Zestaw 12 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix}$$

   gdzie α jest dowolną liczbą. Czy istnieje α taka, że wektory własne macierzy A są ortogonalne?

2. Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & i & i & 0 \\ -i & 2 & 0 & i \\ -i & 0 & 2 & i \\ 0 & -i & -i & 2 \end{bmatrix}$$

   Zdiagonalizuj tę macierz poprzez unitarną transformację podobieństwa.

3. Korzystając z rachunku macierzowego znajdź bezpośredni przepis na n-ty wyraz ciągu w przypadku następujących zależności rekurencyjnych:

   b) $f_n = 2f_{n-1} + 2f_{n-2}$, dla $n \geqslant 2$, przy warunkach początkowych $f_0 = 1, f_1 = 1$.

   b) $f_n = -5f_{n-1} + 7f_{n-2} + 6f_{n-3}$, dla $n \geqslant 3$, przy warunkach początkowych $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$.

4. Korzystając z rachunku macierzowego zapisz w postaci diagonalnej formy kwadratowe:

$$f(\vec{x}) = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 16x_2x_3$$

   gdzie $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$h(\vec{x}) = 3x_1x_1^* + 3x_2x_2^* + 4x_3x_3^* - ix_2x_1^* + ix_1x_2^*$$

   gdzie $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$.

   Znajdując unitarną macierz U taką, że liniowa transformacja zmiennych $\vec{y} = U^\dagger \vec{x}$ transformuje daną formę do postaci niezawierającej członów mieszanych.