

Zestaw 2 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Dla liczb zespolonych $z = 3 + 4i$ i $w = 2 - i$ podaj część rzeczywistą i urojoną liczb:

$$wz, \quad z/w, \quad z^*w + w^*z, \quad w^2, \quad \sqrt{1 + z + w}$$

2. Podaj moduły i fazy liczb zespolonych:

$$1 + i, \quad -\sqrt{3} + i, \quad 1 + \sqrt{3}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad 1 + i \tan \alpha, \quad 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$$

3. Wykonaj działania, stosując przedstawienie liczb zespolonych w postaci wykładniczej:

$$(1 + i)(1 + i\sqrt{3}), \quad \frac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$$

4. Stosując wzór na sumę postępu geometrycznego, podaj część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej:

$$z = \sum_{k=0}^{11} (1 + i)^k, \quad z = \sum_{k=0}^9 (1 + i)^k (1 - i)^{9-k}, \quad z = \sum_{j,k,l=0}^7 (1 + i)^{j+k+l}$$

5. Do poniższego wyrażenia zastosuj a) wzór dwumianowy Newtona, b) wzór de Moivre'a. Podaj wzory jakie otrzymujemy przez porównanie wyników.

$$(\cos x + i \sin x)^4$$

6. Przedstaw w postaci $a + ib$ wartości następujących pierwiastków bez posługiwania się trygonometryczną postacią liczb zespolonych

$$\sqrt{3 \pm 4i}, \quad \sqrt{\pm i}, \quad \sqrt[4]{16}$$

7. Znajdź wszystkie rozwiązania równań:

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0, \quad z^4 + z^2 + 1 = 0$$

8. Oblicz:

$$\sqrt[3]{1}, \quad \sqrt[3]{1 + i}$$

9. Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie

$$(z - 2i)^3 = (2z + i)^3; \quad (1 - z)^4 = (1 - i)^8$$

10. Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone:

$$\sqrt[3]{(1 + 2i)^6}$$

11. Korzystając z postaci wykładniczej liczb zespolonych znajdź wszystkie rozwiązania równań:

$$z^* z^n = 2^{n+1}, \quad |z|z = iz^2$$

12. Znajdź wszystkie rozwiązania równania:

$$z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 18z + 18 = 0$$

wiedząc, że ma ono przynajmniej jeden czysto urojony pierwiastek;

13. Podaj miejsca geometryczne punktów na płaszczyźnie zespolonej spełniających warunek:

- $|z - 1 - i| = 2$,
- $|z + i| - |z - i| = \sqrt{2}$,
- $|z + i| + |z - i| = 4$
- $0 < \text{Arg} \left(\frac{z+i}{z-i} - 1 \right) < \frac{\pi}{4}$,
- $0 < \text{Arg} \left(\frac{z^*}{z} \right) < \frac{\pi}{2}$.

14. Znajdź wszystkie wartości wyrażeń (w postaci algebraicznej):

$$\ln 2, \quad \ln(-1), \quad \ln(1+i), \quad (1+i)^{2-i}, \quad \arccos 2.$$