznego punktu widzenia, najkorzystniejsze byłoby wyznaczenie sterowania będącego jedynie funkcją czasu oraz stanu w układach zamkniętych, realizującego minimum wartości oczekiwanej czasu osiągnięcia zbioru docelowego. Niestety, tak sformułowane zagadnienie nie rokuje nadziei na jego rozwiązanie. Poniżej określona zostanie odmienna definicja sterowania czasooptymalnego dla systemów losowych. Sterowanie to, przez analogię do prawie pewnego rozwiązania, nazywane będzie prawie pewnym sterowaniem czasooptymalnym.

Niech $G: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, U oznacza m -wymiarowy proces stochastyczny (określony na przedziale T), natomiast następująca inkluzja różniczkowa:

$$\dot{X}(\omega, t) \in G(\omega, X(\omega, t), U(\omega, t), t) \quad (6.12)$$

z warunkiem początkowym

$$X(\omega, t_0) = X_0(\omega) \quad \text{dla prawie każdego } \omega \in \Omega \quad (6.13)$$

określa dynamikę losowego systemu poddanego działaniu sterowania U . Wtedy, m -wymiarowy proces stochastyczny U_0 nazywany będzie prawie pewnym sterowaniem czasooptymalnym, jeżeli prawie wszystkie jego realizacje są sterowaniami czasooptymalnymi (tzn. sprowadzają stan systemu do zbioru docelowego w minimalnym i skończonym czasie) dla odpowiednich układów deterministycznych otrzymanych przy ustalonym czynniku ω .

Prawie pewne sterowanie czasooptymalne zapewnia oczywiście realizację minimum wartości oczekiwanej czasu osiągnięcia zbioru docelowego, jednak jest dodatkowo zależne od czynnika losowego. Zależność ta sprawia, że powyższe sterowanie jest trudne do bezpośredniego zastosowania, ale stanowi dogodną podstawę do tworzenia technicznych rozwiązań struktur suboptymalnych, w których bezpośrednia zależność funkcji sterującej od czynnika losowego jest eliminowana.

Poniżej zostanie przedstawione twierdzenie, którego teza stanowi podstawę rozpatrywanej tu probabilistycznej koncepcji rozwiązania problemu czasooptymalnego sterowania systemami pozycyjnymi.

Twierdzenie 6.1 (o losowym sterowaniu czasooptymalnym)

Niech:

- (1) $t_0 \in \mathbb{R}$, $T = [t_0, \infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_-, v_+ \in \mathbb{R}$ takie iż $[v_-, v_+] \subset (-1, 1)$;
- (2) początek układu współrzędnych stanowi zbiór docelowy;
- (3) $U_a = \{u : \Omega \times T \rightarrow [-1, 1], \text{ mierzalne}\}$ reprezentuje zbiór sterowań dopuszczalnych;
- (4) $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ jest funkcją przedziałami ciągłą, spełniającą w punktach ciągłości lokalnie warunek Lipschitza oraz nierówność $z \cdot f(z) \geq 0$; ponadto niech dana będzie funkcja wielowartościowa $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}([-1, 1])$ taka, że

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{dla } z \neq z_i \\ F_i & \text{dla } z = z_i \end{cases}, \quad (6.14)$$

gdzie z_i jest dowolną liczbą rzeczywistą, F_i – dowolnym podzbiorem przedziału $[-1, 1]$ oraz $i = 1, 2, \dots, k$;

- (5) (Ω, Σ, P) oznacza zupełną przestrzeń probabilistyczną;
- (6) V jest procesem stochastycznym określonym na przestrzeni (Ω, Σ, P) oraz zbiorze T , o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i wspólnie ograniczonych nierównością $V(\omega, t) \in [v_-, v_+]$ dla $t \in T$;

(7) losowa inkluzja różniczkowa

$$\dot{X}_1(\omega, t) = X_2(\omega, t) \quad (6.15)$$

$$\dot{X}_2(\omega, t) \in U(\omega, t) - V(\omega, t) F(X_2(\omega, t)) \quad (6.16)$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{bmatrix} X_1(\omega, t_0) \\ X_2(\omega, t_0) \end{bmatrix} = x_0 \quad \text{dla prawie każdego } \omega \in \Omega \quad (6.17)$$

określa dynamikę losowego systemu poddanego działaniu sterowania U .

Istnieje wtedy prawie pewne sterowanie czasooptymalne U_o , którego realizacje przyjmują wartości $+1$ lub -1 i mają co najwyżej jeden punkt nieciągłości. Generuje ono jednoznaczne prawie pewne C-rozwiązanie, będące również jednoznacznym prawie pewnym F-rozwiązaniem oraz jednoznacznym prawie pewnym K-rozwiązaniem. ■

Dowód powyższego twierdzenia znajduje się w dodatku E, przedłożonym jako podrozdział 8.5. Przestrzeń stanów została tam podzielona na następujące rozłączne zbiory: R_+ , R_- , Q_+ , Q_- oraz $\{(0,0)\}$. Mianowicie, niech K_- oraz K_+ stanowią zbiory tych wszystkich stanów, które mogą być przeprowadzone do początku układu współrzędnych sterowaniem $u \equiv -1$, gdy odpowiednio $v \equiv v_-$ oraz $v \equiv v_+$. Analogicznie określić można zbiory K_{+-} oraz K_{++} w przypadku $u \equiv +1$, gdy odpowiednio $v \equiv v_-$ oraz $v \equiv v_+$ (rys. 6.1).

Ponadto definiowane są:

$$Q_+ = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \text{ takie iż istnieją } [x'_1, x_2]^T \in K_{++} \text{ i } [x''_1, x_2]^T \in K_{+-} \\ \text{przy czym } x'_1 \leq x_1 \leq x''_1\} \quad (6.18)$$

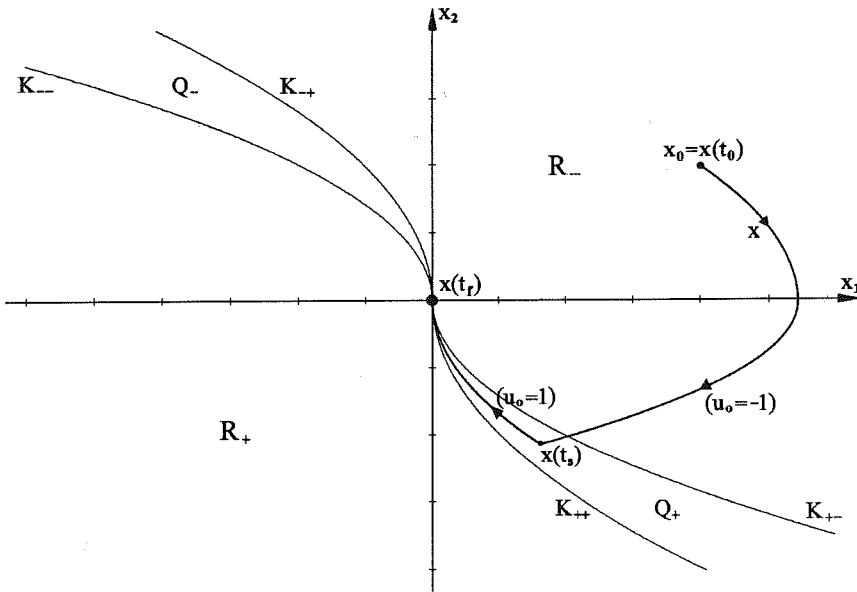
$$Q_- = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \text{ takie iż istnieją } [x'_1, x_2]^T \in K_{--} \text{ i } [x''_1, x_2]^T \in K_{+-} \\ \text{przy czym } x'_1 \leq x_1 \leq x''_1\} \quad (6.19)$$

$$R_+ = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \setminus Q \text{ takie iż istnieją } [x'_1, x_2]^T \in Q \\ \text{przy czym } x_1 < x'_1\} \quad (6.20)$$

$$R_- = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \setminus Q \text{ takie iż istnieją } [x'_1, x_2]^T \in Q \\ \text{przy czym } x'_1 < x_1\} \quad (6.21)$$

gdzie $Q = Q_+ \cup \{[0,0]^T\} \cup Q_-$.

Niech najpierw czynnik losowy ω , a zatem także realizacja $V(\omega, \cdot)$, będą ustalone. Jeżeli $x_0 \in R_-$, to istnieje t , takie, że jednoznaczne C-, F- i K-rozwiązanie x generowane przez sterowanie



Rys. 6.1. Ilustracja dowodu twierdzenia 6.1 (przedstawiona trajektoria odpowiada przypadkowi $x_0 \in R_-$).

$$u_o(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } t \in [t_0, t_s) \\ +1 & \text{dla } t \in [t_s, \infty) \end{cases} \quad (6.22)$$

osiąga zbiór docelowy w skończonym czasie t_f , przy czym $t_0 < t_s < t_f$ oraz $x(t_s) \in Q_+$ (rys. 6.1). Analogicznie gdy $x_0 \in R_+$; istnieje wtedy t_s takie, że rozwiązanie generowane przez sterowanie

$$u_o(t) = \begin{cases} +1 & \text{dla } t \in [t_0, t_s) \\ -1 & \text{dla } t \in [t_s, \infty) \end{cases} \quad (6.23)$$

osiąga zbiór docelowy w skończonym czasie t_f , przy czym $t_0 < t_s < t_f$ oraz $x(t_s) \in Q_-$.

W przypadku $x_0 \in Q_+$, dla poszczególnych elementów czynnika losowego ω sterowanie czasooptymalne może być postaci (6.22) lub (6.23), z podanymi powyżej dodatkowymi warunkami, albo

$$u_o(t) = +1 \quad \text{dla } t \in [t_0, \infty) \quad (6.24)$$

Przypadek $x_0 \in Q_-$ jest analogiczny. Odpowiednik sterowania (6.24) stanowi wtedy

$$u_o(t) = -1 \quad \text{dla } t \in [t_0, \infty) . \quad (6.25)$$

Dowód optymalności powyższych sterowań opiera się na teorii nierówności różniczkowych.

I wreszcie, poprzez złożenia odpowiednich odwzorowań wykazano, że w przypadku sterowania postaci (6.22)-(6.23) czas t_s jest zmienną losową o wartościach ograniczonych, a także, iż funkcja zdefiniowana jako

$$U_o(\omega, \cdot) \equiv u_o , \quad (6.26)$$

gdzie u_o określone zostało poprzednio przy ustalonym czynniku losowym ω , stanowi proces stochastyczny, a w konsekwencji prawie pewne sterowanie czasooptymalne. Podobny jest dowód faktu, że procesami stochastycznymi są rodziny generowanych przez to sterowanie, jednoznacznych i równych sobie C-, F- oraz K-rozwiązań (dodatek E – podrozdział 8.5).

Zmiana znaku poszczególnych realizacji sterowania U_o (tzw. przełączenie sterowania) nastąpić może tylko wtedy, gdy stan systemu znajduje się w zbiorze (domkniętym obszarze) Q . Dlatego nazywany on jest obszarem przełączeń.

Założenie (6) twierdzenia 6.1 dotyczy procesu stochastycznego V o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i wspólnie ograniczonych. Warunek ograniczenia może być sprawdzony na podstawie rozkładów jednowymiarowych, natomiast warunek wystarczający ciągłości prawie wszystkich realizacji procesu stochastycznego formułuje się w oparciu o rozkłady dwuwymiarowe. Ostatecznie, wymagania określone powyżej w stosunku do procesu stochastycznego V są wzajemnie niezależne i identyfikowalne na podstawie rozkładów skończenie wymiarowych.

Relacja $[v_-, v_+] \subset (-1, 1)$ gwarantuje sterowalność systemu. Założenie, że funkcja F spełnia warunek Lipschitza, zapewnia jednoznaczność i równość prawie pewnych C-, F- oraz K-rozwiązań. Ograniczenie $z \cdot F(z) \geq 0$ zostało wprowadzone jedynie ze względu na spójność zapisu, aczkolwiek jest ono zgodne z fizycznymi własnościami zjawisk tarcia, gdyż wraz z dodatnimi wartościami procesu stochastycznego V stanowi o rozpraszaniu energii.

Podsumowując: klasyczna krzywa przełączeń γ , znana z elementarnego zadania czasooptymalnego przemieszczenia masy, została uogólniona poprzez twierdzenie 6.1 do obszaru przełączeń Q ($\gamma = Q$ gdy $v_- = v_+ = 0$). Funkcja H wprowadzona we wzorze (6.1), reprezentująca model oporów ruchu, uległa dekompozycji na dwa czynniki $F(\dot{y}(t))$ i $V(\omega, t)$. Pierwszy – deterministyczny – umożliwia uwzględnienie nieciągłości i wielowartościowości oporów ruchu. Drugi, dzięki swojej probabilistycznej naturze, zawiera między innymi błędy aproksymacji i identyfikacji (także pierwszego czynnika), zależność charakterystyk oporów ruchu od pozycji, czasu, temperatury, jak również zakłóceń i szumów występujących w rzeczywistych systemach. Krzywa przełączeń (nawet ogólniejsza niż γ , tzn. otrzymana przy warunku

$v_- = v_+$), definiowana przez pierwszy – deterministyczny – czynnik, została „rozmyta” przez drugi – probabilistyczny – do obszaru przełączeń.

Poza szczególnymi przypadkami, bezpośrednia realizacja układu generującego prawie pewne sterowanie czasooptymalne natrafia na trudności. Wartość tego sterowania jest bowiem uzależniona od czynnika losowego, nieznanego *a priori*. Jednakże dzięki wynikom twierdzenia 6.1, prezentowany materiał umożliwi konstrukcję technicznych struktur suboptymalnych, w których zależność ta jest wyeliminowana.

Pierwszą strukturę suboptymalną oprócz można na tej części tezy, która stanowi, iż U_o jest procesem stochastycznym o wartościach ograniczonych. Istnieje więc jego wartość oczekiwana i jako funkcja deterministyczna o wartościach z przedziału $[-1, 1]$ może być ona wykorzystana w procesie sterowania suboptymalnego.

Idea drugiej struktury suboptymalnej wynika z faktu, że dla ustalonego $x_0 \in R_- \cup R_+$ zmiana znaku poszczególnych realizacji procesu U_o jest zmienną losową o wartościach ograniczonych. Istnieje zatem jej wartość oczekiwana i można ją uznać za czas przełączenia sterowania suboptymalnego postaci odpowiednio $(-1, +1)$ lub $(+1, -1)$, będącego wtedy funkcją deterministyczną. Podobnie może być sformalizowany przypadek $x_0 \in Q_- \cup Q_+$. Warto zauważyć, że w przeciwieństwie do pierwszej struktury, przy praktycznej realizacji takiego układu wystarczający jest element wykonawczy generujący jedynie ekstremalne wartości zbioru sterowań dopuszczalnych, tzn. $+1$ i -1 .

Przedstawione powyżej struktury suboptymalne określone były w konfiguracji otwartej. Zgodnie z wymogami praktyki inżynierskiej preferowane są jednak systemy zamknięte.

Zaprezentowana teraz koncepcja trzeciej struktury suboptymalnej oparta zostanie na fizycznych własnościach procesów tarcia, w szczególności na spostrzeżeniu, iż wpływ oporów ruchu na procesy dynamiczne w pewnych warunkach podlega uśrednieniu. I tak, po przeprowadzeniu szczegółowej analizy wrażliwości układu sterowania na wartość oporów ruchu, do syntezy regulatora zostaną wykorzystane elementy statystycznej teorii decyzji, przedstawione w podrozdziale 2.2, przy czym funkcja strat związana będzie z powiększeniem się czasu osiągnięcia zbioru docelowego, gdy przełączenie sterowania okazuje się zbyt wczesne lub za późne.

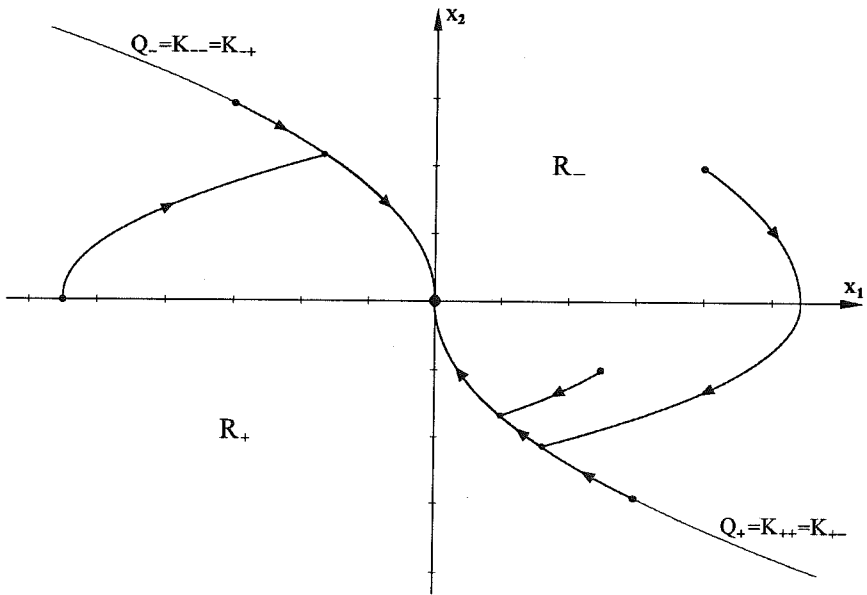
Zostanie zatem teraz rozpatrzony szczególny przypadek miary probabilistycznej P związanej z procesem stochastycznym V , gdy skoncentrowana jest ona na stałych realizacjach (interpretowanych jako uśrednione opory ruchu).

Jeżeli wartość owej stałej realizacji jest znana i wynosi σ , to zgodnie z oznaczeniami twierdzenia 6.1:

$$v_- = v_+ = \sigma \quad , \quad (6.27)$$

a więc $K_{+-} = K_{++}$ oraz $K_{-+} = K_{-+}$, czyli obszar przełączeń Q sprowadza się do krzy-

wej, której kształt uzależniony jest od parametru ν . Jeżeli jego wartość $\tilde{\sigma}$ przyjęta w równaniach regulatora jest równa wartości ν występującej w obiekcie, czyli w przypadku $\tilde{\sigma} = \nu$, uzyskane sterowanie jest czasooptymalne (rys. 6.2). Stan systemu sprowadzany jest do krzywej przełączeń i będąc odąd stale w niej zawartym, osiąga zbiór docelowy w minimalnym i skończonym czasie.



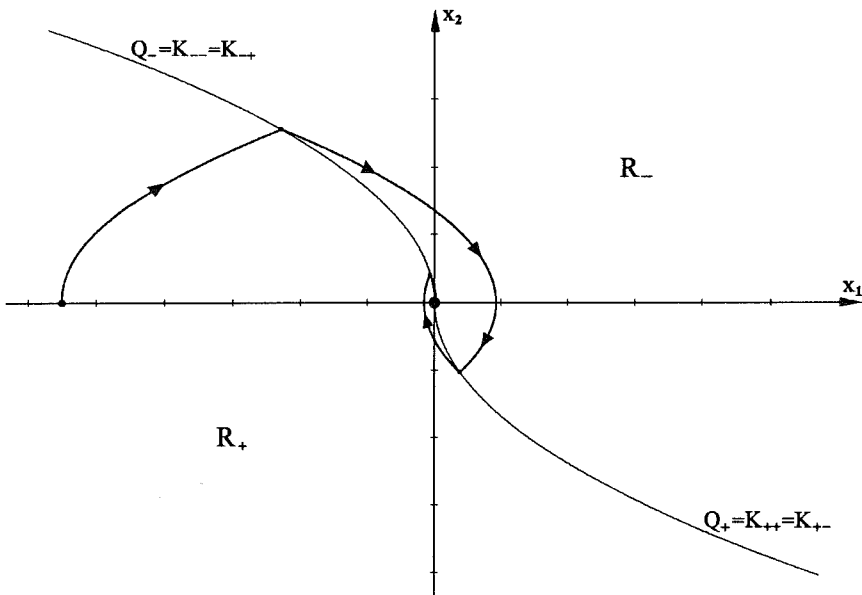
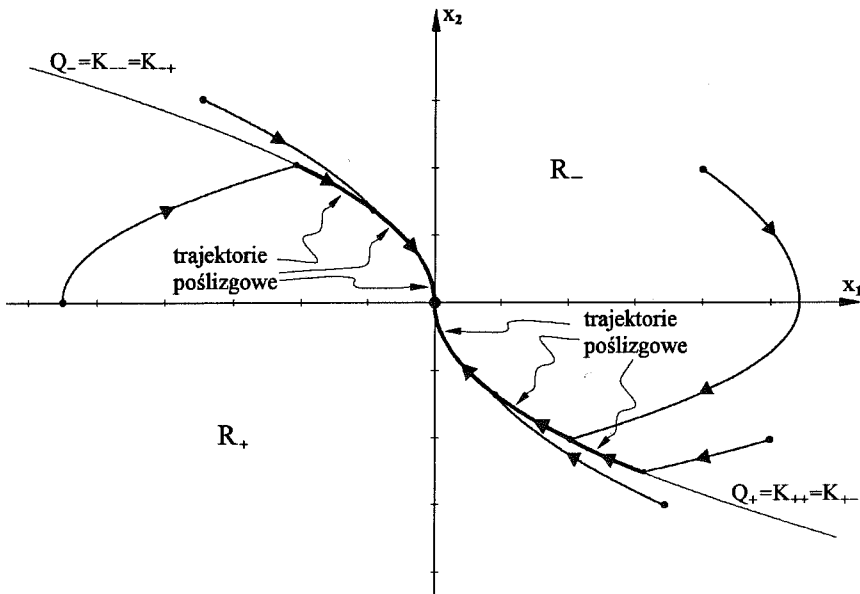
Rys. 6.2. Przypadek $\tilde{\sigma} = \nu$.

Na rysunku 6.3 pokazana jest trajektoria reprezentatywna dla przypadku $\tilde{\sigma} > \nu$. Na skutek występujących oscylacji wokół zbioru docelowego, w systemie pojawiają się przeregulowania. Jego stan osiąga zbiór docelowy w skończonym czasie.

