

Zestaw 3 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Obowiązują nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.
2. Oblicz całkę $\oint_C (|z| - e^z \sin z^2 + \bar{z}) dz$, gdzie C jest okręgiem $|z| = a$.
3. Rozważmy całkowanie funkcji e^{-z^2} wzdłuż prostokątnego konturu Γ o wierzchołkach $\pm a$ oraz $\pm a + ib$ zorientowanego dodatnio (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Wykonując przejście graniczne $a \rightarrow \infty$ przy ustalonym b , pokaż, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{\pm 2ibx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = e^{-b^2} \sqrt{\pi}$$

4. Oblicz całki po okręgu $|z| = 1$:

$$\oint \frac{z^2 \sin \pi z}{z - \frac{1}{2}} dz, \quad \oint \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad \oint \frac{z^2 - 1}{(z - 2)^2} dz$$

5. Oblicz całkę $\oint \frac{z^2}{z^2 + 1} dz$ po zamkniętym konturze którym jest okrąg (a) $|z - 1| = 1$, (b) $|z - i| = 1$, (c) $|z - 1| = 2$.
6. Oblicz pochodną $f'(1 + i)$ funkcji $f(z)$ zdefiniowanej za pomocą całki

$$f(z) = \oint_{|\xi|=3} \frac{3\xi^2 + 7\xi + 1}{\xi - z} d\xi$$