Zestaw 3 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Dane są trzy wektory: $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (4, 3)$, $\vec{c} = (-10, -11)$. Proszę znaleźć współczynniki α i β, które spełniają równanie wektorowe w postaci:
$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

2. Proszę obliczyć kąt między wektorami $\vec{a} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$ i $\vec{b} = 13\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + 8\vec{e}_z$, gdzie $\vec{e}_i$ jest wersorem wzdłuż osi 0–i.

3. Proszę obliczyć kąt między wektorami $\vec{p} = 6\vec{m} + 4\vec{n}$ i $\vec{q} = 2\vec{m} + 10\vec{n}$, jeżeli wiadomo, że $\vec{m}$ i $\vec{n}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

4. Jaki warunek muszą spełniać współrzędne punktu $\mathcal{A}(x, y, z)$, aby wektor łączący początek układu $\mathcal{O}$ z punktem $\mathcal{B}(2, 3, -5)$ był prostopadły do wektora $\mathcal{BA}$.

5. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $\vec{a} = 3\vec{p} + \lambda\vec{q}$ oraz $\vec{b} = -\vec{p} + 2\vec{q}$ są wzajemnie prostopadłe, jeżeli wiadomo, że $p = 5$, $q = 3$ oraz $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = (2/3)\pi$.

6. Dane są trzy wektory $\vec{a} = (3, y, z)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$ i $\vec{c} = (2, -4, -1)$. Proszę wyznaczyć wartości y i z dla których wektor $\vec{a}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

7. Proszę znaleźć rzut wektora $\vec{a} = (2, -1, 2)$ na kierunek wektora $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

8. Proszę znaleźć cosinusy kierunkowe wektora $\vec{a} = (1, -1, 2)$.

9. W przestrzeni wektorowej R^3 określony jest iloczyn skalarny $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ gdzie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ oraz $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Przeprowadź ortonormalizację poniższej bazy metodą Grama-Schmidta,
$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 1)$$
tak aby jeden z wektorów nowej bazy był równoległy do wektora v_1.

10. W przestrzeni wektorowej C^3 określony jest iloczyn skalarny $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i^* y_i$ gdzie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ oraz $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Przeprowadź ortonormalizację poniższej bazy metodą Grama-Schmidta,
$$\vec{v}_1 = (1, i, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, -i), \quad \vec{v}_3 = (i, 0, -1)$$
tak aby jeden z wektorów nowej bazy był równoległy do wektora v_1.