I wreszcie, rysunek 6.4 przedstawia trajektorie reprezentatywne gdy $\tilde{\sigma} < \nu$. Zbiór docelowy osiągnąć jest w skończonym czasie. W systemie występują trajektorie poślizgowe.

W obu przypadkach, czas osiągnięcia zbioru docelowego zwiększa się wobec optymalnego w przybliżeniu wprost proporcjonalnie do różnicy między $\tilde{\sigma}$ oraz ν .

W praktyce, wartość parametru ν nie jest znana *a priori* – parametr ten jest zmienną losową. Przedstawione w podrozdziale 2.2 elementy statystycznej teorii decyzji, w połączeniu z rezultatami powyższej analizy wrażliwości, implikują następujące sugestie dotyczące metody wyznaczania wartości parametru $\tilde{\sigma}$. Jest on traktowany jako decyzja, podczas gdy parametr ν uznawany będzie za stan natury.

Rys. 6.3. Przypadek $\bar{\sigma} > \nu$.Rys. 6.4. Przypadek $\bar{\sigma} < \nu$.

Jeżeli w sterowanym systemie przeregulowania są dopuszczalne, to parametr $\tilde{\sigma}$ warto jest ustalić na podstawie reguły bayesowskiej z rzeczywistymi wartościami funkcji strat. Takie postępowanie jest możliwe, gdyż określenie wartości $\tilde{\sigma}$ zarówno mniejszej, równej, jak i większej od parametru ν , sprowadza stan systemu do zbioru docelowego w skończonym czasie (aczkolwiek wzrasta on w przybliżeniu proporcjonalnie do różnicy między $\tilde{\sigma}$ oraz ν).

Natomiast jeśli przeregulowania nie mogą być zaakceptowane, to należy stosować regułę minimaksu z nieskończonymi wartościami funkcji strat dla $\tilde{\sigma} > \nu$. Eliminuje to występowanie przeregulowań, gdyż pojawiają się one jedynie gdy $\tilde{\sigma} > \nu$.

Niech dla ilustracji powyższej procedury, ν będzie zmienną losową, której rozkład posiada funkcję gęstości h o nośniku postaci $[\nu_-, \nu_+]$, przy czym $[\nu_-, \nu_+] \subset (-1, 1)$, a ponadto zakłada się, że odwzorowanie to jest ciągłe i dodatnie w przedziale (ν_-, ν_+) . Funkcja strat określona będzie wzorem

$$l(\tilde{\sigma}, \nu) = \begin{cases} -\beta(\tilde{\sigma} - \nu) & \text{dla } \tilde{\sigma} - \nu \leq 0 \\ \varphi(\tilde{\sigma} - \nu) & \text{dla } \tilde{\sigma} - \nu \geq 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

gdzie $\beta, \varphi \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$, przy czym jedynie jedna z tych wielkości może być nieskończona. W przypadku nieskończonej wartości, niech $\infty \cdot 0 = 0$.

Zgodnie z powyższymi założeniami przyjęte zostanie, że $\mathcal{N} = \mathcal{D} = [\nu_-, \nu_+]$.

Przy ustalonym $\tilde{\sigma}$ z równań (2.23)-(2.24) wynika, iż

$$l_m(\tilde{\sigma}) = \max(\{-\beta(\tilde{\sigma} - \nu_+), \varphi(\tilde{\sigma} - \nu_-)\}) \quad (6.29)$$

$$l_b(\tilde{\sigma}) = \int_{\nu_-}^{\tilde{\sigma}} \varphi(\tilde{\sigma} - \nu) h(\nu) d\nu - \int_{\tilde{\sigma}}^{\nu_+} \beta(\tilde{\sigma} - \nu) h(\nu) d\nu \quad (6.30)$$

Jeżeli $\varphi = \infty$, to zależność (6.29) implikuje, że infimum funkcji l_m po zbiorze \mathcal{D} osiągane jest przez

$$\tilde{\sigma} = \nu_- \quad (6.31)$$

(Dla potrzeb konstrukcji następnej struktury suboptymalnej zanotowane jeszcze będzie, że w przypadku gdy $\beta = \infty$, powyższe infimum realizuje

$$\tilde{\sigma} = \nu_+ \quad (6.32)$$

Tymczasem dzięki założeniu ciągłości funkcji h , odwzorowanie l_b jest różniczkowalne w zbiorze (ν_-, ν_+) , a zatem z zależności (6.30) otrzymuje się

$$l_b'(\tilde{\sigma}) = \beta \int_{\nu_+}^{\tilde{\sigma}} h(\nu) d\nu + \varphi \int_{\tilde{\sigma}}^{\nu_-} h(\nu) d\nu \quad (6.33)$$

i analogicznie:

$$l_b''(\bar{\sigma}) = (\beta + \varphi)h(\bar{\sigma}) . \quad (6.34)$$

Wykorzystując wzór (6.33), poprzez elementarne przekształcenia dowieść można równoważności warunków:

$$l_b'(\bar{\sigma}) = 0 \quad (6.35)$$

$$\int_{\sigma_-}^{\bar{\sigma}} h(\sigma) d\sigma = \frac{\beta}{\beta + \varphi} . \quad (6.36)$$

Zależność (6.34) stanowi, iż w przedziale (σ_-, σ_+) wartości funkcji l_b'' są dodatnie, a więc odwzorowanie l_b jest tu ściśle wypukłe. Ponieważ $0 < \frac{\beta}{\beta + \varphi} < 1$, to równanie (6.36), równoważne warunkowi (6.35), jest spełnione tylko w jednym punkcie. Funkcja l_b osiąga tu zatem swe minimum, globalne w zbiorze $\mathcal{D} = [\sigma_-, \sigma_+]$ dzięki jej ciągłości w punktach σ_- i σ_+ .

Wartość $\bar{\sigma}$ spełniająca warunek (6.36) jest kwantylem $\frac{\beta}{\beta + \varphi}$ -tego rzędu. Definicja kwantyla oraz utylitarne algorytmy wyznaczania jego wartości zaprezentowane zostały w podrozdziale 3.4. Do praktycznych zastosowań rekomendowany jest dokładniejszy estymator jądrowy \hat{q}_J , zdefiniowany zależnością (3.113).

Podsumowując powyższe rozważania: jeśli w sterowanym obiekcie przeregulowania nie są akceptowane i wartość parametru $\bar{\sigma}$ określana ma być zgodnie z regułą minimaksu przy $\varphi = \infty$, to otrzymuje się ją ze wzoru (6.31). Jeżeli natomiast przeregulowania są dopuszczalne, a więc gdy ustalenie wartości $\bar{\sigma}$ może być dokonane z użyciem reguły bayesowskiej dla rzeczywistych parametrów β oraz φ , to uzyskuje się ją wykorzystując kryterium (6.36).

Dysponując tak obliczoną wartością parametru $\bar{\sigma}$ można otrzymać równania regulatora suboptymalnego. W przypadku przykładowej funkcji F określonej wzorem (6.3), zbiór $Q_+ = K_{+-} = K_{++}$ definiuje na płaszczyźnie $x_1 - x_2$ zależność

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2(1 + \bar{\sigma})} \quad \text{dla } x_2 \in (-\infty, 0) , \quad (6.37)$$

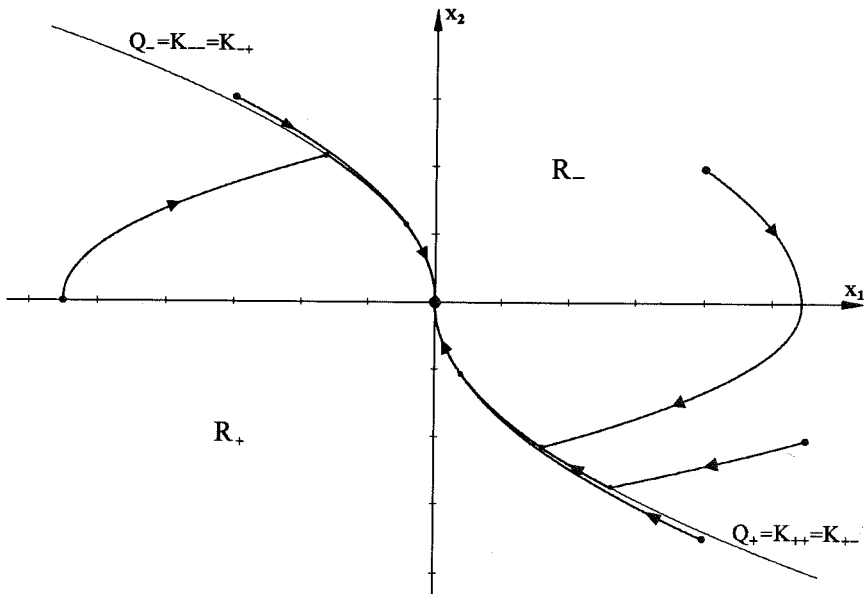
natomiast $Q_- = K_{--} = K_{-+}$ dany jest wzorem

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2(1 + \bar{\sigma})} \quad \text{dla } x_2 \in (0, \infty) . \quad (6.38)$$

Zbiory R_- i R_+ ustalane formułami (6.20)-(6.21). Ostatecznie, sterowanie suboptymalne zdefiniowane jest w konfiguracji zamkniętej przez następującą równość:

$$U_s(\omega, t) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in (R_- \cup Q_-) \\ 0 & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in \{[0, 0]^T\} \\ +1 & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in (R_+ \cup Q_+) \end{cases} \quad (6.39)$$

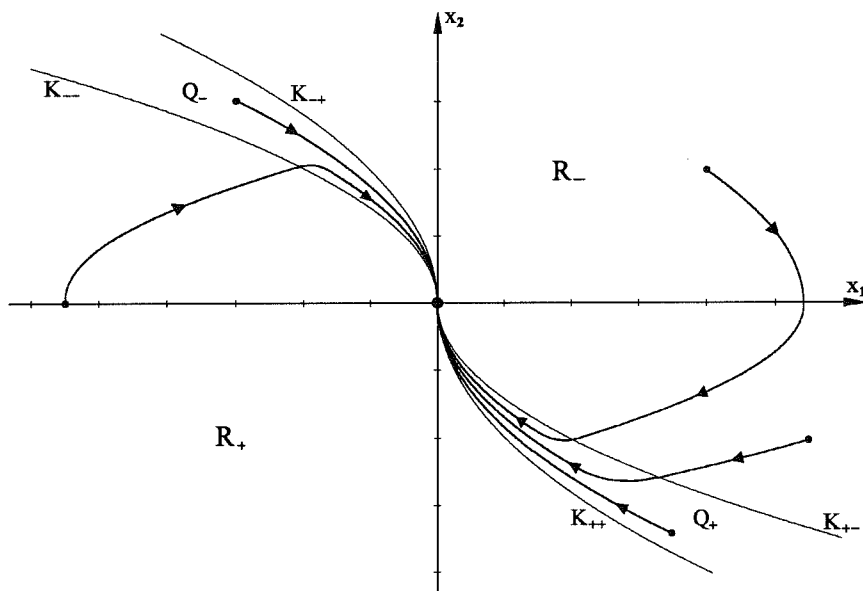
Rysunek 6.5 stanowi ilustrację przedstawionej powyżej trzeciej struktury suboptymalnej oraz otrzymanych z jej wykorzystaniem wyników.



Rys. 6.5. Trzecia struktura suboptymalna.

W przypadku gdy stosowany w systemie element wykonawczy dopuszcza wszystkie wartości sterowania z przedziału $[-1, 1]$, poprzednia struktura może być zmodyfikowana w celu wyeliminowania częstych przełączeń pomiędzy wartościami $+1$ i -1 , występujących na trajektoriach poślizgowych. Przełączenia takie niejednokrotnie wpływają negatywnie na żywotność urządzenia oraz komfort użytkownika. Idea ta stanowić będzie podstawę czwartej struktury suboptymalnej.

Niech więc poza parametrem $\tilde{\sigma}$ wyznaczonym według reguł właściwych trzeciej strukturze, dany będzie także parametr $\tilde{\sigma}$, przy czym $-1 < \tilde{\sigma} < \tilde{\sigma}$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 6.1, niech K_{--} oraz K_{+-} oznaczają zbiory tych wszystkich stanów, które mogą być przeprowadzone do początku układu współrzędnych sterowaniem $u \equiv -1$, ale przy odpowiednio $v \equiv \tilde{\sigma}$ oraz $v \equiv \tilde{\sigma}$; i analogicznie: zbiory K_{+-} oraz K_{++} dla $u \equiv +1$, gdy odpowiednio $v \equiv \tilde{\sigma}$ oraz $v \equiv \tilde{\sigma}$ (rys. 6.6). Zbiory Q_+ , Q_- i R_+ , R_- pozostają niezmienione, a zatem definiowane są zależnościami



Rys. 6.6. Czwarta struktura suboptymalna.

(6.18)-(6.21). Sterowanie suboptymalne określa formuła

$$U_s(\omega, t) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in R_- \\ -z(x_1, x_2) & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in Q_- \\ 0 & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in \{[0, 0]^T\} \\ z(x_1, x_2) & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in Q_+ \\ +1 & \text{gdy } [X_1(\omega, t), X_2(\omega, t)]^T \in R_+ \end{cases}, \quad (6.40)$$

przy czym funkcja $z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje wartość $1 - \nu_+ + \nu_-$ na zbiorach K_{++} oraz K_{--} , po czym wzrasta liniowo – względem współrzędnej x_1 – do jedności na zbiorach K_{+-} oraz K_{-+} , czyli

$$z(x_1, x_2) = \frac{\nu_+ - \nu_-}{k_{-+}(x_2) - k_{--}(x_2)} (x_1 - k_{-+}(x_2)) + 1, \quad (6.41)$$

gdzie odwzorowania k_{-+} oraz $k_{--}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określone są w naturalny sposób jako

$$x_1 = k_{-+}(x_2) \Leftrightarrow [x_1, x_2]^T \in K_{-+} \quad (6.42)$$

$$x_1 = k_{--}(x_2) \Leftrightarrow [x_1, x_2]^T \in K_{--}. \quad (6.43)$$

W przypadku przykładowej funkcji F danej wzorem (6.3), zbiory K_{-+} oraz K_{--}

zdefiniowane są na płaszczyźnie $x_1 - x_2$ odpowiednio przez równania

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2(1 + \tilde{\sigma})} \quad \text{dla } x_2 \in (-\infty, 0) \quad (6.44)$$

oraz

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2(1 + \tilde{\sigma})} \quad \text{dla } x_2 \in (-\infty, 0) \quad (6.45)$$

natomiast K_{++} oraz K_{+-} można kolejno określić zależnościami

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2(1 + \tilde{\sigma})} \quad \text{dla } x_2 \in (0, \infty) \quad (6.46)$$

oraz

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2(1 + \tilde{\sigma})} \quad \text{dla } x_2 \in (0, \infty) \quad (6.47)$$

Wartość parametru $\tilde{\sigma}$ należy wyznaczyć heurystycznie. Ogólnie, różnica $\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}$ powinna być proporcjonalna do opóźnienia występującego w obiekcie.

Trajektorie generowane przez czwartą strukturę suboptymalną pokazane są na rysunku 6.6. Przypominają one rezultaty osiągane na torze bobslejowym dzięki odpowiedniemu wymodelowaniu jego kształtu.

Prezentowane powyżej twierdzenie 6.1 sformułowane zostało w swej podstawowej wersji. Wynikające stąd suboptymalne struktury sterujące mogą być jednak łatwo uzupełnione o szereg dodatkowych aspektów, niejednokrotnie pojawiających się w praktyce inżynierskiej.

Uwzględnienie, często niezbędnego w wielu zastosowaniach, warunku ograniczenia prędkości do wartości $b > 0$, a zatem wprowadzenie założenia

$$|X_2(\omega, t)| \leq b \quad \text{dla każdego } t \in T \text{ oraz prawie każdego } \omega \in \Omega \quad (6.48)$$

powoduje, iż realizacje prawie pewnego sterowania czasoptymalnego postaci (6.22) ulegają modyfikacji na

$$u_o(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } t \in [t_0, t_1) \\ v(t) \cdot F(-b) & \text{dla } t \in [t_1, t_2) \\ +1 & \text{dla } t \in [t_2, \infty) \end{cases} \quad (6.49)$$

gdzie $t_0 < t_1 \leq t_2 < t_f < \infty$, $x(t_2) \in Q_+$ i jeżeli $t_1 \neq t_2$, to również $x(t) \in \mathbb{R} \times \{-b\}$ dla $t \in [t_1, t_2]$. (Symbol v oznacza realizację procesu stochastycznego V odpowiadającą ustalonymu czynnikowi losowemu ω , tzn. $v \equiv V(\omega, \cdot)$.) Analogicznie, realizacje

opisywane wzorem (6.23) zmieniają się na

$$u_o(t) = \begin{cases} +1 & \text{dla } t \in [t_0, t_1) \\ v(t) \cdot F(b) & \text{dla } t \in [t_1, t_2) \\ -1 & \text{dla } t \in [t_2, \infty) \end{cases}, \quad (6.50)$$

przy czym $t_0 < t_1 \leq t_2 < t_f < \infty$, $x(t_2) \in Q_-$ oraz jeśli $t_1 \neq t_2$, to także $x(t) \in \mathbb{R} \times \{b\}$ gdy $t \in [t_1, t_2]$. Koncepcja pierwszej struktury suboptymalnej pozostaje niezmienną. Podobna jest również modyfikacja drugiej z nich, uwzględniająca występowanie dwóch zmiennych losowych t_1 i t_2 . W przypadku trzeciej struktury suboptymalnej, sterowanie zdefiniowane może być zależnością

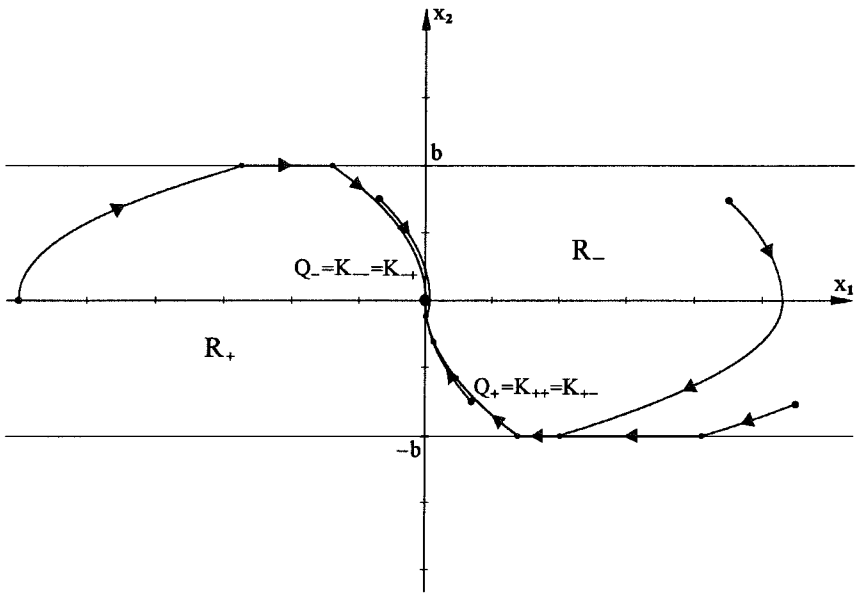
$$U_s^-(\omega, t) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } X_2(\omega, t) \geq b \\ U_s(\omega, t) & \text{gdy } X_2(\omega, t) \in (-b, b) \\ +1 & \text{gdy } X_2(\omega, t) \leq -b \end{cases}, \quad (6.51)$$

gdzie U_s dane jest wzorem (6.39). Trajektorie generowane przez sterowanie (6.51) pokazuje rysunek 6.7. Z kolei na rysunku 6.8 zilustrowano ideę uwzględnienia warunku ograniczenia prędkości w przypadku czwartej struktury. Podobnie jak współczynnik $\tilde{\sigma}$, wprowadzony tu parametr \tilde{b} uzależniony jest od występującego w systemie opóźnienia.

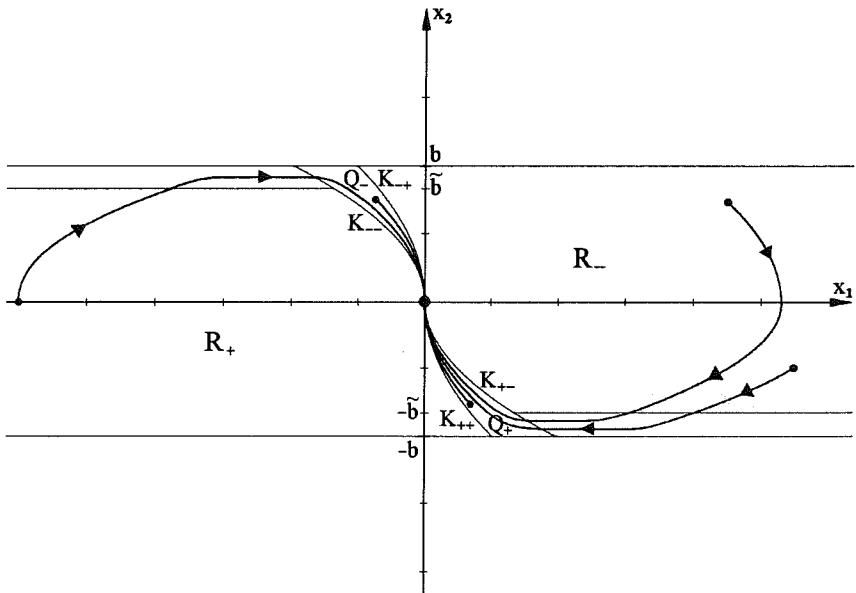
Uogólnienie zbioru docelowego do dowolnego punktu $x_f = [x_{f1}, x_{f2}]^T \in \mathbb{R}^2$ nie powoduje zmian w koncepcjach dwóch pierwszych struktur suboptymalnych. Jeżeli $x_{f2} = 0$, to nie ulegają istotnym zmianom także struktury trzecia i czwarta, a to dzięki możliwości dokonania prostej transformacji

$$X_1^* \equiv X_1 - x_{f1}. \quad (6.52)$$

Jedynie w przypadku $x_{f2} \neq 0$ konieczne staje się wprowadzenie modyfikacji z uwagi na odmienne wyniki analizy wrażliwości. Obszar (krzywa) przełączeń Q uzyskana dla trzeciej struktury suboptymalnej powinna być teraz podzielona na trzy części, ze zbiorem docelowym i przecięciem z osią x_1 jako punktami podziałowymi. Dla każdej z tych części, wartości parametru $\tilde{\sigma}$, oznaczane tu jako $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ (rys. 6.9), wyznacza się w odmienny sposób: $\tilde{\sigma}_1$ zgodnie z regułą minimaksu przy nieskończonych wartościach funkcji strat dla $\tilde{\sigma}_1 > \sigma_1$, parametr $\tilde{\sigma}_2$ – wykorzystując regułę minimaksu ale z nieskończonymi wartościami funkcji strat gdy $\tilde{\sigma}_2 < \sigma_2$, natomiast specyfikację parametru $\tilde{\sigma}_3$ można przeprowadzić stosując regułę bayesowską z rzeczywistymi wartościami funkcji strat. (A zatem, w przypadku funkcji strat danej formułą (6.28), parametry $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ powinny być wyznaczone odpowiednio ze wzorów (6.31), (6.32) i (6.36).) Trajektorie generowane przez tak określone sterowanie pokazane są na rysunku 6.9. Podobnych zmian wymaga uogólnienie zbioru docelowego w przypadku



Rys. 6.7. Trzecia struktura suboptymalna przy uwzględnieniu warunku ograniczenia prędkości.



