Zestaw 10 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Znajdź rozwinięcie poprzez funkcje własne funkcji Green'a $G(x', x)$ dla

$$y'' + y = x, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

Znajdź rozwiązanie $y(x)$ powyższego równania niejednorodnego w postaci:

$$y(x) = \int_0^1 x' G(x', x) \mathrm{d}x'$$

2. Rozwiąż poprzednie zadanie za pomocą funkcji Green'a wykorzystując fakt, że jest ona odpowiedzią układu na funkcje delta Diraca.

3. (a) Znajdź znormalizowane funkcje własne $y_n(x)$ operatora hermitowskiego $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ które spełniają wraunki brzegowe $y_n(0) = y_n(\pi) = 0$. Skonstruuj funkcję Green'a $G(x', x)$ tego operatora.
(b) Pokaż, że funkcja Green'a otrzymana z

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} G(x', x) = \delta(x' - x)$$

ma postać

$$G(x', x) = \begin{cases} x(x' - \pi)/\pi & 0 \leqslant x \leqslant x' \\ x'(x - \pi)/\pi & x' \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

(c) Rozwijając funkcję z punktu (b) poprzez funkcje własne $y_n(x)$, przekonaj się ze jest to ta sama funkcja co otrzymana w punkcie (a).

4. Znajdź funkcję Greena dla operatora:

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - k^2$$

Rozpatrz trzy przypadki: (a) skonczonego przedziału zmiennej $x \in [0, a]$, (b) przedziału nieskonczonego $x \in (-\infty, \infty)$. Jako warunki brzegowe przyjmij znikanie funkcji Green'a na krańcach przedziału.

5. Znajdź rozwiązanie niejednorodnego równania różniczkowego

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + ky = f(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

za pomocą funkcji Greena wyrażonej poprzez wielomiany Legendre'a. A następnie korzystając z niej znajdź rozwiązanie dla przypadku gdy $k = 14$ i $f(x) = 5x^3$.
Odp. (b) $y(x) = (10x^3 - 5x)/4$

6. Stosując metodę funkcji Greena znajdź rozwiązanie równania

$$y''(x) + k^2 y(x) = -x$$

spełniające warunki brzegowe

$$y'(0) = y\left(\frac{\pi}{k}\right) = 0.$$

7. Znajdź rozwiązanie równania

$$\frac{d^2 G(x, y)}{dx^2} = -\delta(x - y)$$

w postaci szeregu zakładając, że funkcja Greena spełnia dwupunktowe warunki brzegowe w postaci

$$G(0, y) = G(1, y) = 0.$$