Zestaw 4 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Znajdź permutacje fg, gf, f^2 i f^{-1} jeśli znane są permutacje f i g:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Określ parzystość permutacji f, g, fg, gf, f^2 i f^{-1} z poprzedniego zadania.

3. Rozłóż permutacje z zadania 1 na cykle zamknięte i transpozycje.

4. Wykaż, że: (a) $\sum_{k=1}^{2} \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = \delta_{ij}$; (b) $\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$

5. Dane są wektory $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$. Proszę znaleźć współrzędne wektora $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$.

6. W punkcie $\mathcal{A}(3, -1, 5)$ przyłożono siłę $\mathbf{F} = (2, 5, -4)$. Proszę wyznaczyć moment tej siły względem punktu $\mathcal{B}(1, -2, 3)$ oraz jej wartość.

7. Cząstka porusza się w płaszczyźnie xy tak, że jej wektor położenia jest określony równaniem:

$$\vec{R} = r\cos(\omega t)\vec{i} + r\sin(\omega t)\vec{j} \qquad (r, \omega = \text{const}, t - \text{czas})$$

   Pokaż, że w tym ruchu:

   - prędkość $\vec{V}$ jest prostopadła do $\vec{R}$,
   - przyspieszenie jest skierowane do środka układu; znajdź jego wartość,
   - moment pędu $\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{V}$ jest wektorem stałym; znajdź jego długość.

8. Cząstka o masie m porusza się z prędkością $\mathbf{v}$ w polu siły $\mathbf{F} = -f(r)\mathbf{r}$. Proszę pokazać, że orbitalny moment pędu jest wektorem stałym.

9. Do płaszczyzny należą trzy punkty o wektorach wodzących $\vec{r}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{r}_2 = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ oraz $\vec{r}_3 = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. Jaka jest odległość tej płaszczyzny od początku układu współrzędnych?

10. Podaj równanie prostej w przestrzeni w postaci normalnej, jeżeli wiadomo, że prosta jest wyznaczona przez przecięcie płaszczyzn $\vec{r} \cdot \vec{a}_1 = \alpha_1$ oraz $\vec{r} \cdot \vec{a}_2 = \alpha_2$, gdzie $\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{k}$, $\vec{a}_2 = \hat{i}$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$.

11. Podaj równanie prostej przechodzącej przez punkt o wektorze wodzącym $\vec{r}_1 = 2\hat{i}$, jeżeli wiadomo, że prosta ta jest prostopadła do płaszczyzny danej równaniem $x + y + z = 1$.

12. Dwie płaszczyzny określone są za pomocą wektorów do nich ortogonalnych $\vec{n}$ oraz $\vec{m}$, o których wiadomo, że nie są równoległe. Odległości tych płaszczyzn od początku układu współrzędnych wynoszą odpwiednio λ oraz μ. Znajdź w postaci parametrycznej równanie prostej będącej przecięciem tych płaszczyzn.