Rys. 6.8. Czwarta struktura suboptymalna przy uwzględnieniu warunku ograniczenia prędkości.

czwartej struktury suboptymalnej. Parametry $\tilde{\sigma}$ i $\tilde{\delta}$ reprezentowane są w odpowiednich częściach przez $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ oraz $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3$, przy czym wyznaczenie wartości pierwszych trzech powinno nastąpić na podstawie reguły minimaksu przy nieskończonych wartościach funkcji strat odpowiednio dla $\tilde{\sigma}_1 > \sigma_1, \tilde{\sigma}_2 < \sigma_2$ oraz $\tilde{\sigma}_3 > \sigma_3$ (a zatem w przypadku funkcji strat (6.28), wykorzystując kolejno wzory (6.31), (6.32) i (6.31)), natomiast parametry $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3$ spełniające nierówności $-1 < \tilde{\delta}_1 < \delta_1$ i $\tilde{\delta}_2 < \delta_2 < 1$ oraz $-1 < \tilde{\delta}_3 < \delta_3$, ustalane są – podobnie jak stała $\tilde{\delta}$ – heurystycznie, stosownie do występującego opóźnienia. Ilustrację otrzymanej w ten sposób struktury suboptymalnej stanowi rysunek 6.10 (należy zwrócić uwagę na nieznaczną modyfikację definicji zbiorów K_{+-} i K_{++} wprowadzoną dla zgodności ze wzorem (6.41)).

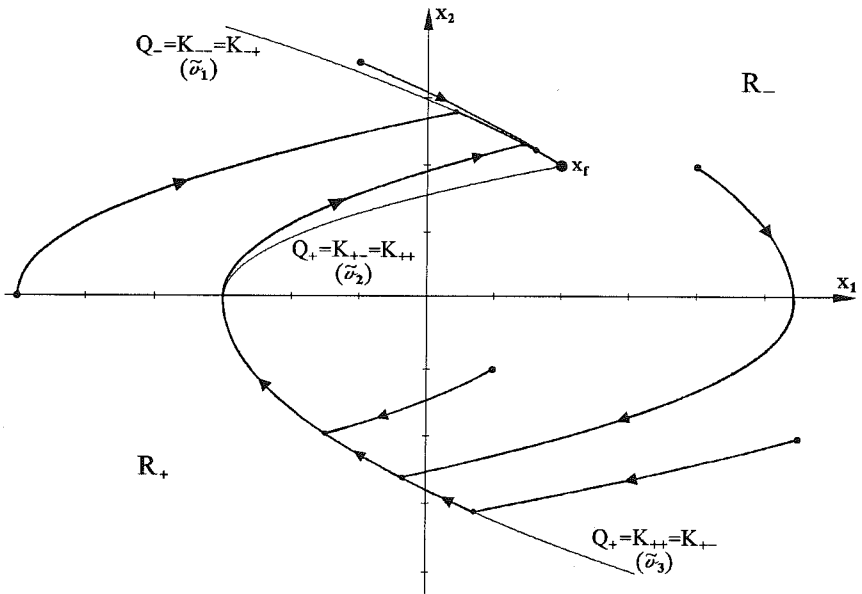
Warto zaznaczyć, iż w wielu z powyższych przypadków nie istnieje prawie pewne C-rozwiązanie, natomiast prawie pewne K-rozwiązanie, a nawet mniej ogólne od niego prawie pewne F-rozwiązanie, są niejednoznaczne. Dowód ich istnienia wymaga zatem użycia zaawansowanego aparatu matematycznego, na przykład teorii selektorów mierzalnych.

Należy także podkreślić małą wrażliwość przedstawionych powyżej suboptymalnych struktur sterujących na występujące zakłócenia i niedokładności identyfikacji. Cecha ta jest charakterystyczna dla losowych układów sterowania.

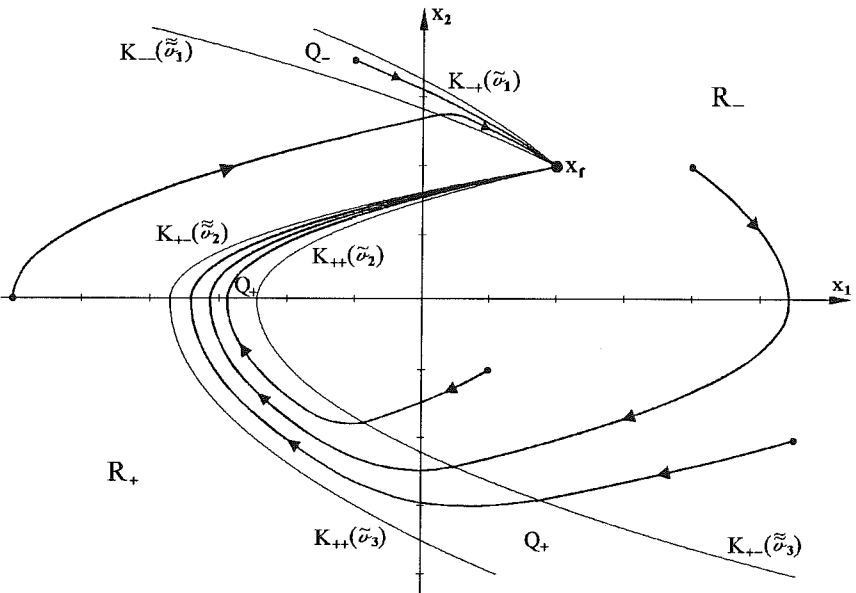
Uwagi bibliograficzne

Tradycyjnym podręcznikiem z zakresu klasycznej teorii sterowania optymalnego jest pozycja [5]; w sekcji 7.2 znaleźć można opis elementarnego zadania czasooptymalnego przemieszczenia masy oraz wspomnianej krzywej przełączeń γ . Studia nad powyższym zagadnieniem ułatwić mogą także prace [19, 81, 104]. W książce [67] zawarte są elementy deterministycznego czasooptymalnego sterowania systemami pozycyjnymi. Trójwymiarowy przypadek, poszerzony o inercję układu napędowego, rozważany był w publikacji [69]. Pierwotna wersja przedstawionej w niniejszym podrozdziale koncepcji probabilistycznej, sformułowana została w monografii [91]. Poszczególne aspekty są także przedmiotem artykułów [70, 87, 92, 94, 95, 96]. W czwartym z nich wyczerpująco opisano koncepcję trzeciej struktury suboptymalnej oraz dowód istnienia rozwiązania losowej inkluzji różniczkowej w przypadku jego niejednoznaczności. Pokrewne ujęcie, oparte na logice rozmytej, znaleźć można w publikacjach [97, 98].

Podstawowe zagadnienia teorii rozwiązań równań różniczkowych z nieciągłą prawą stroną podano w pracach [44, 65, 93], natomiast rozwiązaniom losowych równań różniczkowych poświęcone zostało opracowanie [18]. Współczesny stan badań nad inkluzjami różniczkowymi prezentują monografie [6, 84]. Wyjaśnienia dotyczące rozkładów skończenie wymiarowych znaleźć można w podręcznikach [151, 158], a zwłaszcza [52]. Problemy związane ze stosowaniem modeli tarcia w zadaniach inży-



Rys. 6.9. Trzecia struktura suboptymalna po uogólnieniu zbioru docelowego.



Rys. 6.10. Czwarta struktura suboptymalna po uogólnieniu zbioru docelowego.

nerii syntetycznie omówiono w artykule przeglądowym [4]. Treść książek [49, 79, 83, 140, 147, 150] stanowi kompendium metod stosowanych współcześnie do zagadnień sterowania nieliniowymi systemami dynamicznymi, także w warunkach niepewności.

Dowód prawdziwości wzoru (6.36) z pominięciem założenia ciągłości funkcji gęstości, przedłożono w publikacji [88]. I wreszcie, w ramach sekcji 1.36 monografii [133] skomentowane jest zagadnienie uzupełnienia przestrzeni probabilistycznej w celu zagwarantowania jej zupełności (założenie (5) twierdzenia 6.1).

6.2. WYNIKI SYMULACJI

Działanie zaprojektowanego w niniejszej pracy statystycznego układu wykrywania uszkodzeń zostało sprawdzone za pomocą numerycznego programu symulacyjnego. Nadzorowany obiekt stanowił nieciągły system pozycyjny (6.1)-(6.3), gdzie

$$v(\dot{y}(t), y(t), t) = v^*(|\dot{y}(t)|) \quad , \quad (6.53)$$

przy czym funkcję $v^* : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ aproksymowano wielomianem (rys. 6.11). Sterowanie generowane było zgodnie z koncepcją przedstawioną w podrozdziale 6.1 jako trzecia struktura suboptymalna, z warunkiem ograniczenia prędkości i przy zbiorze docelowym uogólnionym do dowolnego punktu przestrzeni \mathbb{R}^2 .

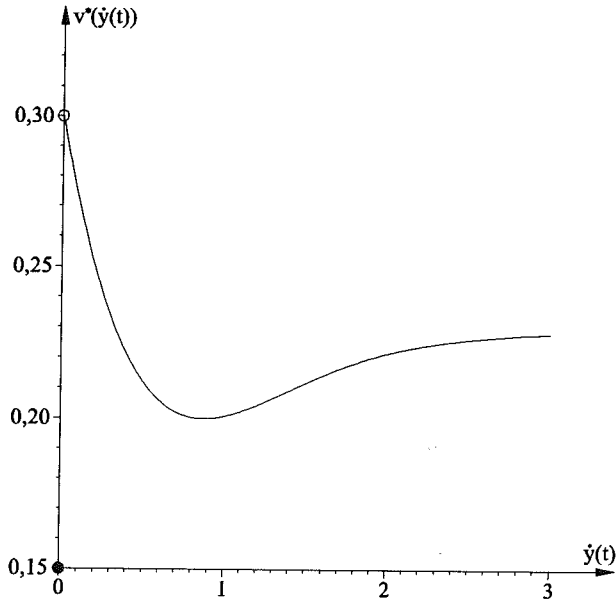
Wektor symptomów został przyjęty w następującej postaci:

$$Z(\cdot) \equiv \begin{bmatrix} |u(\cdot)| \\ |v(\cdot)| \\ |\dot{y}(\cdot)| \end{bmatrix} \quad , \quad (6.54)$$

a zatem jego współrzędne oznaczają kolejno bezwzględne wartości sterowania, oporów ruchu i prędkości. Tak określony wektor wykorzystywany był bezpośrednio przy wnioskowaniu statystycznym obejmującym zakres detekcji.

Diagnoza polegała na rozpoznawaniu dwóch założonych typów uszkodzeń ($d = 2$).

Jako pierwszy z nich ($k = 1$) przyjęto zmniejszanie się maksymalnej wartości bezwzględnej dostępnego sterowania (zgodnie z założeniem (3) twierdzenia 6.1 powinna ona wynosić 1), co w praktyce świadczyłoby o niesprawności mechanizmu napędowego. Stosownie do wzorów (6.39) i (6.51), uszkodzenie to wprowadzane było poprzez zmianę wartości sterowania U_s^* z +1 na $1 - \Delta u$ oraz z -1 na $-1 + \Delta u$, przy czym $\Delta u \in [0, 1]$. Podstawę wnioskowania statystycznego stanowiła tu pierwsza współrzędna wektora symptomów (6.54), a więc – zgodnie z formułą (5.2) – odwzorowanie $g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje postać projekcji na tę współrzędną, czyli



Rys. 6.11. Doświadczalnie uzyskana charakterystyka oporów ruchu systemu pozycyjnego.

$$g_1(Z(\cdot)) \equiv |u(\cdot)|. \quad (6.55)$$

Za drugi typ diagnozowanego uszkodzenia ($k = 2$) zostało uznane powiększenie się oporów ruchu, w praktyce stanowiące o niesprawności mechanizmów przemieszczania. Do funkcji v^* , wprowadzonej wzorem (6.53), dodawano liczbę $\Delta v \in [0,1]$ (przy czym powstała stąd suma była ograniczana do przedziału $[0,1]$). Warto zwrócić uwagę, że zgodnie z rysunkiem 6.11, wartość 0,3 można uznać za nadmiernie dużą dla prędkości 0,8, ale ta sama wielkość okazuje się poprawna dla prędkości bliskich zeru. Identyfikacji podlega tu zatem zależność pomiędzy wartościami prędkości i oporów ruchu. Odwzorowanie $g_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane jest więc jako projekcja na drugą i trzecią współrzędną wektora symptomów:

$$g_2(Z(\cdot)) \equiv \begin{bmatrix} |v(\cdot)| \\ |\dot{y}(\cdot)| \end{bmatrix}. \quad (6.56)$$

Tak więc pierwszy typ diagnozowanego uszkodzenia polegał na rozpoznawaniu zmian wartości pojedynczej składowej wektora symptomów, natomiast drugi – relacji pomiędzy jego składowymi.

Przy pozyskiwaniu danych charakteryzujących poprawne warunki pracy oraz oba typy diagnozowanych uszkodzeń, do każdej współrzędnej wektora symptomów doda-

wana była składowa, reprezentująca zakłócenia losowe, o odchyleniu standardowym równym około 0,01-0,02 wartości oczekiwanej danej współrzędnej. Podobnie, składową taką dodawano do aktualnej wartości wektora symptomów, pozyskanej dla potrzeb testowania hipotez detekcji i diagnozy.

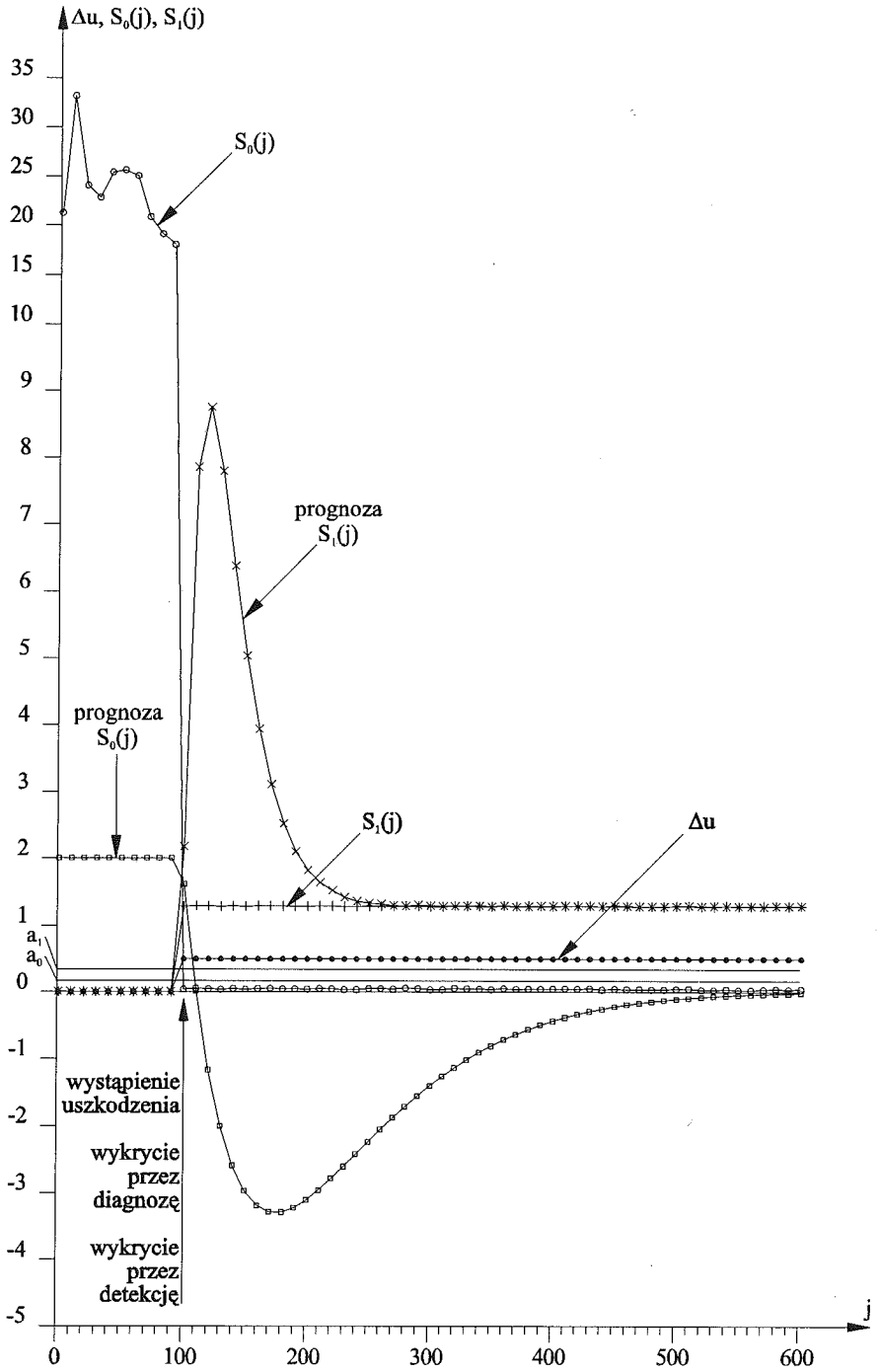
W trakcie projektowania układu wykrywania uszkodzeń wykorzystywane były najczęściej podstawowe postacie proponowanych metod. Przy konstrukcji estymatorów jądrowych funkcji gęstości posłużono się jądrem normalnym, natomiast dla dystrybuanty i kwantyla – eksponencjalnym. We wszystkich trzech przypadkach stosowano uproszczoną transformację w postaci (3.26) oraz procedurę modyfikacji parametru wygładzania. Dzięki temu jego wartość mogła być wyznaczana zgodnie z przybliżonym wzorem (3.16). Predykcja oparta została na metodzie regresji, przy użyciu modelu liniowego, ze stałym parametrem dezaktualizacji oraz z pominięciem czynnika okresowego.

Dla potrzeb ustalenia wartości parametrów detekcji i diagnozy przyjęto $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = 20$, natomiast w przypadku predykcji: $s_0 = s_1 = s_2 = 300$. Pozostałe wielkości wyznaczane były zgodnie z sugestiami przedstawionymi w poprzednich rozdziałach.

