Zestaw 1 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Znając wartości funkcji sinus i cosinus dla kątów: $\pi/3$, $\pi/4$ oraz $\pi/6$ pokaż, że
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
korzystając z: a) wzoru na sumę sinusów kątów $\pi/3$ i $\pi/6$; b) wzoru na sinus sumy kątów $\pi/3$ i $\pi/4$ oraz związku $\sin(\pi/2+\phi) = \cos\phi$

2. Korzystając z tożsamości $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$ pokaż, że jeśli $s = \sin\pi/8$ to spełnione jest równanie
$$8s^4 - 8s^2 + 1 = 0$$
Rozwiąż je w celu obliczenia $\sin\pi/8$ ($\sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$)

3. Korzystając ze wzorów na sumę lub różnicę funkcji sinus lub cosinus dwóch kątów znajdź wszystkie rozwiązania równania
$$\sin\phi + \sin 4\phi = \sin 2\phi + \sin 3\phi$$
dla $-\pi < \phi \leq \pi$. Jaka jest krotność związania $\phi = 0$?

4. Korzystając z zasady indukcji matematycznej pokaż, że suma wyrazów ciągu arytmetycznego $a_{n+1} = a_n + d$, $n \geq 0$, dana jest wzorem
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{2}(n+1)(a_0 + a_n) = \frac{(2a_0 + nd)(n+1)}{2}$$

5. Korzystając z zasady indukcji matematycznej pokaż, że suma wyrazów ciągu potęg, $a \neq 1$, $n \geq 0$, dana jest wzorem
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

6. Metodą różniczkowania wzoru na sumę wyrazów ciągu potęg oblicz $\sum_{k=1}^{n} k a^k$

7. Różnikując zmodfikowany wzór na sumę wyrazów ciągu potęg $(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1$ oblicz: $\sum_{k=1}^{n} k$

8. Wykaż, że:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

9. Odpowiednio dobierając wartości a i b w rozwinięciu Newtona
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
znajdź wyrażenia na
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

10. Metodą różniczkowania rozwinięcia Newtona oblicz:
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

11. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ b) liczba $10^n - 1$ jest podzielna przez 9 dla $n \geq 1$