Zestaw 10 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Znajdź zbiory napinające wszystkie cztery podstawowe podprzestrzenie macierzowe związane z macierzą:
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Dane są wektory w $\mathcal{R}^4$
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad e_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_4' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Sprawdź, że wektory $\{e_i'\},\ i = 1, .., 4$ tworzą bazę w $\mathcal{R}^4$. Znajdź współrzędne wektora x w bazie $\{e_i'\}$

3. Dane są dwie bazy wektorów w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ $\{e_i\}$ oraz $\{e_i'\}$, $\ i = 1, 2, 3$:
$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad e_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad e_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$
Niech wektor $\vec{x}$ ma współrzędne $(1, 2, 3)$ w bazie $\{e_i\}$. Znajdź współrzędne tego samego wektora w bazie $\{e_i'\}$.

4. Pokaż, że odwzorowanie $T(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$ jest odwzorowaniem liniowym w przestrzeni $\mathcal{R}^3$. Rozważmy wektor $\vec{\mathrm{v}}$ i bazę $\mathcal{B}$ zadane przez:
$$\vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
a) Znajdź współrzędne wektora $\vec{\mathrm{v}}$ oraz reprezentację macierzową $[T]_{\mathcal{B}}$ operatora T w bazie $\mathcal{B}$.
b) Następnie oblicz $[T(\vec{\mathrm{v}})]_{\mathcal{B}}$ i przekonaj się, że $[T]_{\mathcal{B}}\,[\vec{\mathrm{v}}]_{\mathcal{B}} = [T(\vec{\mathrm{v}})]_{\mathcal{B}}$.

5. Proszę znaleźć standardową macierz transformacji ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) polegającej na odbiciu dowolnego wektora względem prostej przechodzącej przez początek układu i równoległej do wektora $\vec{d} = [1, 1, 1]$. *Wskazówka:* Proszę pokazać i wykorzystać fakt, że $T(\vec{x}) = 2\mathrm{proj}_{\vec{d}}(\vec{x}) - \vec{x}$. Czy jest to transformacja odwracalna? Jeśli tak to proszę podać macierz standardową transformacji odwrotnej. Na podstawie analizy geometrycznej a następnie obliczeń algebraicznych proszę podać wektory własne oraz bazy odpowiadających im przestrzeni własnych.

6. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$