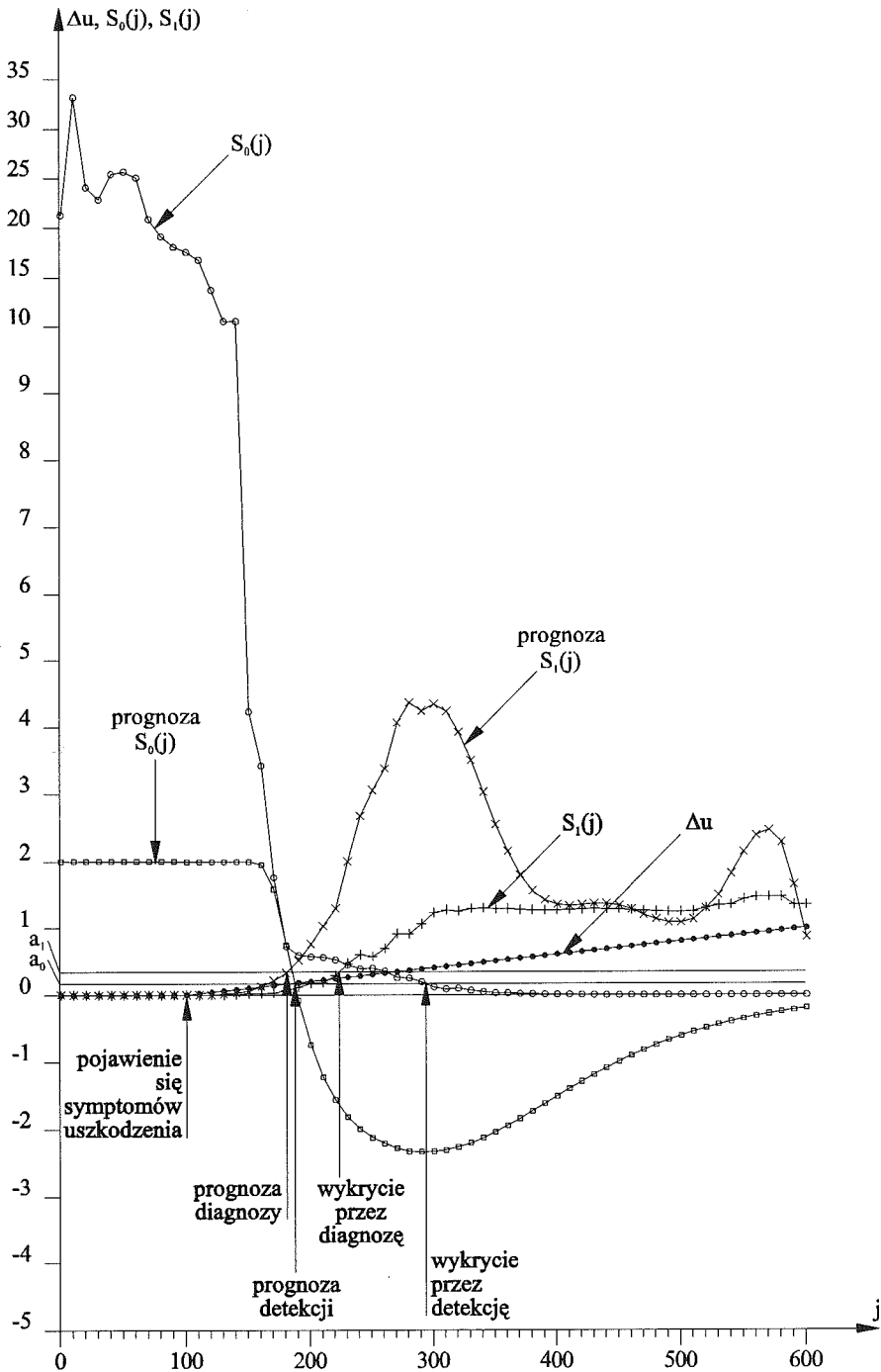
Wyniki symulacji numerycznej uwiarygodniły prezentowaną w niniejszej pracy koncepcję i potwierdziły prawidłowe funkcjonowanie zaprojektowanego tu statystycznego układu wykrywania uszkodzeń. W przypadku gwałtownego charakteru pojawiających się symptomów, co uzyskiwano poprzez nagłe powiększenie wielkości Δu lub Δv , niesprawność urządzenia była niezwłocznie wykrywana i poprawnie rozpoznawana w ramach detekcji i diagnozy. Rysunek 6.12 ilustruje pozyskiwane w miarę upływu czasu wartości statystyk detekcji S_0 i diagnozy S_1 oraz ich prognoz. Jeżeli natomiast uszkodzenie związane było z powolnym narastaniem jego objawów, co otrzymywano sukcesywnie zwiększając wartości Δu albo Δv , to było ono prognozowane z prawidłowym wskazaniem na typ powstającej nieprawidłowości (predykcja), a w stosownym czasie wykrywane i identyfikowane w ramach detekcji i diagnozy (rys. 6.13). Najczęściej testy diagnozy okazywały się skuteczniejsze od uniwersalnego testu detekcji, w prognozowaniu oraz przede wszystkim w wykrywaniu przypisanego im typu uszkodzenia. Potwierdza to zasadność wprowadzenia koncepcji zmodyfikowanej hipotezy H_0^* definiowanej wzorem (3.143).

Doświadczenia pozyskane w trakcie opracowywania programu symulacyjnego, a także otrzymane z jego wykorzystaniem wyniki, pozwalają na sformułowanie szeregu wniosków o charakterze aplikacyjnym.

Przed wszystkim należy podkreślić konieczność odpowiedniego – dla konkretnego urządzenia, lub ogólniej, zagadnienia nadzorowania systemu dynamicznego – wyboru postaci wektora symptomów. Podobne znaczenie można przypisać reprezentatywności pozyskanych danych, które jak najpełniej powinny charakteryzować popra-



Rys. 6.12. Proces wykrywania uszkodzeń przy gwałtownym charakterze zmian.



Rys. 6.13. Proces wykrywania uszkodzeń w przypadku powolnie narastających objawów.

wne warunki pracy oraz poszczególne typy diagnozowanych nieprawidłowości. Zbiory takich danych muszą obejmować wszystkie możliwe warianty, które potencjalnie mogłyby wystąpić podczas procesu wykrywania uszkodzeń. Zwłaszcza w przypadku charakterystyki poprawnych warunków pracy rekomendować należy dokonywanie pomiarów dla najmniej korzystnych uwarunkowań, czy wręcz przy sztucznie powiększonych zakłóceniach oraz innych czynnikach o negatywnym wpływie na powtarzalność otrzymywanych wyników.

Podczas stosowania przedstawionego układu wykrywania uszkodzeń korzystne może okazać się ograniczenie dla potrzeb predykcji wartości statystyk S_0, S_1, \dots, S_d . Wtedy, w przypadku detekcji, jako obserwacje (4.69) traktować należy następujące wielkości:

$$\min(S_0(\omega,1),b_0), \min(S_0(\omega,2),b_0), \dots, \min(S_0(\omega,j),b_0) , \quad (6.61)$$

przy czym $b_0 > 0$. Oznacza to górne ograniczenie statystyki S_0 do liczby b_0 . Celem powyższej koncepcji jest eliminacja błędnych wskazań prognozy, będących jedynie rezultatem przesunięcia się wektora symptomów z obszarów przypisanych wyjątkowo dużym wartościom statystyki S_0 , do regionów o wartościach aczkolwiek mniejszych, ale bynajmniej nie dających podstaw do przypuszczeń o zaistnieniu uszkodzenia. Jako stałą b_0 zaproponować można wielokrotność wartości krytycznej a_0 , w szczególności:

$$b_0 = 10 a_0 . \quad (6.62)$$

Dla diagnozy, podobny rezultat otrzymuje się ograniczając statystyki S_k od dołu, czyli traktując jako obserwacje (4.69) wielkości

$$\max(S_k(\omega,1),b_k), \max(S_k(\omega,2),b_k), \dots, \max(S_k(\omega,j),b_k) , \quad (6.63)$$

gdzie $b_k > 0$ oraz $k = 1,2,\dots,d$, przy czym wstępnie rekomendowane są wartości

$$b_k = \frac{a_k}{10} . \quad (6.64)$$

Korzyści mogą tu jednak nie być tak znaczące jak w przypadku detekcji, gdyż statystyki diagnozy są już z natury ograniczone od dołu przez zero. (Na rysunkach 6.12 i 6.13 widoczny jest wpływ ograniczenia $b_0 = 2$ na prognozy statystyki S_0 .)

Wartości parametrów c_0, c_1, \dots, c_d wyznaczane na podstawie kryteriów (3.88) i (3.120), wraz ze stosownymi modyfikacjami, są maksymalnymi przy jakich zagwarantowana jest globalna zbieżność algorytmów (3.80)-(3.81) oraz (3.115)-(3.116). Ewentualne zwiększenie wzmiankowanych parametrów najczęściej skutkuje polepszeniem szybkości obliczeń, jednakże w ogólnym przypadku, procedury te nie muszą być wtedy zbieżne. Uwzględniając powyższe racje, zaproponować można dopuszczenie stałych c_0, c_1, \dots, c_d kilka lub nawet kilkadziesiąt razy większych od wartości otrzy-

manych dzięki powyższym kryteriom, do czasu gdy spełnione są warunki

$$1 - g_k(\hat{a}_k^l) > 0 \quad (6.65)$$

dla algorytmu (3.80)-(3.81) oraz

$$m r - \sum_{i=1}^m I\left(\frac{\hat{q}^l - y_i}{h}\right) > 0 \quad (6.66)$$

w przypadku procedury (3.115)-(3.116). Jeśli nierówności te przestaną być prawdziwe, to zakończenie obliczeń powinno nastąpić z wykorzystaniem wartości (3.88) i (3.120). Zamysłem powyższej koncepcji jest uzyskanie szybszego działania algorytmu dzięki początkowo nienaturalnie zwiększonym wartościom parametrów c_0, c_1, \dots, c_d , natomiast w przypadku zagrożenia zbieżności, powrót do warunków gwarantujących tę własność.

Podczas stosowania zaprojektowanego układu, wektor symptomów może być wstępnie poddany procesowi filtracji. Wykorzystywane powszechnie do tego celu metody są zasadniczo niezależne od przedstawionej w niniejszej pracy koncepcji, aczkolwiek należy zwrócić uwagę na pojawiającą się wtedy podstawową sprzeczność: w praktyce filtracja wprowadza do układu pewne opóźnienie, podczas gdy główną przesłanką procesu wykrywania uszkodzeń jest szybkość działania. Najprostsza idea filtrowania polega na generowaniu pomocniczego ostrzeżenia po p_1 następujących bezpośrednio po sobie sygnałach o pojawieniu się nieprawidłowości, podczas gdy sam fakt wykrycia uszkodzenia uznawany byłby dopiero po wystąpieniu kolejnych p_2 takich sygnałów ($p_1, p_2 \in \mathbb{N}$). W praktyce, wartości parametrów p_1 i p_2 powinny być ustalone heurystycznie, będąc bezpośrednio uzależnione od akceptowalnej wielkości wprowadzanego opóźnienia i charakterystyki występujących zakłóceń.

I wreszcie, warto podkreślić, iż z racji złożoności współczesnych procesów technologicznych, żadne reguły nie zastąpią całkowicie inwencji inżyniera, dopasowującej ogólny materiał teoretyczny do konkretnych zagadnień aplikacyjnych. Przykładowo, w praktyce pozytywne może okazać się pomniejszenie – względem optymalnych w sensie średniokwadratowym – wartości parametrów wygładzania podczas konstruowania estymatorów $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_d$, co czyni bardziej wyrazistymi charakterystyki poszczególnych typów diagnozowanych uszkodzeń. Proporcjonalnego zwiększenia wymaga wtedy żądana liczność próby losowej.

7. PODSUMOWANIE

W niniejszej publikacji przedstawiona została nowatorska koncepcja układu wczesnego wykrywania uszkodzeń, w zakresie obejmującym:

- (1) detekcję uszkodzeń, a więc stwierdzenie występowania nieprawidłowości w stanie technicznym nadzorowanego systemu;
- (2) diagnozę uszkodzeń, czyli zlokalizowanie i identyfikację owych nieprawidłowości;
- (3) predykcję uszkodzeń, tzn. uprzedzenie o zagrożeniu ich pojawieniem się w nie-dalekiej przyszłości (wraz z przypuszczalną klasyfikacją).

Ideę układu oparto na metodyce statystyki matematycznej, ze szczególnym uwzględnieniem techniki estymatorów jądrowych. Praca ukierunkowana jest na problem wykrywania uszkodzeń w systemach dynamicznych będących obiektami sterowania automatycznego, jednak zasadnicza formuła ma charakter uniwersalny i może być użyta wobec szerokiej klasy zagadnień, także spoza zakresu inżynierii.

Proponowany algorytm przewidziany jest do realizacji w czasie rzeczywistym, podczas wykonywania przez nadzorowane urządzenie właściwych mu czynności technologicznych. Czynnikiem warunkującym możliwość zastosowania przedstawionej tu metody jest określenie tzw. wektora symptomów, czyli skończonej ilości zmiennych (na przykład obejmujących wybrane składowe sterowania, stanu, odpowiedzi, czy też parametry systemu dynamicznego), których aktualne wartości oraz relacje między nimi są uzależnione od stanu technicznej sprawności nadzorowanego urządzenia. Dokładna postać owych relacji nie musi być podana *a priori* – jej identyfikacja stanowi integralną część proponowanej tu procedury. Co więcej, nie jest również wymagana szczegółowa znajomość modelu nadzorowanego systemu dynamicznego. Dopuszcza się także jednoczesne wystąpienie kilku różnych typów diagnozowanych uszkodzeń oraz praktycznie dowolność opisujących je wzorców statystycznych. Wykrywane i rozpoznawane są zmiany stanu technicznego zarówno o gwałtownym, jak i – dzięki predykcji – również powolnym charakterze. I wreszcie, wymagania dotyczące układu komputerowego, realizującego zaprojektowany algorytm nie wykraczają poza możliwości nowoczesnych urządzeń automatyki o stopniu zaawansowania adekwatnym do stosowania procedur wykrywania uszkodzeń. Parametry współczesnych układów numerycznych w praktyce ograniczają wymiar wektora symptomów do 7-9, natomiast

ilość diagnozowanych typów uszkodzeń w większości zastosowań nie powinna przekraczać 4-6.

Poza określeniem postaci wektora symptomów, od projektanta wymaga się zasadniczo jedynie prostych do ustalenia ilorazów reprezentujących stosunek strat wynikłych z niewykrycia danego typu diagnozowanego uszkodzenia i związanego z nim fałszywego alarmu, a także wartości wyprzedzeń poszczególnych prognoz. Jeśli spełnione są powyższe warunki, to przedstawiony w niniejszej pracy materiał teoretyczny dostarcza pełnego algorytmu umożliwiającego zaprojektowanie nowoczesnego układu wykrywania uszkodzeń. W szczególności, podane zostały ściśle reguły określania postaci występujących funkcji i wyznaczania wartości parametrów. Istotne z punktu widzenia praktyki inżynierskiej może okazać się także zamieszczenie interpretacji skutków ewentualnie wprowadzanych odstępstw od proponowanych, uniwersalnych formuł.

Użyty aparat matematyczny w znacznym stopniu oparty jest na rzadko jeszcze stosowanej do zagadnień praktycznych technice estymatorów jądrowych. W niniejszej publikacji została ona wykorzystana do estymacji wielowymiarowej funkcji gęstości, a także dystrybuanty i kwantyla rzeczywistej zmiennej losowej. W pracy szczegółowo rozważono teoretyczne aspekty zastosowań powyższych estymatorów. Wielokrotne użycie jednej, zasadniczo nie zmienianej techniki, umożliwia wszechstronne wykorzystanie przez projektanta nabywanego sukcesywnie doświadczenia.

Działanie przedstawionego w niniejszej pracy układu zostało sprawdzone za pomocą numerycznego programu symulacyjnego. Nadzorowanym obiektem był nieciągły system pozycyjny, poddany działaniu losowego sterowania czasooptymalnego. Szczegółowo rozważono matematyczne aspekty powyższego zagadnienia oraz wynikające stąd, dogodne do zastosowań struktury suboptymalne. Uzyskane wyniki uwiarygodniły prezentowaną koncepcję i potwierdziły prawidłowe funkcjonowanie zaprojektowanego tu statystycznego układu wykrywania uszkodzeń, uzupełniając rozważania teoretyczne wnioskami o charakterze aplikacyjnym.

Przedstawiony materiał udokumentowany jest szeregiem twierdzeń matematycznych, podanych w formie dodatków. Wykazano kolejno: mocną zgodność proponowanych tu jądrowych estymatorów dystrybuanty i kwantyla, formalną poprawność zaprojektowanych procedur diagnozy i detekcji oraz twierdzenie dowodzące istnienia i charakterystykę sterowania czasooptymalnego dla układu pozycyjnego, którego dynamikę opisano za pomocą losowej nieciągłej inkluzji różniczkowej.

Uzupełnienie rozważanego w niniejszej publikacji materiału stanowi liczny wykaz literatury z zakresu automatyki – zwłaszcza wykrywania uszkodzeń i sterowania optymalnego – oraz statystyki matematycznej.

8. DODATKI

W niniejszym rozdziale wykazane zostaną tezy wykorzystane we wcześniejszych partiach niniejszej publikacji. Kolejne sekcje zawierają: dowód mocnej zgodności estymatorów dystrybuanty (dodatek A – podrozdział 8.1) i kwantyla (dodatek B – podrozdział 8.2), a także stwierdzenie poprawności proponowanej procedury diagnozy (dodatek C – podrozdział 8.3) oraz detekcji uszkodzeń (dodatek D – podrozdział 8.4). I wreszcie, w podrozdziale 8.5, stanowiącym dodatek E, wykazano twierdzenie 6.1 o losowym sterowaniu czasooptymalnym.

8.1. DODATEK A: dowód mocnej zgodności jądrowego estymatora dystrybuanty

Poniżej zostanie udowodniona własność mocnej zgodności definiowanego wzorem (3.63) jądrowego estymatora dystrybuanty.

W tym celu rozważany będzie ciąg zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , a także ciąg ich wartości $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Dla dowolnie ustalonego $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, odwzorowanie $\mathcal{Q}_m: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$ zdefiniowane jako

$$\mathcal{Q}_m(B) = \frac{1}{m} \#\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : y_i \in B\}, \quad (8.1)$$

gdzie $\#A$ oznacza licznosc zbioru A oraz $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ reprezentuje rodzinę rzeczywistych zbiorów borelowskich, jest rozkładem miary probabilistycznej i nosi nazwę rozkładu empirycznego ciągu $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Niech także $\mathcal{Q}_2: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$ będzie rozkładem miary probabilistycznej. Ciąg zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ nazywany jest ciągiem empirycznie ergodycznym z granicą \mathcal{Q}_2 , jeżeli z prawdopodobieństwem 1 (względem miary P) spełniony jest warunek

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_m(C) = \mathcal{Q}_2(C) \quad (8.2)$$

dla każdego zbioru C postaci $(-\infty, c]$, gdzie $\mathcal{Q}_2(\{c\}) = 0$.

Jak wynika z twierdzenia Gliwienki-Cantellego, powyższy warunek jest ogólniejszy od formułowanego najczęściej w teorii estymacji założenia o identyczności rozkładów i niezależności zmiennych losowych Y_i , reprezentujących próbę losową. W przypadku przyjęcia takiego założenia, prawo wielkich liczb implikuje, że miara \mathcal{Q} jest po prostu rozkładem zmiennych Y_i , czyli

$$\mathcal{Q}_i(B) = P(\{\omega \in \Omega : Y_i(\omega) \in B\}) \quad (8.3)$$

dla dowolnego $i = 1, 2, \dots$ oraz $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Lemat 8.1

Niech ciąg rzeczywistych zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$, określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , będzie empirycznie ergodyczny z granicą \mathcal{Q} o dystrybuancie F . Jeżeli estymator tej dystrybuanty \hat{F} zdefiniowany jest wzorem (3.63) oraz spełnione są zależności (3.2)-(3.6) i (3.61), to z prawdopodobieństwem 1 (względem miary P) prawdziwe jest

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{F}(y^*) = F(y^*) \quad (8.4)$$

dla każdego $y^* \in \mathbb{R}$ takiego, że

$$\mathcal{Q}(\{y^*\}) = 0 \quad (8.5)$$

Dowód.

Z warunku (8.1) wynika wprost, iż

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_B(Y_i) = \int_{\mathbb{R}} \chi_B(y) d\mathcal{Q}_m(y) \quad \text{dla dowolnego } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (8.6)$$

przy czym χ_B oznacza funkcję charakterystyczną zbioru B . Ponieważ operatory liniowe i ciągłe, równe na przestrzeniach gęstych są identyczne, to dla dowolnej mierzalnej funkcji $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(Y_i) = \int_{\mathbb{R}} g(y) d\mathcal{Q}_m(y) \quad (8.7)$$

W szczególności, na podstawie definicji (3.63), otrzymać stąd można

$$\hat{F}(y^*) = \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_m(y) \quad (8.8)$$

A zatem wzór (8.2) stanowi, dzięki własnościom słabej zbieżności dystrybuant rozkładów probabilistycznych, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{F}(y^*) = \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_L(y) . \quad (8.9)$$

Konsekwencją zależności (3.4) i (3.61) są:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} I(y) = 0 \quad (8.10)$$

oraz

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I(y) = 1 , \quad (8.11)$$

co dzięki warunkowi (3.3) implikuje

$$\lim_{h \rightarrow 0} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y < y^* \\ I(0) & \text{dla } y = y^* \\ 0 & \text{dla } y > y^* \end{cases} . \quad (8.12)$$

Z kolei, stosując własność addytywności całki względem zbioru całkowania, uzyskać można równość

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_L(y) &= \\ &= \int_{(-\infty, y^*)} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_L(y) + I(0) \mathcal{Q}_L(\{y^*\}) + \int_{(y^*, \infty)} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_L(y) , \end{aligned} \quad (8.13)$$

a zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wynika, iż

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_L(y) = \int_{(-\infty, y^*)} d\mathcal{Q}_L(y) + I(0) \mathcal{Q}_L(\{y^*\}) , \quad (8.14)$$

czyli po uwzględnieniu założenia (8.5):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_L(y) = \int_{(-\infty, y^*]} d\mathcal{Q}_L(y) . \quad (8.15)$$

Podstawiając do powyższego wzoru równość (8.9) otrzymuje się ostatecznie tezę dowodzonego lematu. ■

Twierdzenie 8.2

Niech ciąg rzeczywistych zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , będzie empirycznie ergodyczny z granicą \mathcal{Q} o dystrybuancie F . Jeżeli estymator tej dystrybuanty \hat{F} zdefiniowany jest wzorem

(3.63) oraz spełnione są zależności (3.2)-(3.6) i (3.61), a ponadto wartość parametru wygładzania h uzależnia się od liczebności próby losowej m tak aby spełniony był warunek

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0, \quad (8.16)$$

to wtedy dla każdego $y^* \in \mathbb{R}$ takiego, że

$$\mathcal{Q}(\{y^*\}) = 0, \quad (8.17)$$

z prawdopodobieństwem 1 (względem miary P) prawdziwe jest

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{F}(y^*) = F(y^*), \quad (8.18)$$

co oznacza mocną zgodność, czyli także zgodność, jądrowego estymatora dystrybuanty w punktach jej ciągłości.

Dowód.

Wystarczy wykazać, że występująca we wzorze (8.4) zbieżność przy $m \rightarrow \infty$ jest jednostajna względem zmiennej h .

