Zestaw 6 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Oblicz w sposób jak najbardziej efektywny wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} gc & ge & a+ge & gb+ge \\ 0 & b & b & b \\ c & e & e & b+e \\ a & b & b+f & b+d \end{bmatrix}$$

2. Rozwiąż poniższe równania ze względu na niewiadomą x minimalizując obliczenia:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x+2 & x+4 & x3 \\ x+3 & x & x+5 \\ x-2 & x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Komutatorem macierzy $[A, B]$ nazywamy:

$$[A, B] = AB - BA$$

   Zakładając, że $[A, B] = 0$ (macierze komutują) pokaż, że

   - $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$
   - $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

4. Zakładając, że $AB = -BA$ (macierze antykomutują), $A^2 = B^2 = I$ oraz $[A, B] = 2iC$

   - pokaż, że $C^2 = I; \quad [B, C] = 2iA; \quad [C, A] = 2iB$
   - oblicz ABC
   - oblicz $[[[A, B], [B, C]], [A, B]]$

5. Pokaż, że macierze Pauliego antykomutują i spełniają własności z zadania poprzedniego.

6. Niech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, macierz $S(\vec{a})$ definiujemy jako:

$$S(\vec{a}) = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

   gdzie σ_i są macierzami Pauliego. Pokaż, że dla dowolnych wektorów $\vec{a}, \vec{b}$ zachodzi:

$$S(\vec{a})S(\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}I + iS(\vec{a} \times \vec{b})$$

7. Korzystając z procedury Gramma-Schmidta skonstruuj z poniższego zbioru wektorów zbiór wektorów ortonormalnych

   - $$\vec{v}_1 = (0, 0, 1, 1);\ \vec{v}_2 = (1, 0, -1, 0);\ \vec{v}_3 = (1, 2, 0, 2);\ \vec{v}_4 = (2, 1, 1, 1)$$
   - $$\vec{v}_1 = (1, 2, 0, 0);\ \vec{v}_2 = (3, -1, 2, 0);\ \vec{v}_3 = (0, 0, 2, 1)$$