

## Zestaw 4 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Obowiązują nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.
2. Znajdź promienie okręgów wewnątrz których zbieżne są następujące szeregi potęgowe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (z-i)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{\ln k} (z-2)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k}\right)^k$$

3. Znajdź rozwinięcie w szereg Taylora wokół początku układu i promień zbieżności następujących funkcji zespolonych:

$$f(z) = \frac{e^z}{\cos z}, \quad f(z) = \frac{1}{1+z-2z^2}, \quad f(z) = \ln(1+z)$$

4. Znajdź rozwinięcie w szereg Maclaurina do wyrazów rzędu  $z^3$  następujących funkcji:

$$f(z) = \sin^{-1} z, \quad f(z) = e^{e^z}$$

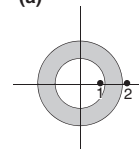
5. Wykorzystując odpowiednią pomocniczą funkcję analityczną, rozwiń funkcję rzeczywistą  $y = e^x \cos x$  w szereg Taylora w zmiennej  $x$ .

6. Znajdź wszystkie możliwe rozwinięcia w szereg Laurenta podanych funkcji wokół punktu  $\alpha$ :

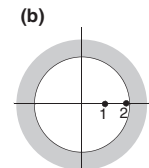
$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}, \quad \alpha = -1, \quad f(z) = \frac{1}{z^3}, \quad \alpha = i, \quad f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}, \quad \alpha = 0$$

7. Znajdź rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji  $f(z) = \frac{1}{e^z - e^{2z}}$  wokół  $z = 0$  które jest zbieżne w pierścieniu  $0 < |z| < 2\pi$ .

8. Pokaż, że funkcje  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k$  oraz  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-a)^k z^k}{(1-z)^{k+1}}$  są nawzajem swoimi przedłużeniami analitycznymi.



(a)

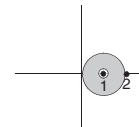


(b)

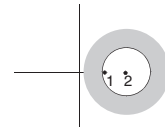
9. Znajdź rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

we wszystkich czterech obszarach zaznaczonych na rysunku.



(c)



(d)