Niech F_m oznacza dystrybuantę rozkładu miary \mathcal{Q}_m . Dla dowolnie ustalonego $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ prawdziwe jest zatem, iż

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) (F_m - F)(y) = 0 \quad (8.19)$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) (F_m - F)(y) = 0. \quad (8.20)$$

Stosując wobec całki Stieltjesa \int procedurę całkowania przez części otrzymuje się dzięki temu

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}_m(y) - \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d\mathcal{Q}(y) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} I\left(\frac{y^* - y}{h}\right) d(F_m - F)(y) = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (F_m - F)(y) dI\left(\frac{y^* - y}{h}\right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Ponieważ niezależnie od wartości zmiennej h , wahanie funkcji I wynosi 1 (jest skończone), natomiast z twierdzenia Gliwienki-Cantellego wynika, iż

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |(F_m - F)(y)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad (8.22)$$

to wzory (8.8)-(8.9) i (8.21) ostatecznie dowodzą prawdziwości tezy twierdzenia. ■

Warto przypomnieć, że jeżeli rozkład miary \mathcal{Q} posiada funkcję gęstości, to założenie (8.17) jest w oczywisty sposób spełnione.

Uwagi bibliograficzne

W pracy [15] znaleźć można wykorzystywane w powyższym podrozdziale elementy teorii miary probabilistycznej, w szczególności twierdzenia 20.6, 22.5 i 25.8. Operatory liniowe i ciągłe prezentuje publikacja [117], natomiast całki Stieltjesa przedstawione są w książkach [15, 137]. Stosownie tematycznie podstawy analizy matematycznej interesująco prezentuje podręcznik [86] oraz klasyczna monografia [133].

8.2. DODATEK B: dowody mocnej zgodności estymatorów kwantyla

Przedmiotem rozważań poniższego podrozdziału jest własność mocnej zgodności estymatorów kwantyla: jądrowego (sekcja 8.2.1) i pozycyjnego (sekcja 8.2.2).

Definicję ciągu empirycznie ergodycznego znaleźć można w początkowej części dodatku A.

8.2.1. Dowód mocnej zgodności jądrowego estymatora kwantyla

Treść niniejszego podrozdziału stanowi dowód mocnej zgodności jądrowego estymatora kwantyla \hat{q}_J , danego wzorem (3.113).

Lemat 8.3

Niech ciąg rzeczywistych zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , będzie empirycznie ergodyczny z granicą \mathcal{Q} . Jeżeli kwantyl r -tego rzędu q określony jest jednoznacznie względem miary \mathcal{Q} , jego estymator jądrowy \hat{q}_J definiuje równanie (3.113) oraz spełnione są zależności (3.2)-(3.6) i (3.61), to z prawdopodobieństwem 1 (względem miary P) prawdziwe jest

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{q}_J = q. \quad (8.23)$$

Dowód.

Aby wykazać zależność (8.23) wystarczy dowieść, że z prawdopodobieństwem 1:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_* > 0 \quad : \quad \forall h < h_* \quad \exists m_* \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad : \quad \forall m > m_* \\ |\hat{q}_J - q| < \varepsilon . \quad (8.24)$$

Niech więc będzie ustalone dowolne $\varepsilon > 0$. Miara \mathcal{Q} jest skończona, a zatem zbiór liczb rzeczywistych dodatniej miary może być co najwyżej przeliczalny – istnieją więc $y^{\sim}, y^{\approx} \in \mathbb{R}$ zerowej miary \mathcal{Q} oraz spełniające nierówności

$$q - \varepsilon < y^{\sim} < q < y^{\approx} < q + \varepsilon . \quad (8.25)$$

Dystrybuenta jest funkcją rosnącą, czyli dzięki założonej jednoznaczności kwantyla wynika stąd istnienie takiego $d \in (0, \infty)$, że

$$F(y^{\sim}) + d < F(q) < F(y^{\approx}) - d , \quad (8.26)$$

gdzie F jest dystrybuentą miary \mathcal{Q} . Teza wykazanego w dodatku A lematu 8.1 implikuje, iż z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_* > 0 \quad : \quad \forall h < h_* \quad \exists m_* \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad : \quad \forall m > m_* \\ \hat{F}(y^{\sim}) < F(y^{\sim}) + d \\ \hat{F}(y^{\approx}) > F(y^{\approx}) - d , \quad (8.27)$$

a zatem łącząc ostatnie dwie zależności otrzymuje się, że z prawdopodobieństwem 1:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_* > 0 \quad : \quad \forall h < h_* \quad \exists m_* \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad : \quad \forall m > m_* \\ \hat{F}(y^{\sim}) < F(q) < \hat{F}(y^{\approx}) . \quad (8.28)$$

Z uwagi na monotoniczność odwzorowania \hat{F} oraz warunek (8.25), wzór (8.28) stanowi o prawdziwości formuły (8.24), co kończy dowód powyższego lematu. ■

Twierdzenie 8.4

Niech ciąg rzeczywistych zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , będzie empirycznie ergodyczny z granicą \mathcal{Q} . Jeżeli kwantyl r -tego rzędu q określony jest jednoznacznie względem miary \mathcal{Q} , jego jądrowy estymator \hat{q}_J definiuje równanie (3.113) oraz spełnione są zależności (3.2)–(3.6) i (3.61), a ponadto wartość parametru wygładzania h uzależnia się od liczności próby losowej m tak aby spełniony był warunek

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0 , \quad (8.29)$$

to wtedy z prawdopodobieństwem 1 (względem miary P):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{q}_J = q, \quad (8.30)$$

co oznacza mocną zgodność, czyli także zgodność, jądrowego estymatora kwantyla.

Dowód.

Jak wynika z dowodu twierdzenia 8.2 przedstawionego w dodatku A, wartość m_* , wprowadzona formułą (8.27), nie zależy od zmiennej h . Stanowi to, iż występująca we wzorze (8.23) zbieżność przy $m \rightarrow \infty$ jest jednostajna, co dzięki lematowi 8.3 implikuje wprost prawdziwość niniejszego twierdzenia. ■

8.2.2. Dowód mocnej zgodności pozycyjnego estymatora kwantyla

Poniższa sekcja zawiera dowód mocnej zgodności pozycyjnego estymatora kwantyla \hat{q}_p , definiowanego zależnością (3.129).

Lemat 8.5

Niech:

- (1) ciąg rzeczywistych zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , będzie empirycznie ergodyczny z granicą \mathcal{Q} ;
- (2) kwantyl r -tego rzędu q określony jest jednoznacznie względem miary \mathcal{Q} ;
- (3) $Y_{k,m}$ reprezentuje statystykę pozycyjną rzędu k , przyporządkowaną zmiennym losowym Y_i ;
- (4) $\{j_m\}_{m=1}^{\infty}$ oznacza ciąg liczb naturalnych taki, że

$$0 < j_m \leq m \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots \quad (8.31)$$

oraz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{j_m}{m} = r. \quad (8.32)$$

Wtedy z prawdopodobieństwem 1 (względem miary P):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_{j_m, m} = q. \quad (8.33)$$

Dowód.

Zaprzeczeniem dowodzonej tezy (8.33) jest istnienie z dodatnim prawdopodobieństwem P ciągu $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ liczb naturalnych takiego, że

$$\exists q^* > q \quad : \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad Y_{j_{m_k}, m_k} \geq q^* \quad (8.34)$$

lub

$$\exists q_* < q \quad : \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad Y_{j_{m_k}, m_k} \leq q_* \quad . \quad (8.35)$$

Poniżej zostanie rozpatrzony warunek (8.34). W przypadku formuły (8.35) rozważania są analogiczne.

Z definicji statystyki pozycyjnej wynika zatem, iż z dodatnim prawdopodobieństwem

$$\#\{i \in \{1, 2, \dots, m_k\} : Y_i \leq q^*\} \leq j_{m_k} \quad , \quad (8.36)$$

czyli także

$$\frac{1}{m_k} \#\{i \in \{1, 2, \dots, m_k\} : Y_i \in (-\infty, q^*]\} \leq \frac{j_{m_k}}{m_k} \quad . \quad (8.37)$$

Po dokonaniu przejścia granicznego przy $k \rightarrow \infty$ otrzymuje się z uwagi na założenia (1) i (4), że

$$\mathcal{Q}((-\infty, q^*]) \leq r \quad . \quad (8.38)$$

Tymczasem z jednoznaczności kwantyla wynika wprost, iż

$$\mathcal{Q}((-\infty, q^*]) > \mathcal{Q}((-\infty, q]) = r \quad . \quad (8.39)$$

Wzory (8.38) i (8.39) stanowią sprzeczność, dowodzącą w konsekwencji prawdziwości tezy lematu. ■

Twierdzenie 8.6

Niech ciąg rzeczywistych zmiennych losowych $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$, określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , będzie empirycznie ergodyczny z granicą \mathcal{Q} . Jeżeli kwantyl r -tego rzędu q określony jest jednoznacznie względem miary \mathcal{Q} , jego estymator pozycyjny \hat{q}_P definiuje równanie (3.129), to wtedy z prawdopodobieństwem 1 (względem miary P):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{q}_P = q \quad , \quad (8.40)$$

co oznacza mocną zgodność, czyli także zgodność, pozycyjnego estymatora kwantyla.

Dowód.

Ponieważ suma współczynników występujących we wzorze (3.129) przy statystykach pozycyjnych wynosi 1, wystarczy wykazać, iż z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_{i,m} = q \quad (8.41)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_{i+1,m} = q \quad , \quad (8.42)$$

gdzie

$$i = [m r + 0,5] \quad , \quad (8.43)$$

natomiast $[a]$ reprezentuje część całkowitą liczby $a \in \mathbb{R}$. Powyższe wynika już bezpośrednio z tezy lematu 8.5, gdyż oczywiste są zależności

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[m r + 0,5]}{m} = r \quad (8.44)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[m r + 0,5] + 1}{m} = r \quad . \quad (8.45)$$

Niniejszym dowód twierdzenia 8.6 został zakończony. ■

Na koniec warto przypomnieć, że jeżeli rozkład miary posiada funkcję gęstości o spójnym nośniku, to kwantyl jest określony jednoznacznie.

8.3. DODATEK C: dowód formalnej poprawności procedury diagnozy uszkodzeń

Rozważania niniejszego podrozdziału stanowią o formalnej poprawności procedury diagnozy, prezentowanej w podrozdziale 3.3.

Twierdzenie 8.7

Niech:

- (1) $c > 0$;
- (2) X, Y_0, Y_1 reprezentują n -wymiarowe zmienne losowe, określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej, których rozkłady posiadają funkcje gęstości;
- (3) f_X oznacza funkcję gęstości rozkładu zmiennej losowej X , natomiast \hat{f}_X – jej mocno zgodny estymator jądrowy, wyznaczony na podstawie m_X -elementowej próby losowej, z zastosowaniem jądra takiego, iż przeciwobraz dowolnej rzeczywistej liczby jest zbiorem miary zero;
- (4) odwzorowania f_X oraz \hat{f}_X są borelowskie;
- (5) $a \in \mathbb{R}$ stanowi jednoznaczne rozwiązanie równania

$$F_{f_X \circ Y_0}(a) + c F_{f_X \circ Y_1}(a) = 1 \quad , \quad (8.46)$$

przy czym $F_{f_X \circ Y_0}$ i $F_{f_X \circ Y_1}$ oznaczają odpowiednio dystrybuanty zmiennych losowych $f_X \circ Y_0$ oraz $f_X \circ Y_1$;

(6) $\hat{a} \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(\hat{a}) + c \hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_1}(\hat{a}) = 1, \quad (8.47)$$

gdzie $\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}$ i $\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_1}$ reprezentują – odpowiednio – mocno zgodne jądrowe estymatory dystrybuant zmiennych $\hat{f}_X \circ Y_0$ oraz $\hat{f}_X \circ Y_1$, wyznaczone na podstawie prób losowych o licznosciach m_0 i m_1 , przy czym w obu przypadkach wartość parametru wygładzania h uzależnia się od licznosci próby m tak aby prawdziwe były zależności

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0 \quad (8.48)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mh = \infty; \quad (8.49)$$

(7) odwzorowania $\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}$ oraz $\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_1}$ są ściśle rosnące.

Wtedy z prawdopodobieństwem 1:

$$\lim_{\substack{m_X \rightarrow \infty \\ m_0 \rightarrow \infty \\ m_1 \rightarrow \infty}} \hat{a} = a, \quad (8.50)$$

a więc \hat{a} jest mocno zgodnym, czyli także zgodnym, estymatorem wielkości a .

Dowód.

Z mocnej zgodności estymatora \hat{f}_X wynika, iż z prawdopodobieństwem 1:

$$\hat{f}_X \circ Y_0 \xrightarrow{m_X \rightarrow \infty} f_X \circ Y_0. \quad (8.51)$$

Implikuje to słabą zbieżność, a w konsekwencji zbieżność dystrybuant

$$F_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) - F_{f_X \circ Y_0}(t) \xrightarrow{m_X \rightarrow \infty} 0 \quad (8.52)$$

w punktach ciągłości odwzorowania $F_{f_X \circ Y_0}$.

Z kolei prawdziwa jest zależność:

$$\begin{aligned} \left| \hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) - F_{f_X \circ Y_0}(t) \right| &= \left| \int_{-\infty}^t \hat{f}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(s) ds - \int_{-\infty}^t f_{f_X \circ Y_0}(s) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^t \left| \hat{f}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(s) - f_{f_X \circ Y_0}(s) \right| ds \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(s) - f_{f_X \circ Y_0}(s) \right| ds, \end{aligned} \quad (8.53)$$

gdzie $f_{\hat{f}_X \circ Y_0}$ i $\hat{f}_{\hat{f}_X \circ Y_0}$ oznaczają odpowiednio funkcję gęstości zmiennej losowej $\hat{f}_X \circ Y_0$

oraz jej estymator jądrowy. (Istnienie powyższej funkcji wynika z treści założeń (2)-(3) na podstawie twierdzenia Radona-Nikodyma.) Jeżeli spełnione są warunki (8.48)-(8.49), to prawa strona nierówności (8.53) jest z prawdopodobieństwem 1 zbieżna do zera dzięki mocnej zgodności estymatorów jądrowych funkcji gęstości w normie L_1 . Stanowi to więc o zbieżności także lewej strony, czyli

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) - F_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) \xrightarrow[m_0 \rightarrow \infty]{} 0 \quad (8.54)$$

z prawdopodobieństwem 1.

A teraz:

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) - F_{f_X \circ Y_0}(t) = \hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) - F_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) + F_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) - F_{f_X \circ Y_0}(t), \quad (8.55)$$

skąd dzięki wzorom (8.52) i (8.54) wynika, iż z prawdopodobieństwem 1:

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t) - F_{f_X \circ Y_0}(t) \xrightarrow[m_0 \rightarrow \infty]{m_X \rightarrow \infty} 0 \quad (8.56)$$

w punktach ciągłości odwzorowania $F_{f_X \circ Y_0}$.

Analogicznie, z prawdopodobieństwem 1 prawdziwa jest zależność

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_1}(t) - F_{f_X \circ Y_1}(t) \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{m_X \rightarrow \infty} 0 \quad (8.57)$$

w punktach ciągłości odwzorowania $F_{f_X \circ Y_1}$.

Aby udowodnić tezę (8.50) należy wykazać, że przy dowolnie ustalonym $\varepsilon > 0$ i dla dostatecznie dużych m_X , m_0 oraz m_1 :

$$\hat{a} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (8.58)$$

z prawdopodobieństwem 1.

I tak, dystrybuanta miary probabilistycznej może mieć co najwyżej przeliczalną ilość nieciągłości. Istnieją zatem liczby $t^{\sim}, t^{\approx} \in \mathbb{R}$, w których odwzorowania $F_{\hat{f}_X \circ Y_0}$ i $F_{f_X \circ Y_1}$ są ciągłe oraz spełniony jest warunek

$$a - \varepsilon < t^{\sim} < a < t^{\approx} < a + \varepsilon. \quad (8.59)$$

Dystrybuanta jest także funkcją rosnącą, a więc z uwagi na założoną jednoznaczność rozwiązania a prawdziwe są nierówności

$$F_{f_X \circ Y_0}(t^{\sim}) + c F_{f_X \circ Y_1}(t^{\sim}) < 1 \quad (8.60)$$

$$F_{f_X \circ Y_0}(t^{\approx}) + c F_{f_X \circ Y_1}(t^{\approx}) > 1, \quad (8.61)$$

czyli dzięki wzorom (8.56) i (8.57), dla dostatecznie dużych m_X , m_0 oraz m_1 , z

prawdopodobieństwem 1 zachodzi także

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t^{\sim}) + c \hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_1}(t^{\sim}) < 1 \quad (8.62)$$

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_0}(t^{\approx}) + c \hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y_1}(t^{\approx}) > 1, \quad (8.63)$$

co – uwzględniając postać równania (8.47) oraz ciągłość jądrowego estymatora dystrybuanty – stanowi wprost o prawdziwości warunku (8.58) i w konsekwencji dowodzonej tezy. ■

Z powyższego twierdzenia wynika poprzez oczywiste podstawienia, iż – zgodnie z tezą sformułowaną w podrozdziale 2.3 – jeżeli a_k ($k = 1, 2, \dots, d$) jest rozwiązaniem równania (3.73), to \hat{a}_k stanowiące rozwiązanie zależności (3.74) jest jego mocno zgodnym, a więc także zgodnym, estymatorem.

Uwagi bibliograficzne

Własności estymatora jądrowego funkcji gęstości względem normy L_1 są przedmiotem rozważań pracy [34]; (w powyższym dowodzie została wykorzystana teza twierdzenia 1 z rozdziału 3). Twierdzenie Radona-Nikodyma znaleźć można w książce [117]. Użyte elementy teorii miary probabilistycznej zamieszczono w monografii [15].

8.4. DODATEK D: dowód formalnej poprawności procedury detekcji uszkodzeń

Treść poniższego podrozdziału stanowi o formalnej poprawności procedury detekcji, przedstawionej w ramach podrozdziału 3.4.

Twierdzenie 8.8

Niech:

- (1) $c \in (0, 1)$;
- (2) X, Y reprezentują n -wymiarowe zmienne losowe, określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej, których rozkłady posiadają funkcje gęstości;
- (3) f_X oznacza funkcję gęstości rozkładu zmiennej losowej X , natomiast \hat{f}_X – jej mocno zgodny estymator jądrowy, wyznaczony na podstawie m_X -elementowej próby losowej, z zastosowaniem jądra takiego, iż przeciwobraz dowolnej rzeczywistej liczby jest zbiorem miary zero;
- (4) odwzorowania f_X oraz \hat{f}_X są borelowskie;
- (5) $a \in \mathbb{R}$ stanowi jednoznaczne rozwiązanie równania

$$F_{f_X \circ Y}(a) = c, \quad (8.64)$$

przy czym $F_{f_X \circ Y}$ oznacza dystrybuantę zmiennej losowej $f_X \circ Y$;

(6) $\hat{a} \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y}(\hat{a}) = c, \quad (8.65)$$

gdzie $\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y}$ reprezentuje mocno zgodny jądrowy estymator dystrybuanty zmiennej $\hat{f}_X \circ Y$, wyznaczony na podstawie m -elementowej próby losowej, przy czym wartość parametru wygładzania h uzależnia się od liczności próby losowej m tak aby prawdziwe były zależności

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h = 0 \quad (8.66)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mh = \infty; \quad (8.67)$$

(7) odwzorowanie $\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y}$ jest ściśle rosnące.

Wtedy z prawdopodobieństwem 1:

$$\lim_{\substack{m_X \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \hat{a} = a, \quad (8.68)$$

a więc \hat{a} jest mocno zgodnym, czyli także zgodnym, estymatorem wielkości a .

Dowód.

Analogicznie jak zależność (8.56) wykazać można, iż z prawdopodobieństwem 1:

$$\hat{F}_{\hat{f}_X \circ Y}(t) - F_{f_X \circ Y}(t) \xrightarrow[\substack{m_X \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}]{} 0 \quad (8.69)$$

w punktach ciągłości odwzorowania $F_{f_X \circ Y}$. Podobnie do wzoru (8.58) dowodzi się również, że przy dowolnie ustalonym $\varepsilon > 0$ i dla dostatecznie dużych m_X oraz m , z prawdopodobieństwem 1 zachodzi także

$$\hat{a} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \quad (8.70)$$

co stanowi ostatecznie o prawdziwości tezy niniejszego twierdzenia. ■

Tak więc dzięki stosownym podstawieniom wnioskować stąd można, że jeśli a_0 reprezentuje rozwiązanie równania (3.139), to \hat{a}_0 będące rozwiązaniem zależności (3.140) jest jego mocno zgodnym, czyli także zgodnym, estymatorem. Na fakt ten powoływano się w podrozdziale 3.4.

8.5. DODATEK E: dowód twierdzenia o losowym sterowaniu czasooptymalnym

Poniższy dodatek zawiera dowód twierdzenia 6.1 o losowym sterowaniu czasooptymalnym, sformułowanego w podrozdziale 6.1. Najpierw zostaną wykazane dwie tezy pomocnicze.

Lemat 8.9

Niech:

- (1) I będzie przedziałem o niepustym wnętrzu oraz $t_0^* \in I$;
- (2) $A = [a_1, a_2]$ lub $A = [-a_2, -a_1]$, gdzie $0 < a_1 < a_2$;
- (3) odwzorowanie G spełnia jeden z poniższych warunków:
 - (a) $G : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłe,
 - (b) $G : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathcal{P}(A)$ przyjmuje postać

$$G(y(t), t) = c - v(t) F(y(t)) \quad \text{dla } y(t) \in \mathbb{R} \text{ oraz } t \in I, \quad (8.71)$$

przy czym $c \in \mathbb{R}$, $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, natomiast w przypadku odwzorowania $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ przedziałami ciągła taka, iż

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{dla } z \neq z_i \\ F_i & \text{dla } z = z_i \end{cases}, \quad (8.72)$$

gdzie z_i jest dowolną liczbą rzeczywistą, F_i – dowolnym podzbiorem przedziału $[-1, 1]$ oraz $i = 1, 2, \dots, k$.

Wtedy inkluzja różniczkowa

$$\dot{y}(t) \in G(y(t), t) \quad (8.73)$$

z warunkiem początkowym

$$y(t_0^*) = y_0 \quad (8.74)$$

ma C-, F- i K-rozwiązanie określone na przedziale I .

