

Zestaw 1 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Oblicz:

$$(-1 + i\sqrt{3})^{60} \quad \sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} \quad \sqrt{3 \pm 4i} \quad \ln(1+i) \quad (1+i)^{1-i}$$

2. Pokaż, że (skorzystaj ze wzoru de Moivre'a):

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

Ile wynosi suma:

$$S = \sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{5\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} + \sin \frac{9\pi}{11}$$

3. Rozwiąż równania:

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0, \quad (1 - z)^n = (1 + z)^n, \quad (1 - z)^n = z^n$$

4. Znajdź zbiór punktów na płaszczyźnie zespolonej zadany przez:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad z^2 + \bar{z}^2 = 2 & \text{(c)} \quad |z|^2 + 3z + 3\bar{z} + 10 = 0 \\ \text{(b)} \quad |z| > 1 - \operatorname{Re} z & \text{(d)} \quad \operatorname{Re}(z(1-i)) > \sqrt{2} \end{array}$$

5. Udowodnij nierówności:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \left| \sinh \frac{z}{2} \right| \leq \sinh \frac{|z|}{2} \\ \text{b)} \quad |e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|} \\ \text{c)} \quad |\Im z| \leq |\sin z| \leq e^{|\Im z|} \end{array}$$

6. Niech liczby zespolone $z = x + iy$ oraz $w = u + iv$ będą reprezentowane przez punkty P i Q na odpowiednich płaszczyznach zespolonych. Jaką trajektorię określa punkt Q jeśli punkt P porusza się po linii $x = -1/2$, a zmienne z i w związane są relacją $z = w/(1-w)$.

7. Zapisz funkcję $f(z) = z^2$ w postaci

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{gdzie} \quad z = x + iy$$

Znajdź krzywe na płaszczyźnie $x - y$ dla których $u(x, y) = \alpha$ oraz $v(x, y) = \beta$. Znajdź także krzywe na płaszczyźnie $u - v$ którym odpowiadają linie $x = a$ oraz $y = b$. Znajdź obraz zamkniętej krzywej $r = 2(1 + \cos \theta)$, gdzie $z = re^{i\theta}$, leżącej w płaszczyźnie $x - y$.