Zestaw 4 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Obowiązują nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.

2. Znajdź promienie okręgów wewnątrz których zbieżne są następujące szeregi potęgowe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(z-i)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^{\ln k}(z-2)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k}\right)^k$$

3. Znajdź rozwinięcie w szereg Taylora wokół początku układu i promień zbieżności następujących funkcji zespolonych:

$$f(z) = \frac{e^z}{\cos z}, \qquad f(z) = \frac{1}{1+z-2z^2}, \qquad f(z) = \ln(1+z)$$

4. Znajdź rozwinięcie w szereg Maclaurina do wyrazów rzędu z^3 następujacych funkcji:

$$f(z) = \sin^{-1} z, \qquad f(z) = e^{e^z}$$

5. Wykorzystując odpowiednią pomocniczą funkcję analityczną, rozwiń funkcję rzeczywistą
$y = e^x \cos x$ w szereg Taylora w zmiennej x.

6. Znajdź wszystkie możliwe rozwinięcia w szereg Laurenta podanych funkcji wokół punktu α:

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2},\ \alpha = -1, \qquad f(z) = \frac{1}{z^3},\ \alpha = i, \qquad f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5},\ \alpha = 0$$

7. Znajdź rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji $f(z) = \dfrac{1}{e^z - e^{2z}}$ wokół $z = 0$ które jest zbieżne w pierścieniu $0 < |z| < 2\pi$.

8. Pokaż, że funkcje $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k$ oraz $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (1-a)^k z^k}{(1-z)^{k+1}}$ są nawzajem swoimi przedłużeniami analitycznymi.

9. Znajdź rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

we wszystkich czterech obszarach zaznaczonych na rysunku.