Ponadto, jeżeli

- (4) poza punktami nieciągłości i wielowartościowości, funkcja F spełnia lokalnie warunek Lipschitza,

to rozwiązania te są jednoznaczne i równe sobie.

Dowód.

W przypadku założenia (3-a), istnieje wysycone rozwiązanie klasyczne. Implikuje to

wprost istnienie C-rozwiązania, będącego także K-rozwiazaniem, a wobec istnienia rozwiązania klasycznego, również F-rozwiazaniem. Natomiast dla wariantu (3-b), analogiczne rozumowanie przeprowadzić można w obszarach równoczesnej jednowartościowości i ciągłości funkcji F , po czym rozwiązania te mogą ulec „sklejeniu”. Warto zauważyć, że ze względu na wynikające z postaci zbioru A nierówności $\dot{y}(t) \geq a_1 > 0$ lub $\dot{y}(t) \leq -a_1 < 0$ dla $t \in I$, wystarczy rozważyć jedynie skończoną ilość takich „sklejeń”.

Jeżeli z kolei przyjąć dodatkowo założenie (4), to w obszarach równoczesnej jednowartościowości i ciągłości odwzorowania F , rozwiązanie klasyczne jest jednoznaczne, co stanowi o jednoznaczności K-rozwiazania, a zatem również C- i F-rozwiazania. Wynika stąd także równość C-, F- i K-rozwiazania. Ostatecznie, fakt ten kończy dowód lematu 8.9. ■

Lemat 8.10

Niech:

- (1) $t_0^* \in \mathbb{R}$ oraz $y_0 \in \mathbb{R}$;
- (2) $I = [t_0^*, \infty)$ lub $I = [t_0^*, t_*)$, przy czym $t_0^* < t_*$;
- (3) $A = [a_1, a_2]$ lub $A = [-a_2, -a_1]$, gdzie $0 < a_1 < a_2$;
- (4) dane będzie odwzorowanie $G : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathcal{P}(A)$ takie, że

$$G(y(t), t) = c - v(t) F(y(t)) \quad , \quad (8.75)$$

przy czym $c \in \mathbb{R}$, $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, natomiast w przypadku odwzorowania $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ przedziałami ciągła taka, iż

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{dla } z \neq z_i \\ F_i & \text{dla } z = z_i \end{cases} \quad , \quad (8.76)$$

gdzie z_i jest dowolną liczbą rzeczywistą, F_i – dowolnym podzbiorem przedziału $[-1, 1]$ oraz $i = 1, 2, \dots, k$;

- (5) $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza C-, F- lub K-rozwiazanie inkluzji różniczkowej

$$\dot{y}(t) \in G(y(t), t) \quad (8.77)$$

z warunkiem początkowym

$$y(t_0^*) = y_0 \quad ; \quad (8.78)$$

- (6) $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ustaloną funkcją absolutnie ciągłą.

Jeżeli spełnione są warunki

$$z(t_0^*) \leq y(t_0^*) \quad (8.79)$$

$$\dot{z}(t) \leq \inf G(z(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } I, \quad (8.80)$$

to

$$z(t) \leq y(t) \quad \text{dla } t \in I. \quad (8.81)$$

Natomiast gdy

$$z(t_0^*) \geq y(t_0^*) \quad (8.82)$$

$$\dot{z}(t) \geq \sup G(z(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } I, \quad (8.83)$$

to

$$z(t) \geq y(t) \quad \text{dla } t \in I. \quad (8.84)$$

Dowód.

Istnienie wzmiankowanego w założeniu (5) rozwiązania y i zapewnione jest tezą lematu 8.9.

Poniżej zostanie wykazana nierówność (8.81). Dowód zależności (8.84) jest analogiczny.

Ze względu na postać zbioru A , zbiór punktów $t \in I$ wielowartościowości lub nieciągłości funkcji F , jest skończony. Wystarczy więc wykazać tezę przy założeniu równoczesnej jednowartościowości oraz ciągłości tej funkcji, gdyż po „sklejeniu” stosownych rozwiązań dowiedziona nierówność pozostanie prawdziwa.

Niech zatem dana będzie następująca inkluzja różniczkowa:

$$\dot{p}(t) \in \begin{cases} G(p(t), t) & \text{gdy } p(t) \geq z(t) \\ G(z(t), t) & \text{gdy } p(t) \leq z(t) \end{cases} \quad (8.85)$$

z warunkiem początkowym

$$p(t_0^*) = y_0. \quad (8.86)$$

Istnienie funkcji p będącej C-, F- i K-rozwiazaniem inkluzji (8.85) wynika z tezy lematu 8.9 (stosując założenie (3-a)).

Najpierw zostanie wykazane, iż

$$p(t) \geq z(t) \quad \text{dla } t \in I. \quad (8.87)$$

Niech więc dla zaprzeczenia tej nierówności istnieje $t^{\approx} \in I$ takie, że

$$p(t^{\approx}) < z(t^{\approx}). \quad (8.88)$$

Z ciągłości funkcji z oraz p wynika, na podstawie zależności (8.79) i (8.86), istnienie

$t^{\sim} \in [t_0^*, t^{\sim}]$ takiego, iż

$$p(t^{\sim}) = z(t^{\sim}) \quad (8.89)$$

oraz

$$p(t) < z(t) \quad \text{dla } t \in (t^{\sim}, t^{\sim}] \quad (8.90)$$

Z kolei wzory (8.77) i (8.85) wraz z warunkiem (8.90) implikują

$$\dot{p}(t) - \dot{z}(t) \geq G(z(t), t) - G(z(t), t) = 0 \quad \text{prawie wszędzie w } [t^{\sim}, t^{\sim}] \quad (8.91)$$

a więc dzięki równości (8.89):

$$p(t) \geq z(t) \quad \text{dla } t \in [t^{\sim}, t^{\sim}] \quad (8.92)$$

co jest sprzeczne z hipotezą (8.88). Nierówność (8.87) została zatem wykazana.

Z zależności (8.85)-(8.87) oraz zapewnionej tezą lematu 8.9 (stosując założenie (3-b)) jednoznaczności C-, F- i K-rozwiązań inkluzji (8.77) wynika, iż $p \equiv y$, co dzięki warunkowi (8.87) ostatecznie dowodzi nierówności (8.81) i w konsekwencji tezy lematu 8.10. ■

Dowód twierdzenia 6.1.

Poniżej przyjęta będzie notacja, w której dolne indeksy „1” i „2” reprezentują współrzędną punktu w przestrzeni \mathbb{R}^2 , na przykład $x = [x_1, x_2]^T$, lub składową funkcji o wartościach w \mathbb{R}^2 , przykładowo $x_+(t) = [x_{+1}(t), x_{+2}(t)]^T$.

Niech najpierw czynnik losowy ω będzie ustalony. Odpowiadające mu funkcje oznaczone zostaną według reguły: $V(\omega, \cdot) \equiv v$, $U(\omega, \cdot) \equiv u$, $X_1(\omega, \cdot) \equiv x_1$, $X_2(\omega, \cdot) \equiv x_2$. Tak więc rozważane teraz będzie deterministyczne zagadnienie sterowania czasooptymalnego systemem dynamicznym:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (8.93)$$

$$\dot{x}_2(t) \in u(t) - v(t) F(x_2(t)) \quad (8.94)$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = x_0 \quad (8.95)$$

Jeżeli sterowanie u jest na pewnym przedziale stale równe +1 lub -1, to zgodnie z tezą lematu 8.9 istnieją jednoznaczne i równe sobie C-, F- oraz K-rozwiązanie powyższej inkluzji różniczkowej, które nazywane będą krótko rozwiązaniami.

Niech x_{++} oraz x_{+-} oznaczają rozwiązania układu (8.93)-(8.94) z warunkiem po-

czątkowym $x(0) = [0, 0]^T$, określone na przedziale $(-\infty, 0]$ i generowane przez sterowanie $u \equiv +1$, gdy odpowiednio $v \equiv v_+$ lub $v \equiv v_-$.

Ze wzoru (8.94) wynika wprost następująca zależność:

$$\dot{x}_{++2}(t) \geq 1 - v_+ > 0 \quad \text{gdy } t \in (-\infty, 0] \quad (8.96)$$

Niech:

$$K_{++} = \{ [x_1, x_2]^T \in x_{++}(t) \quad \text{dla } t \in (-\infty, 0) \} \quad (8.97)$$

$$K_{+-} = \{ [x_1, x_2]^T \in x_{+-}(t) \quad \text{dla } t \in (-\infty, 0) \} \quad (8.98)$$

Są to zbiory wszystkich stanów, które mogą być przeprowadzone do początku układu współrzędnych sterowaniem $u \equiv +1$, gdy odpowiednio $v \equiv v_+$ lub $v \equiv v_-$.

Rozważana teraz będzie funkcja $k_{++} : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$x_1 = k_{++}(x_2) \quad \text{gdy } [x_1, x_2]^T \in (K_{++} \cup \{[0, 0]^T\}) \quad (8.99)$$

Nierówność (8.96) zapewnia istnienie funkcji x_{++2}^{-1} , a zatem odwzorowanie k_{++} jest dobrze określone, gdyż jest złożeniem $x_{++1} \circ x_{++2}^{-1}$. Co więcej, x_{++2} jako funkcja ciągła oraz dzięki zależności (8.96) otwarta (tzn. przekształcająca zbiory otwarte w zbiory otwarte) i odwracalna, jest homeomorfizmem, a więc będąc złożeniem funkcji ciągłych, odwzorowanie k_{++} jest ciągłe. Z uwagi na wzór (8.96) jest ono również przedziałami \mathcal{C}^1 , gdyż w obszarach równoczesnej jednowartościowości i ciągłości funkcji F , odwzorowanie x_{++1} jest klasy \mathcal{C}^1 , a x_{++2} jako funkcja regularna (tzn. klasy \mathcal{C}^1 z jakobianem różnym od zera w każdym punkcie dziedziny) i odwracalna, jest dyfeomorfizmem.

Analogicznie jak powyżej zdefiniować można funkcję $k_{+-} : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$. Jest ona również dobrze określona, ciągła i przedziałami \mathcal{C}^1 .

Z równań (8.93)-(8.94) otrzymuje się dzięki nierówności (8.96), że

$$\frac{d k_{++}(x_2)}{d x_2} = \frac{x_2}{1 - v_+ F(x_2)} \quad \text{prawie wszędzie w } (-\infty, 0] \quad (8.100)$$

i podobnie

$$\frac{d k_{+-}(x_2)}{d x_2} = \frac{x_2}{1 - v_- F(x_2)} \quad \text{prawie wszędzie w } (-\infty, 0] \quad (8.101)$$

Zależności (8.100)-(8.101) i założenie $z \cdot F(z) \geq 0$ stanowią, iż

$$\frac{d k_{+-}(x_2)}{d x_2} \leq \frac{d k_{++}(x_2)}{d x_2} < 0 \quad \text{prawie wszędzie w } (-\infty, 0] \quad (8.102)$$

co w połączeniu z równością $k_{+-}(0) = 0 = k_{++}(0)$ implikuje:

$$0 \leq k_{++}(x_2) \leq k_{+-}(x_2) \quad \text{gdy } x_2 \in (-\infty, 0] . \quad (8.103)$$

Analogicznie, niech x_{--} oraz x_{-+} oznaczają rozwiązania układu (8.93)-(8.94) z warunkiem początkowym $x(0) = [0, 0]^T$, określone na przedziale $(-\infty, 0]$ i generowane przez sterowanie $u \equiv -1$, gdy odpowiednio $v \equiv v_-$ lub $v \equiv v_+$. Podobnie zdefiniować można również zbiory K_{--} oraz K_{-+} , a także funkcje k_{--} oraz $k_{-+} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Prawdziwa jest wtedy zależność

$$k_{--}(x_2) \leq k_{-+}(x_2) \leq 0 \quad \text{gdy } x_2 \in [0, \infty) , \quad (8.104)$$

stanowiąca odpowiednik nierówności (8.103).

I wreszcie, niech dane będą następujące zbiory:

$$Q_+ = \{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \quad \text{takie iż istnieją } [x'_1, x_2]^T \in K_{++} \text{ i} \\ [x_1'', x_2]^T \in K_{+-} \quad \text{przy czym } x'_1 \leq x_1 \leq x_1'' \} \quad (8.105)$$

$$Q_- = \{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \quad \text{takie iż istnieją } [x'_1, x_2]^T \in K_{--} \text{ i} \\ [x_1'', x_2]^T \in K_{-+} \quad \text{przy czym } x'_1 \leq x_1 \leq x_1'' \} \quad (8.106)$$

$$R_+ = \{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \setminus Q \quad \text{takie iż istnieje } [x'_1, x_2]^T \in Q \\ \text{przy czym } x_1 < x'_1 \} \quad (8.107)$$

$$R_- = \{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \setminus Q \quad \text{takie iż istnieje } [x'_1, x_2]^T \in Q \\ \text{przy czym } x'_1 < x_1 \} , \quad (8.108)$$

gdzie $Q = Q_+ \cup \{[0, 0]^T\} \cup Q_-$. Niniejszym przestrzeń \mathbb{R}^2 została podzielona na rozłączne, niepuste zbiory: $\{[0, 0]^T\}$, Q_+ , Q_- , R_+ , R_- (rys. 6.1).

(W dalszej części dowodu, v jest daną funkcją – ustaloną realizacją procesu stochastycznego V .)

Niech teraz $x_0 \in R_-$ (rys. 6.1). Rozważane najpierw będzie, oznaczane przez x , rozwiązanie układu (8.93)-(8.94) z warunkiem początkowym (8.95), określone na przedziale $[t_0, \infty)$ i generowane przez sterowanie $u \equiv -1$. Podobnie jak nierówność (8.103), wykazać można, iż rozwiązanie to przecina zbiór K_{+-} w skończonym czasie t^{\sim} , a także zbiór K_{++} w skończonym czasie t^{\approx} , przy czym $t^{\sim} \leq t^{\approx}$.

Niech $t' \in [t^{\sim}, t^{\approx}]$ oznacza czas zmiany sterowania z dotychczasowej wartości -1 na $+1$. Oczywiście nierówność $x_2(t') < 0$ oraz prawdziwa na mocy wzoru (8.94) zależność

$$\dot{x}_2(t) \geq 1 - v_+ > 0 \quad \text{gdy } u \equiv +1 \quad (8.109)$$

stanowią, iż rozważane po wprowadzeniu zmiany wartości sterowania rozwiązanie x

przecina oś x_1 w skończonym czasie t'' .

Zostanie teraz wykazane, że funkcja $q: [t^{\sim}, t^{\approx}] \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $q(t') = x_1(t'')$, tzn. przyporządkowująca czasowi zmiany sterowania pierwszą współrzędną punktu przecięcia przez rozwiązanie x osi x_1 , jest ciągła. W tym celu rozważane będzie pomocnicze odwzorowanie $q_*: [t^{\sim}, t^{\approx}] \times T \rightarrow \mathbb{R}$ określone następująco:

$$q_*(t', t) = \begin{cases} x_2^{t'}(t) & \text{dla } t \in [t_0, t''] \\ 0 & \text{dla } t \in [t'', \infty) \end{cases}, \quad (8.110)$$

gdzie $x_2^{t'}$ oznacza rozwiązanie inkluzji (8.94) gdy

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } t \in [t_0, t') \\ +1 & \text{dla } t \in [t', \infty) \end{cases}. \quad (8.111)$$

Ponieważ wzór (8.93) implikuje zależność

$$q(t') = x_{01} + \int_{t_0}^{\infty} q_*(t', t) dt, \quad (8.112)$$

to funkcja q jest ciągła na podstawie twierdzenia o ciągłości całki z parametrem.

Rozważając graniczne warunki tej funkcji, wykazać można podobnie do nierówności (8.103), że $q(t^{\sim}) \leq 0 \leq q(t^{\approx})$. Ponieważ odwzorowanie ciągłe określone na zbiorze spójnym przyjmuje wszystkie pośrednie wartości, to istnieje $t_s \in [t^{\sim}, t^{\approx}]$ takie, że $q(t_s) = 0$, czyli $x(t'') = [0, 0]^T$ i wtedy $t_f = t''$ jest skończonym czasem osiągnięcia zbioru docelowego przez rozwiązanie x .

Reasumując: jeżeli $x_0 \in R_-$, to istnieje t_s takie, iż rozwiązanie x generowane przez sterowanie

$$u_o(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } t \in [t_0, t_s) \\ +1 & \text{dla } t \in [t_s, \infty) \end{cases}, \quad (8.113)$$

osiąga zbiór docelowy w skończonym czasie t_f , przy czym $t_0 < t_s < t_f$ oraz $x(t_s) \in Q_+$ (rys. 6.1).

Analogicznie dowieść można, że jeżeli $x_0 \in R_+$, to istnieje t_s takie, iż rozwiązanie x generowane przez sterowanie

$$u_o(t) = \begin{cases} +1 & \text{dla } t \in [t_0, t_s) \\ -1 & \text{dla } t \in [t_s, \infty) \end{cases}, \quad (8.114)$$

osiąga zbiór docelowy w skończonym czasie t_f , przy czym $t_0 < t_s < t_f$ oraz $x(t_s) \in Q_-$.

Niech teraz $x_0 \in Q_+$. Rozwiązanie x generowane przez sterowanie $u \equiv +1$ osiąga

oś x_1 w skończonym czasie t'' . Jeśli $x_1(t'') = 0$, czyli $x(t'') = [0, 0]^T$, to poszukiwanym sterowaniem jest

$$u_o(t) = +1 \quad \text{dla } t \in [t_0, \infty) \quad (8.115)$$

i wtedy $t_f = t''$ stanowi skończony czas osiągnięcia zbioru docelowego przez to rozwiązanie. Gdy natomiast $0 < x_1(t'')$, to można przeprowadzić analogiczne rozumowanie jak dla przypadku $x_0 \in R_-$, dowodząc istnienia sterowania postaci (8.113), przy czym rolę punktu $x(t^-)$ przejmuje x_0 . Jeżeli wreszcie $x_1(t'') < 0$, to $x(t'') \in R_+$, a więc przedłużając sterowanie o wartości $+1$ kontynuować można dla $t \geq t''$ postępowanie właściwe dla przypadku $x_0 \in R_+$, otrzymując odpowiednie sterowanie postaci (8.114).

Przypadek $x_0 \in Q_-$ jest analogiczny. Odpowiednik sterowania (8.115) stanowi wtedy

$$u_o(t) = -1 \quad \text{dla } t \in [t_0, \infty) \quad (8.116)$$

Niniejszym, dowolnemu stanowi początkowemu $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]^T\}$ zostało jednoznacznie przyporządkowane sterowanie u_o postaci (8.113), (8.114), (8.115) lub (8.116). Wykazane teraz będzie, że w każdym przypadku jest ono czasooptymalne.

Najpierw rozważany będzie stan początkowy x_0 , któremu przyporządkowano sterowanie postaci (8.115). Niech więc dla potrzeb dowodu przez zaprzeczenie istnieje dopuszczalne sterowanie u^* przeprowadzające rozwiązaniem x^* stan początkowy do zbioru docelowego w czasie t_f^* takim, że $t_f^* < t_f$.

Zależność (8.94) implikuje, iż w przypadku powyższego sterowania, pochodna \dot{x}_2 jest dodatnia, a zatem absolutnie ciągła funkcja x_2 jest ściśle rosnąca. W szczególności:

$$x_2(t_f^*) < x_2(t_f) = 0 \quad (8.117)$$

Z postaci zbioru sterowań dopuszczalnych U_a wynika tymczasem, że

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^*(t) &= F^*(x_2^*(t)) v(t) + u^*(t) \leq F^*(x_2^*(t)) v(t) + u_o(t) \\ &\text{dla } t \in [t_0, \infty) \text{ oraz dowolnej liczby } F^*(x_2^*(t)) \in F(x_2^*(t)) \quad (8.118) \end{aligned}$$

Stąd oraz z zależności $x_2^*(t_0) = x_{02} = x_2(t_0)$, na mocy nierówności różniczkowej (8.81), prawdziwe jest, iż

$$x_2^*(t) \leq x_2(t) \quad \text{dla } t \in [t_0, \infty) \quad (8.119)$$

czyli w szczególności:

$$0 = x_2^*(t_f^*) \leq x_2(t_f^*) \quad (8.120)$$

Wzory (8.117) i (8.120) stanowią sprzeczność, dowodzącą czasoptymalności sterowania (8.115) dla rozważanego stanu początkowego.

Analizę stanu, któremu przyporządkowano sterowanie postaci (8.116) przeprowadzić można analogicznie.

Rozpatrzony teraz zostanie stan początkowy, któremu przyporządkowano sterowanie postaci (8.113). Jak poprzednio, czasoptymalność tego sterowania wykazana będzie przez zaprzeczenie, zakładając – zgodnie z wprowadzonymi powyżej oznaczeniami – istnienie odpowiednich u^* , x^* , t_f^* .

Najpierw udowodnione zostaną wzory

$$x_2(t) \leq x_2^*(t) \quad \text{dla } t \in [t_0, \min(t_s, t_f^*)] \quad (8.121)$$

$$x_2(t) < x_2^*(t) \quad \text{dla } t \in (t_s, t_f^*] \quad (8.122)$$

Zależność (8.121) jest prawdziwa na podstawie nierówności różniczkowej (8.81) z lematu 8.10, którego założenia spełnione są dzięki warunkowi $x_2^*(t_0) = x_{02} = x_2(t_0)$ i postaci zbioru sterowań dopuszczalnych U_a . Niech dla potrzeb dowodu zależności (8.122) przeprowadzanego przez zaprzeczenie, istnieje $t_* \in (t_s, t_f^*]$ takie, że

$$x_2(t_*) \geq x_2^*(t_*) \quad (8.123)$$

Wzory (8.94) i (8.113) implikują, iż dla $t \in [t_*, t_f^*]$ funkcja x_2 jest ściśle rosnąca, a zatem

$$x_2(t_f^*) < x_2(t_f) = 0 \quad (8.124)$$

Tymczasem z nierówności (8.81) – stosowanej dzięki warunkowi (8.123) oraz postaci zbioru U_a – wynika, że

$$x_2(t) \geq x_2^*(t) \quad \text{dla } t \in [t_*, \infty) \quad (8.125)$$

czyli w szczególności:

$$x_2(t_f^*) \geq x_2^*(t_f^*) = 0 \quad (8.126)$$

Zależności (8.124) i (8.126) są sprzeczne, co ostatecznie stanowi o prawdziwości wzorów (8.121)-(8.122).

Wynika z nich wprost, iż

$$x_2(t_f^*) \leq x_2^*(t_f^*) = 0 \quad (8.127)$$

Ponieważ $x_2(t_f) = 0$, a funkcja x_2 jest najpierw ściśle rosnąca, a potem ściśle malejąca, to otrzymuje się stąd nierówność

$$x_2(t) < 0 \quad \text{dla } t \in (t_f^*, t_f) , \quad (8.128)$$

a więc dzięki zależności (8.93) także

$$x_1(t_f^*) > x_1(t_f) = 0 . \quad (8.129)$$

Tymczasem wzory (8.93) oraz (8.121)-(8.122) implikują, iż

$$x_1(t) \leq x_1^*(t) \quad \text{dla } t \in [t_0, t_f^*] , \quad (8.130)$$

czyli w szczególności:

$$x_1(t_f^*) \leq x_1^*(t_f^*) = 0 , \quad (8.131)$$

co jest sprzeczne z nierównością (8.129). Czasooptymalność sterowania postaci (8.113) została więc udowodniona.

I wreszcie, w przypadku stanu początkowego, któremu przyporządkowano sterowanie (8.114), dowód czasooptymalności tego sterowania jest analogiczny.

Zostało zatem ostatecznie wykazane, że sterowanie u_o postaci (8.113), (8.114), (8.115) lub (8.116), przypisane poprzednio dowolnemu stanowi początkowemu $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]^T\}$ przy ustalonym czynniku losowym, jest czasooptymalne.

Niech Ω^\sim oznacza zbiór tych $\omega \in \Omega$, dla których spełnione są warunki sformułowane w założeniu (6) dowodzonego twierdzenia. Niech ponadto $\Omega^\approx = \Omega \setminus \Omega^\sim$; oczywiście $P(\Omega^\approx) = 0$. Zostanie teraz udowodnione, że funkcja $U_o : \Omega \times T \rightarrow \{-1, +1\}$ zdefiniowana wzorem

$$U_o(\omega, \cdot) \equiv \begin{cases} u_o : T \rightarrow \{-1, +1\} & \text{przyporządkowana stanowi } x_0 \\ \text{dla } v \equiv V(\omega, \cdot) & \text{gdy } \omega \in \Omega^\sim \\ u : T \rightarrow \{+1\} & \text{gdy } \omega \in \Omega^\approx \end{cases} \quad (8.132)$$

jest procesem stochastycznym. Ze względu na założoną zupełność przestrzeni probabilistycznej, zerowej miary zbiór Ω^\approx nie wpływa na mierzalność i w tej części dowodu będzie pominięty.

Najpierw rozpatrzony zostanie przypadek $x_0 \in R_-$. Niech $J = [t_0, t'']$, przy czym $t'' = \sup_{\omega \in \Omega} (t') < \infty$ gdzie t' oznacza czas przecięcia zbioru K_{++} przez rozwiązanie x układu (8.93)-(8.94) z warunkiem początkowym (8.95), generowane przez sterowanie $u_o \equiv -1$, gdy $v \equiv V(\omega, \cdot)$. Rozważana będzie funkcja $p : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}^2$ taka, że

$$p(\omega, t) = x(t) . \quad (8.133)$$

Przy ustalonym $t \in J$, funkcja $p(\cdot, t)$ jest złożeniem następujących odwzorowań:

$$p_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \quad p_1(\omega) = V(\omega, \cdot)|_J \quad (8.134)$$

$$p_2 : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^2) \quad p_2 = (V(\omega, \cdot)|_J) = x|_J \quad (8.135)$$

$$p_3 : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad p_3(x|_J) = x|_J(t) \quad (8.136)$$

Tymczasem dla dowolnego zbioru otwartego $D \subset \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ prawdziwe jest

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{i=1}^{\infty} B(v_i, d_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{B}(v_i, e_{i,j}) = \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : \max_{t \in J} |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : \max_{t \in J \cap \mathbb{Q}} |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{t \in J \cap \mathbb{Q}} \{v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\} \quad , \end{aligned} \quad (8.137)$$

gdzie B oznacza kulę otwartą, \bar{B} – kulę domkniętą, a także dla każdego $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, v_i jest restrykcją do zbioru J wielomianu o współczynnikach wymiernych, $d_i \in \mathbb{R}$ oraz $\{e_{i,j}\}$ stanowi indeksowany przez $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ rosnący ciąg liczb rzeczywistych zbieżny do d_i . Wzór (8.137) implikuje, że

$$p_1^{-1}(D) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{t \in J \cap \mathbb{Q}} p_1^{-1}(\{v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\}) \quad . \quad (8.138)$$

Ponieważ V jest procesem stochastycznym, to dla ustalonych i, j oraz t , zbiór $p_1^{-1}(\{v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\})$ jest mierzalny, co z uwagi na powyższą równość stanowi o mierzalności zbioru $p_1^{-1}(D)$. Odwzorowanie p_1 jest zatem mierzalne.

Ciągłość odwzorowania p_2 wynika z ciągłej zależności rozwiązania od prawej strony inkluzji różniczkowej.

I wreszcie, ciągłość odwzorowania p_3 jest oczywista.

Wykazane powyżej własności odwzorowań p_1 , p_2 oraz p_3 implikują mierzalność funkcji $p(\cdot, t)$ dla dowolnie ustalonego $t \in J$. Z kolei ciągłość funkcji $p(\omega, \cdot)$ dla każdego $\omega \in \Omega$ wynika wprost z definicji rozwiązania. Stanowi to o mierzalności funkcji p względem σ -algebry produktowej w $\Omega \times J$.

Niech teraz $M = \{(\omega, t) \in \Omega \times J : x(t) \in Q_+\}$ czyli $M = p^{-1}(Q_+)$. Ponieważ prawdziwa jest równość

$$Q_+ = \text{int}(Q_+) \cup (K_{++} \cup \{[0,0]^T\}) \cup (K_{+-} \cup \{[0,0]^T\}) \setminus \{[0,0]^T\} \quad , \quad (8.139)$$

a zbiór $\text{int}(Q_+)$ jest otwarty oraz zbiory $(K_{++} \cup \{[0,0]^T\})$, $(K_{+-} \cup \{[0,0]^T\})$, $\{[0,0]^T\}$

są domknięte, to zbiór M jest mierzalny.

Niech teraz (ω, t) będzie ustalonym elementem zbioru M . Wtedy, niech $y = [y_1, y_2]^T$ oznacza rozwiązanie układu (8.93)-(8.94) z warunkiem początkowym $y(0) = x(t)$, generowane przez $u \equiv +1$, gdy $v(z) = V(\omega, t + z)$ dla $z \geq 0$.

Rozważone będzie odwzorowanie $r^* : M \rightarrow \mathcal{C}([0, t^*], \mathbb{R}^2)$ takie, że

$$r^*[\omega, t](z) = y(t+z) \quad \text{dla } z \in [0, t^*] , \quad (8.140)$$

przy czym $t^* = \sup_{\omega \in \Omega} (t_*) < \infty$, gdzie t_* oznacza czas przecięcia osi x_1 przez rozwiązanie y . Zostało dowiedzione, iż dziedzina odwzorowania r^* jest mierzalna. Pozostały warunek mierzalności tego odwzorowania można wykazać analogicznie jak powyżej, składając odwzorowania r_1 oraz r_2 będące odpowiednikami p_1 oraz p_2 . Niech ponadto dana będzie funkcja $r_3 : r^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$r_3(y) = y_1(t_*) , \quad (8.141)$$

przy czym zbiór $r^*(M)$ rozważany jest z topologią indukowaną z przestrzeni $\mathcal{C}([0, t^*], \mathbb{R}^2)$. Oczywiście funkcja ta jest ciągła, a zatem odwzorowanie $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiowane niniejszym jako złożenie $r_3 \circ r^*$, jest mierzalne.

Niech $M_+ \subset M$ oraz $M_- \subset M$ reprezentują zbiory tych elementów (ω, t) , dla których rozwiązania y będące ich obrazami poprzez odwzorowanie r^* przecinają odpowiednio dodatnią i ujemną część osi x_1 . Z równości

$$M \setminus (M_+ \cup M_-) = r^{-1}(\{0\}) \quad (8.142)$$

oraz mierzalności odwzorowania r wynika, że zbiór $M \setminus (M_+ \cup M_-)$ jest mierzalny w $\Omega \times J$.

I wreszcie, rozważane będzie odwzorowanie $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem

$$s(\omega) = t_s , \quad (8.143)$$

gdzie t_s jest czasem zmiany wartości funkcji u_o postaci (8.113) przyporządkowanej wcześniej rozważanemu stanowi początkowemu, gdy $v \equiv V(\omega, \cdot)$. Wykres odwzorowania s stanowi mierzalny zbiór $M \setminus (M_+ \cup M_-)$, co dzięki twierdzeniu Sainte-Beuve'a implikuje mierzalność tego odwzorowania.

Niech ustalone będzie $t \in T$. Funkcja $U_o(\cdot, t)$ przyjmuje jedynie wartości $+1$ i -1 , a zatem w celu wykazania jej mierzalności wystarczy udowodnić mierzalność zbioru $U_o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\})$. Z postaci sterowania określonego zależnością (8.113) wynika, że

$$U_o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\}) = s^{-1}((t, \infty)) , \quad (8.144)$$

czyli mierzalność odwzorowania s stanowi wprost o mierzalności powyższego zbioru. Ostatecznie, w przypadku $x_0 \in R_-$, mierzalność funkcji $U_o(\cdot, t)$ dla dowolnego $t \in T$ została wykazana.

W przypadku $x_0 \in R_+$ dowód jest analogiczny.

Niech teraz $x_0 \in Q_+$. Mierzalność funkcji $U_o(\cdot, t)$ dla ustalonego $t \in T$ wykazać można w podobny sposób, aczkolwiek należy rozważyć osobno podzbiory tych $\omega \in \Omega$, dla których rozwiązania układu (8.93)-(8.94) z (8.95), $u \equiv +1$ oraz $v \equiv V(\omega, \cdot)$, przecinają dodatnią i ujemną część osi x_1 (co odpowiada tu różnym postaciom sterowania: odpowiednio (8.113) i (8.114)).

Przypadek $x_0 \in Q_-$ jest analogiczny do powyższego.

Tak więc została ostatecznie wykazana mierzalność funkcji $U_o(\cdot, t)$ dla dowolnego $t \in T$, a zatem odwzorowanie U_o jest procesem stochastycznym. Niniejszym istnienie prawie pewnego sterowania czasooptymalnego zostało udowodnione.

Rozważana teraz będzie funkcja $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowana następująco:

$$X(\omega, \cdot) \equiv \begin{cases} x: T \rightarrow \mathbb{R}^2 - \text{rozwiązanie układu (8.77)-(8.79)} \\ \text{dla } u_o \equiv U_o(\omega, \cdot), v \equiv V(\omega, \cdot) & \text{gdy } \omega \in \Omega \\ x: T \rightarrow \{[0,0]^T\} & \text{gdy } \omega \in \Omega^{\sim} \end{cases} \quad (8.145)$$

Dowód, iż funkcja ta jest procesem stochastycznym, przeprowadzony może być podobnie do zaprezentowanego powyżej wobec odwzorowania U_o . Różnica polega na tym, że w przeciwieństwie do $V(\omega, \cdot)$, realizacje $U_o(\omega, \cdot)$ są jedynie przedziałami ciągłe. Możliwa jest jednak ich aproksymacja funkcjami ciągłymi i skorzystanie z ciągłej zależności rozwiązań od prawej strony inkluzji różniczkowej.

Funkcja X stanowi prawie pewne C-, F- i K-rozwiązanie losowej inkluzji różniczkowej (6.15)-(6.16) z warunkiem początkowym (6.17), generowane sterowaniem U_o określonym wzorem (8.132). Jest ono jednoznaczne, dzięki jednoznaczności rozwiązań deterministycznych otrzymanych przy ustalonym czynniku losowym $\omega \in \Omega$.

Niniejszym teza twierdzenia 6.1 została ostatecznie udowodniona. ■

Uwagi bibliograficzne

Klasyczne rozwiązania równań różniczkowych są tematem monografii [126]. Przy dowodzeniu lematu 8.9 wykorzystano również tezy lematu 2.8 oraz wniosku 8.6 z artykułu [65] (rozwiązania klasyczne nazywane są tam rozwiązaniami w sensie Newtona lub N-rozwiązaniami).

W dowodzie i zastosowaniu tezy lematu 8.10 skorzystano z koncepcji opartej na publikacji [68]. Twierdzenie Sainte-Beuve'a znaleźć można w pracy [134]; dla rozważanego tu problemu przydatna może być zwłaszcza wersja sformułowana jako wniosek

1, stosowana wobec odwzorowania jednowartościowego.

W celu uściślenia podstawowych pojęć matematycznych, wykorzystywanych w powyższych dowodach, rekomendować można podręczniki [15, 117], a także [42, 86] (w szczególności teoria homeo- i dyfeomorfizmów), [101] (twierdzenie o funkcji ciągłej określonej na zbiorze spójnym), [112] (zwłaszcza twierdzenie o ciągłości całki z parametrem) oraz [106] (przede wszystkim własności funkcji absolutnie ciągłych).

9. BIBLIOGRAFIA

- [1] Abraham, B., J. Ledolter: *Statistical Methods for Forecasting*. Wiley, New York, 1983.
- [2] Analytical and Knowledge-Based Redundancy in Fault Detection and Diagnosis (red. J. Korbicz, C. Cempel). *Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 3, nr 3, ss. 399-641, 1993.
- [3] Anderson, T.W.: *The Statistical Analysis of Time Series*. Wiley, New York, 1958.
- [4] Armstrong, B.: *Challenges to Systematically Engineered Friction Compensation*. IFAC Workshop on Motion Control, Munich, ss. 21-30, 1995.
- [5] Athans, M., P.L. Falb: *Sterowanie optymalne*. WNT, Warszawa, 1969.
- [6] Aubin, J.P., A. Celina: *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [7] Bartoszewicz, J.: *Wykłady ze statystyki matematycznej*. PWN, Warszawa, 1989.
- [8] Basseville, M.: *Detecting Changes in Signals and Systems – A Survey*. *Automatica*, vol. 24, nr 3, ss. 309-326, 1988.
- [9] Basseville, M., A. Benveniste: *Sequential Detection of Abrupt Changes in Spectral Characteristics of Digital Signals*. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 29, nr 5, ss. 709-724, 1983.
- [10] Basseville, M., A. Benveniste, G.V. Moustakides, A. Rougee: *Optimal Sensor Location for Detecting Changes in Dynamical Behavior*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, nr 12, ss. 1067-1075, 1987.
- [11] Basseville, M., I.V. Nikiforov: *Detection of Abrupt Changes – Theory and Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [12] Bean, S.J., C.P. Tsokos: *Development in Nonparametric Density Estimation*. *International Statistical Review*, vol. 48, ss. 267-287, 1980.
- [13] Bendat, J.S., A.G. Piersol: *Metody analizy i pomiaru sygnałów*. PWN, Warszawa, 1976.
- [14] Białynicki-Birula, A.: *Algebra liniowa z geometrią*. PWN, Warszawa, 1976.
- [15] Billingsley, P.: *Prawdopodobieństwo i miara*. PWN, Warszawa, 1987.
- [16] Bloomfield, P.: *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*. Wiley, New York, 1976.

- [17] Bobrowski, D.: Probabilistyka w zastosowaniach technicznych. WNT, Warszawa, 1980.
- [18] Bobrowski, D.: Wstęp do losowych równań różniczkowych zwyczajnych. PWN, Warszawa, 1987.
- [19] Bołtiański, W.G.: Matematyczne metody sterowania optymalnego. WNT, Warszawa, 1971.
- [20] Box, G.E.P., G.M.Jenkins: Analiza szeregów czasowych. PWN, Warszawa, 1983.
- [21] Brockwell, P.J., R.A.Davis: Time Series: Theory and Methods. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [22] Brown, R.G.: Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [23] Brumback, B.D., M.D.Srinath: A Chi-Square Test for Fault-Detection in Kalman Filters. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 32, nr 6, ss. 552-554, 1987.
- [24] Burman, J.P.: Seasonal Adjustment – A Survey. TIMS Studies in the Management Sciences, vol. 12, ss. 45-57, 1979.
- [25] Cambry, O.: A New Method for Studying Some Statistical Failure-Detection Algorithm. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, nr 1, ss. 114-116, 1993.
- [26] Cempel, C.: Podstawy wibroakustycznej diagnostyki maszyn. WNT, Warszawa, 1982.
- [27] Chatterjee, S., B.Price: Regression Analysis By Example. Wiley, New York, 1977.
- [28] Chen, C.-H.: Statistical Pattern Recognition. Hayden Book, Rochelle Park, 1973.
- [29] Chien, T.T., M.B.Adams: A Sequential Failure Detection Technique and Its Application. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 21, nr 10, ss. 750-757, 1976.
- [30] Chow, E.Y., A.S.Willsky: Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 29, nr 7, ss. 603-614, 1984.
- [31] Clamen, R.T.: Combining forecasts: A review and annotated bibliography. International Journal of Forecasting, vol. 5, nr 4, ss. 559-583, 1989.
- [32] Collacott, R.A.: Mechanical Fault Diagnosis and Condition Monitoring. Chapman and Hall, London, 1977.
- [33] Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems (red. M.Basseville, A.Benveniste). Springer-Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 77, Berlin, 1986.

- [34] Devroë, L., L.Gyorfi: Nonparametric Density Estimation: the L_1 View. Wiley, New York, 1985.
- [35] Devroë, L., L.Gyorfi, G.Lugosi: A Probabilistic Theory of Pattern Recognition. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [36] Dielman, T., C.Lowry, R.Pfaffenberger: A Comparison of Quantile Estimators. Communications in Statistics – Simulation, vol. 23, nr 2, ss. 355-371, 1994.
- [37] Domański, C.: Testy statystyczne. PWE, Warszawa, 1990.
- [38] Doob, J.L.: Stochastic Processes. Wiley, New York, 1953.
- [39] Draper, N.R., H.Smith: Analiza regresji stosowana. PWN, Warszawa, 1973.
- [40] Emami-Naeini, A., M.M.Akhter, S.M.Rock: Effect of Model Uncertainty on Failure Detection: The Threshold Selector. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33, nr 12, ss. 1106-1115, 1988.
- [41] Encyclopedia of Statistical Sciences. Wiley, New York, 1982.
- [42] Engelking, R.: Topologia ogólna. PWN, Warszawa, 1976.
- [43] Fault Diagnosis in Dynamic Systems – Theory and Applications (red. R.Patton, P.Frank, R.Clark). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [44] Filippov, A.F.: Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [45] Findaisen, W., J.Szymanowski, A.Wierzbicki: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa, 1980.
- [46] Fisz, M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa, 1959.
- [47] Frank, P.M.: Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Analytical and Knowledge-based Redundancy – A Survey and Some New Results. Automatica, vol. 26, nr 3, ss. 459-474, 1990.
- [48] Frank, P.M.: Fault Diagnosis on the Basis of Dynamic Process Models. IMACS 12th World Congress on Scientific Computation, Paris, vol. 2, ss. 414-419, 1988.
- [49] Friedland, B.: Advanced Control System Design. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [50] Fryer, M.J.: A Review of Some Non-parametric Methods of Density Estimation. Journal – Institute of Mathematics and its Applications, vol. 20, ss. 335-354, 1977.
- [51] Fukunaga, K.: Introduction to Statistical Pattern Recognition. Academic Press, New York, 1972.
- [52] Gajek, L., M.Kałuska: Wnioskowanie statystyczne. WNT, Warszawa, 1994.
- [53] Gardner, E.S.: Automatic Monitoring of Forecast Errors. Journal of Forecasting, vol. 2, ss. 1-21, 1983.

- [54] Gardner, E.S.: Exponential Smoothing: The State of the Art. *Journal of Forecasting*, vol. 4, ss. 1-38, 1985.
- [55] Gardner, E.S., E. McKenzie: Forecasting Trends in Time Series. *Management Science*, vol. 31, nr 10, ss. 1237-1246, 1985.
- [56] Gardner, W.: *Introduction to Random Processes*. McGraw-Hill, New York, 1989.
- [57] Gertler, J.: Analytical Redundancy Methods in Fault Detection and Diagnosis (plenary survey paper). IFAC SAFEPROCESS'91 Symposium, Baden-Baden, ss. 9-21, 1991.
- [58] Gertler, J.: Residual Generation in Model-Based Fault Diagnosis. *Control; Theory and Advanced Technology*, vol. 9, nr 1, pp. 259-285, 1993.
- [59] Gertler, J.: Survey of Model-Based Failure Detection and Isolation in Complex Plants. *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 8, nr 6, ss. 3-11, 1988.
- [60] Gertler, J., X. Fang, Q. Luo: Detection and Diagnosis of Plant Failures: The Orthogonal Parity Equation Approach. *Control and Dynamic Systems*, vol. 37, ss. 159-216, 1990.
- [61] Gilchrist, W.: *Statistical Forecasting*. Wiley, Chichester, 1976.
- [62] Granger, C.W.J., P. Newbold: *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press, New York, 1977.
- [63] Greń, J.: *Statystyka matematyczna; podręcznik programowany*. PWN, Warszawa, 1987.
- [64] *Handbook of Applicable Mathematics* (red. E. Lloyd). Wiley, New York, 1984.
- [65] Hajek, O.: Discontinuous Differential Equations, I-II. *Journal of Differential Equations*, vol. 32, ss. 149-185, 1979.
- [66] Hassan, M.F., M.A. Sultan, M.S. Attia: Fault detection in large-scale stochastic dynamic systems. *IEE Proceedings-D*, vol. 139, nr 2, ss. 119-124, 1992.
- [67] Hejmo, W.: *Teoria sterowania czasooptymalnego i jej zastosowania*. PWN, Warszawa, 1990.
- [68] Hejmo, W., J. Kloch: Time-Optimal Position Control in the Presence of Non-Linear and Discontinuous Resistances of Movement. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. XXVI, nr 2, ss. 163-173, 1981.
- [69] Hejmo, W., P. Kulczycki: On the Approach to Time-Optimal Control of Positional Systems. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. XXXI, nr 1-2, ss. 103-116, 1986.
- [70] Hejmo, W., P. Kulczycki: Synthesis of Closed-Loop System Controlling a Random Object. *Analysis and Optimization of Systems* (red. A. Bensoussan, J.L. Lions); Springer-Verlag, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Berlin, vol. 144, ss. 714-723, 1990.

- [71] Hill, T., L. Marquez, M. O'Connor, W. Remus: Artificial neural networks models for forecasting and decision making. *International Journal of Forecasting*, vol. 10, ss. 5-15, 1994.
- [72] Himmelblau, D.M.: *Fault Detection and Diagnosis in Chemical and Petrochemical Processes*. Elsevier, Amsterdam, 1978.
- [73] Himmelblau, D.M.: *Fault Detection and Diagnosis – Today and Tomorrow*. IFAC Workshop on Fault Detection and Safety in Chemical Plants, Kyoto, ss. 95-105, 1986.
- [74] Isermann, R.: *Fault Diagnosis of Machines via Parameter Estimation and Knowledge Processing – Tutorial Paper*. *Automatica*, vol. 29, nr 4, ss. 815-835, 1993.
- [75] Isermann, R.: *Integration of Fault Detection and Diagnosis Methods*. IFAC SAFEPROCESS'94 Symposium, Helsinki, vol. 2, ss. 597-612, 1994.
- [76] Isermann, R.: *On the Applicability of Model Based Fault Detection for Technical Processes*. 12th World Congress IFAC, Sydney, vol. 9, ss. 195-200, 1993.
- [77] Isermann, R.: *Process Fault Detection Based on Modeling and Estimation Methods – A Survey*. *Automatica*, vol. 20, nr 4, ss. 387-404, 1984.
- [78] Isermann, R., P. Balle: *Trends in the Application of Model Based Fault Detection and Diagnosis of Technical Processes*. 13th World Congress IFAC, San Francisco, vol. N, ss. 1-12, 1996.
- [79] Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 1995.
- [80] Jenkins, G.M., D.G. Watts: *Spectral analysis and its applications*. Holden-Day, San Francisco, 1969.
- [81] Kaczorek, T.: *Teoria sterowania*. PWN, Warszawa, 1977 (I), 1981 (II).
- [82] Kerr, T.H.: *Comments on "A Chi-Square Test for Fault-Detection in Kalman Filters"*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, nr 11, ss. 1277-1278, 1990.
- [83] Khalil, H.K.: *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [84] Kisielewicz, M.: *Differential Inclusions and Optimal Control*. Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [85] Kligene, N., L. Tel'ksnis: *Methods of Detecting Instants of Change of Random Process Properties*. *Automation and Remote Control*, vol. 44, ss. 1241-1283, 1983. *Tłumaczenie z rosyjskiego: Avtomatika i Telemekhanika*, nr 10, ss. 5-56, 1983.
- [86] Kołodziej, W.: *Analiza matematyczna*. PWN, Warszawa, 1978.
- [87] Kulczycki, P.: *Almost Certain Time-Optimal Positional Control*. *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, vol. 13, nr 1, ss. 63-77, 1996.

- [88] Kulczycki,P.: An Algorithm for Parameter Identification Using Bayes and Kernel Approaches. Proceedings of the National Science Council ROC(A), vol. 22, 1998, w druku.
- [89] Kulczycki,P.: A Test for Comparing Distribution Functions with Strongly Imbalanced Samples. W druku.
- [90] Kulczycki,P.: Bayes Estimation Using Kernel Estimators. 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, Berlin, CD: I/627 oraz „Abstracts” s. 118 i vol. 1, ss. 627-632, 1997.
- [91] Kulczycki,P.: Czasowo optymalne sterowanie stochastyczne nieciągłym układem dynamicznym. Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej, Monografia 127, Kraków, 1992.
- [92] Kulczycki,P.: Robust Time-Optimal Positional Stabilization Containing a Speed Limitation Task. IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes, ss. 382-387, 1995.
- [93] Kulczycki,P.: Some Remarks on Solutions of Discontinuous Differential Equations Applied in Automatic Control. Industrial Mathematics, vol. 46, nr 2, ss. 119-128, 1996.
- [94] Kulczycki,P.: Time-Optimal Positional Feedback Controller for Random Systems. Proceedings of the National Science Council ROC(A), vol. 20, nr 1, ss. 79-89, 1996.
- [95] Kulczycki,P.: Time-optimal stabilization of a discontinuous and non-autonomous dynamic object. Control and Cybernetics, vol. 25, nr 4, ss. 707-720, 1996.
- [96] Kulczycki,P.: Time-Optimal Stochastic Positional Control. 12th IFAC World Congress, Sydney, vol. VII, ss. 443-448, 1993.
- [97] Kulczycki,P., L.T.Koczy: A Fuzzy Approach to Time-Optimal Control. IEEE World Congress on Computational Intelligence; International Conference on Fuzzy Systems, Anchorage (USA), CD: Control Theory, Systems and Applications/410 oraz vol. 1, ss. 410-415, 1998.
- [98] Kulczycki,P., L.T.Koczy: Fuzzy Suboptimal Feedback Controller. Periodica Politechnica, Ser. Electrical Engineering, vol. 43, 1988, w druku.
- [99] Kulczycki,P., H.Schioler: Bayes Decision Using Neural Networks. 10th IFAC Symposium on System Identification, Copenhagen, vol. III, ss. 477-482, 1994.
- [100] Kulczycki,P., H.Schioler: Estimating Conditional Distributions by Neural Networks. IEEE World Congress on Computational Intelligence; International Joint Conference on Neural Networks, Anchorage (USA), CD: Mathematical Foundations/1344 oraz vol. 2, ss. 1344-1349, 1998.
- [101] Kuratowski,K.: Wstęp do teorii mnogości i topologii. PWN, Warszawa, 1980.
- [102] Lehmann,E.L.: Teoria estymacji punktowej. PWN, Warszawa, 1991.

- [103] Lehmann, E.L.: Testowanie hipotez statystycznych. PWN, Warszawa, 1968.
- [104] Leitman, G.: Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego. WNT, Warszawa, 1971.
- [105] Lindgren, B.W.: Elementy teorii decyzji. WNT, Warszawa, 1977.
- [106] Łojasiewicz, S.: Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych. PWN, Warszawa, 1973.
- [107] Mahmoud, E.: Accuracy in Forecasting: a Survey. *Journal of Forecasting*, vol. 3, ss. 139-159, 1984.
- [108] Makridakis, S., M.Hibon: Accuracy of Forecasting: An Empirical Investigation. *Journal of the Royal Statistical Society*, ser. A, vol. 142, nr 2, ss. 97-145, 1979.
- [109] Makridakis, S., S.C.Wheelwright: Forecasting. *Studies in the Management Sciences*, vol. 12, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.
- [110] Makridakis, S., S.C.Wheelwright: Forecasting, Methods and Applications. Wiley, Santa Barbara, 1978.
- [111] Massoumnia, M.-A., G.C.Verghese, A.S.Willsky: Failure Detection and Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, nr 3, ss. 316-321, 1989.
- [112] Maurin, K.: Analiza. PWN, Warszawa, 1991.
- [113] Mehra, R.K., J.Peschon: An Innovations Approach to Fault Detection and Diagnosis in Dynamic Systems. *Automatica*, vol. 7, nr 5, ss. 637-640, 1971.
- [114] Mironovskii, L.A.: Functional Diagnosis of Dynamic Systems (Survey). *Automation and Remote Control*, vol. 41, ss. 1122-1143, 1980. Tłumaczenie z rosyjskiego: *Avtomatika i Telemekhanika*, nr 8, ss. 96-121, 1980.
- [115] Montgomery, D.C., L.A.Johnson: Forecasting and Time Series Analysis. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [116] Mostowski, A., M.Stark: Algebra liniowa. PWN, Warszawa, 1976.
- [117] Musielak, J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. PWN, Warszawa, 1989.
- [118] Nadaraja, E.A.: Nonparametric Estimation of Probability Densities and Regression Curves. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [119] Nadaraja, E.A.: Some New Estimates for Distribution Functions. *Theory of Probability and its Applications*, vol. 10, ss. 497-500, 1964.
- [120] Nelson, C.R.: Applied Time Series Analysis For Managerial Forecasting. Holden-Day, San Francisco, 1973.
- [121] Ogata, K.: Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. WNT, Warszawa, 1974.
- [122] Parrish, R.S.: Comparison of Quantile Estimators in Normal Sampling. *Biometrics*, vol. 46, ss. 247-257, 1990.
- [123] Patton, R., J.Chen: A Review of Parity Space Approaches to Fault Diagnostic. IFAC SAFEPROCESS'91 Symposium, Baden-Baden, ss. 239-255, 1991.

- [124] Pau, L.F.: Failure Diagnosis and Performance Monitoring. Dekker, New York, 1981. Tłumaczenie z francuskiego: L.-F.Pau, Diagnostic des pannes dans les systems, Cepadues Editions, Toulouse, 1975.
- [125] Pawłowski, Z.: Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa, 1980.
- [126] Pelczar, A., J.Szarski: Wstęp do teorii równań różniczkowych. PWN, Warszawa, 1987 (I), 1989 (II).
- [127] Plackett, R.L.: Regression Analysis. Oxford University Press, London, 1960.
- [128] Prakasa Rao, B.L.S.: Nonparametric Functional Estimation. Academic Press, Orlando, 1983.
- [129] Prock, J.: A New Technique for Fault Detection Using Petri Nets. Automatica, vol. 27, nr 2, ss. 239-245, 1991.
- [130] Reiss, R.-D.: Nonparametric Estimation of Smooth Distribution Functions. Scandinavian Journal of Statistics, vol. 8, ss. 116-119, 1981.
- [131] Rosenblatt, M.: Curve Estimates. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 42, nr 6, ss. 1815-1842, 1971.
- [132] Rouse, W.B.: Models of Human Problem Solving: Detection, Diagnosis, and Compensation for System Failures. Automatica, vol. 19, nr 6, ss. 613-625, 1983.
- [133] Rudin, W.: Analiza rzeczywista i zespolona. PWN, Warszawa, 1986.
- [134] Sainte-Beuve, M.-F.: On the Extension of Von Neumann-Auxmann's Theorem. Journal of Functional Analysis, vol. 17, ss. 112-129, 1974.
- [135] Schioler, H., P.Kulczycki: Neural Network for Estimating Conditional Distributions. IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 8, nr 5, ss. 1015-1025, 1997.
- [136] Sheather, S.J., J.S.Marron: Kernel Quantile Estimators. Journal of the American Statistical Association, vol. 85, nr 410, ss. 410-416, 1990.
- [137] Sikorski, R.: Funkcje rzeczywiste. PWN, Warszawa, 1958.
- [138] Silverman, B.W.: Density Estimation for Statistics and Data Analysis. Chapman and Hall, London, 1986.
- [139] Silvey, S.D.: Wnioskowanie statystyczne. PWN, Warszawa, 1978.
- [140] Slotine, J.-J.E., W.Li: Applied Nonlinear Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [141] Smyth, P.: Hidden Markov Models for Fault Detection in Dynamic Systems. Pattern Recognition, vol. 27, nr 1, ss. 149-164, 1994.
- [142] Sorsa, T., H.N.Koivo: Application of Artificial Neural Networks in Process Fault Diagnosis. Automatica, vol. 29, nr 4, ss. 843-849, 1993.
- [143] Sorsa, T., H.N.Koivo, H.Koivisto: Neural Networks in Process Fault Diagnosis. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 21, nr 4, ss. 815-825, 1991.
- [144] System Fault Diagnostics, Reliability and Related Knowledge-Based Approaches (red. S.Tzafestas, M.Singh, G.Schmidt). Reidel, Dordrecht, 1987.

- [145] Tadeusiewicz,R., M.Flasiński: Rozpoznawanie obrazów. PWN, Warszawa, 1991.
- [146] Tou,J.T., R.C.Gonzalez: Pattern Recognition Principles. Addison-Wesley, 1974.
- [147] Utkin,V.I.: Sliding Modes in Control Optimization. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Tłumaczenie z rosyjskiego: V.I.Utkin, Skolzascie rezimy i ih primenenie v zadacah optimizacii i upravlenia, Nauka, Moskwa, 1981.
- [148] Vaija,P., I.Turunen, M.Jarvelainen, M.Dochnal: Fuzzy Strategy for Failure Detection and Safety Control of Complex Processes. Microelectronics and Reliability, vol. 25, nr 2, ss. 369-381, 1985.
- [149] Webby,R., M.O'Connor: Judgmental and statistical time series forecasting: a review of the literature. International Journal of Forecasting, vol. 12, nr 1, ss. 91-118, 1996.
- [150] Weinmann,A.: Uncertain Models and Robust Control. Springer-Verlag, Wien, 1991.
- [151] Wentzel,A.D.: Wykłady z teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa, 1980.
- [152] Wertz,W.: Statistical Density Estimation; A Survey. Vandenhoeck & Ruprecht, Gottingen, 1978.
- [153] Wertz,W., B.Schneider: Statistical Density Estimation: a Bibliography. International Statistical Review, vol. 47, ss. 155-175, 1979.
- [154] West,M., J.Harrison: Bayesian Forecasting and Dynamic Models. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [155] Williams,E.J.: Regression Analysis. Wiley, New York, 1959.
- [156] Willsky,A.S.: A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems. Automatica, vol. 12, nr 6, ss. 601-611, 1976.
- [157] Willsky,A.S., H.L.Jones: A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 21, nr 2, ss. 108-112, 1976.
- [158] Wong,E.: Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych. WNT, Warszawa, 1976.
- [159] Young,T.Y.: Handbook of Pattern Recognition. Academic Press, Orlando, 1986.
- [160] Zeliaś,A.: Teoria prognozy. PWE, Warszawa, 1997.
- [161] Zolghadri,A., Z.Bergeon, M.Monsion: A Two-ellipsoid Overlap Test for On-line Failure Detection. Automatica, vol. 29, nr 6, ss. 1517-1522, 1993.

SUMMARY

In the present monograph

Piotr Kulczycki

*Fault Detection in Automated Systems using Statistical Methods
with Elements of Random Time-Optimal Control*

Alfa, Warsaw, 1998

an innovative concept has been presented for an early fault detection system, which includes:

- ❖ fault discovery, i.e. ascertaining that there are malfunctions in the technical condition of the system being supervised;
- ❖ fault diagnosis, which involves localizing and identifying these malfunctions;
- ❖ fault prediction, entailing a warning that they may occur in the near future (along with a presumed classification).

The main idea of this system is based on the methodology of mathematical statistics, with particular attention on the kernel estimator technique. The work is focused on the problem of fault detection in dynamic systems under automatic control; however, the basic design is universal in character, and can be applied in a wide array of problems, including those outside the field of engineering.

It is anticipated that the proposed algorithm will be executed in real time, while the supervised device is performing its proper functions. The possibility of applying the method presented here is conditional upon the specification of the so-called "symptom vector," a finite number of variables (e.g. selected components of control, state, response, or the parameters of the dynamic system), the current values of which, and the relations between them, are dependent on the technical condition of the device being supervised. The precise form of these relations cannot be given *a priori* – its identification constitutes an integral part of the procedure here proposed. Moreover, a detailed familiarity with the model of the dynamic system being supervised is not required. It is also possible for several different types of diagnosed faults to occur simultaneously, and virtually any statistical patterns can be used to characterize them.

Changes in technical condition are detected, both abrupt and – thanks to prediction – slow. Finally, the requirements imposed on the computer system realizing the designed algorithm do not exceed the capabilities of modern automatic control devices sufficiently advanced to make use of fault detection procedures. The parameters of contemporary numerical systems limit in practice the dimension of the symptom vector to 7-9, while the number of diagnosed fault types in most applications should not exceed 4-6.

Apart from specifying the form of the symptoms vector, the designer is essentially required only to define simple-to-fix quotients representing the proportion of the losses incurred by overlooking a given type of diagnosed fault and those caused by a false alarm, as well as the value of lead time in predicting faults. If these conditions are met, the theoretical material presented in this monograph provides a complete algorithm enabling the design of a modern fault detection system. In particular, precise rules have been given for specifying the form of the functions in use, and for fixing the values of the parameters. It may prove to be essential from the engineering point of view that interpretations are included of the consequences of possibly introducing departures from the proposed universal formulae.

The mathematical apparatus used is based to a large extent on the kernel estimators technique, which is still rarely applied to practical tasks. In this monograph it has been employed to estimate the multidimensional density function, as well as the distribution function and quantile of the real random variable. The theoretical aspects of the applications of these estimators is considered in detail. The multiple use of one technique, essentially without alteration, enables the designer to take full advantage of the experience acquired over time.

The functioning of the system presented in this monograph was checked by using a numerical simulation program. The supervised object was a discontinuous positional system subjected to a random time-optimal control. The mathematical aspects of this task are considered, along with the consequent suboptimal structures, which are convenient to apply. The results obtained lent credence to the concept presented, and confirmed the proper functioning of the statistical fault detection system here designed, supplementing the theoretical considerations with conclusions of a practical nature.

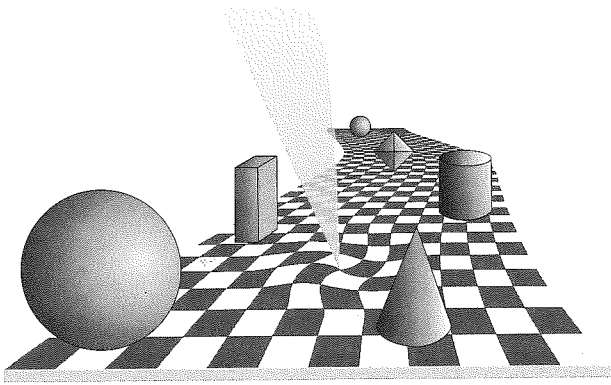
The presented material is documented with an array of mathematical theorems given in the form of appendices. The following are proven, in order: the strong consistency of the proposed kernel estimators of the distribution function and quantile; the formal correctness of the designed diagnosis and discovery procedures; and the theorem stating the existence and characteristics of the time-optimal control for the positional system, whose dynamics are described by a random discontinuous differential inclusion.

The material considered in this monograph is supplemented by an extensive bibliography in the area of automatic control – especially fault detection and optimal control – and mathematical statistics.

❖ Biographical Note

Piotr Kulczycki is a graduate of the Faculty of Electrical Engineering, Automatic Control, and Electronics at the Academy of Mining and Metallurgy (1983, specializing in automatic control), and of the Faculty of Mathematics and Physics at the Jagiellonian University (1987, majoring in applied mathematics). In 1991, he obtained the degree of Ph.D. in Technical Sciences, with a specialization in automatic control and robotics, on the basis of his dissertation on optimal control. Since graduation he has been employed in the Faculty of Electrical and Computer Engineering at the Cracow University of Technology, and recently also at the Faculty of Applied Mathematics at the Academy of Mining and Metallurgy. In 1992-93 he held a fellowship from the Danish government, after which he was a Visiting Professor at Aalborg University. He has also been an invited lecturer at the Technical University of Budapest, the Helsinki University of Technology, and the Université Catholique de Louvain.

The author's area of scientific research is mathematical methods in fault detection and optimal control, as well as artificial neural networks and fuzzy logic; the results have been published in recognized periodicals (including *IEEE Transactions on Neural Networks*, *IMA Journal of Mathematical Control & Information*), and presented at international conferences (e.g. 12th IFAC World Congress in Sydney, IEEE World Congress on Computational Intelligence in Anchorage, Alaska). His works are cited frequently: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt für Mathematik*, *Computer and Control Abstracts*, *Current Mathematical Publications*, and elsewhere.





Piotr Kulczycki jest absolwentem Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej (1983, specjalność automatyka) oraz Wydziału Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego (1987, kierunek matematyka stosowana). W 1991 roku uzyskał na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej stopień doktora nauk technicznych w specjalności automatyka i robotyka, na podstawie pracy z zakresu sterowania optymalnego. Od ukończenia studiów pracuje na Wydziale Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej Politechniki Krakowskiej, a ostatnio także na Wydziale Matematyki Stosowanej Akademii Górniczo-Hutniczej. W

latach 1992-93 był stypendystą rządu duńskiego, po czym przebywał jako *visiting professor* w *Aalborg University*. Prowadził również wykłady monograficzne w *Technical University of Budapest*, *Helsinki University of Technology*, *Université Catholique de Louvain*.

Dziedziną naukowej aktywności autora są matematyczne metody stosowane w zagadnieniach wykrywania uszkodzeń i sterowania optymalnego, a także problematyka sztucznych sieci neuronowych oraz logiki rozmytej. Wyniki badań publikował w uznanych periodykach (m.in. *IEEE Transactions on Neural Networks*, *IMA Journal of Mathematical Control & Information*) oraz prezentował na międzynarodowych konferencjach (np. *12th IFAC World Congress* w Sydney, *IEEE World Congress on Computational Intelligence* w Anchorage). Jego prace były wielokrotnie cytowane w *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt für Mathematik*, *Computer and Control Abstracts*, *Current Mathematical Publications* i innych wydawnictwach naukowych.

