Zestaw 5 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Obowiązują nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.

2. Pokaż, że funkcja mająca rozwinięcie w szereg Laurenta w postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ jest analityczna wszędzie z wyjątkiem $z = 0$. Oblicz całkę z powyższej funkcji po okręgu $|z| = 1$.

3. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całkę po okręgu $|z| = 2$ z funkcji

$$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}, \qquad f(z) = \frac{\operatorname{tgh} z}{z}$$

4. Oblicz całkę $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+4)}$ po okręgu (a) $|z| = 2$, (b) $|z+2| = 3$.

5. Oblicz całki po okręgu $|z| = 1$ z następujących funkcji:

$$f(z) = \operatorname{tg} \pi z, \qquad f(z) = z^2 \mathrm{e}^{1/z}$$

6. Pokaż, że jeśli $z = 1$ oraz $z = 2$ leżą wewnątrz zamkniętego konturu C, to

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-2)}\, \mathrm{d}z = 0$$

7. Oblicz za pomocą residuów następujące rzeczywiste całki niewłaściwe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\, \mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

8. Oblicz całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x+i}\, \mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\omega x}}{x^2+4}\, \mathrm{d}x,\ \omega > 0$$

9. Wybierając kontur całkowania w postaci odpowiedniego prostokątu, pokaż, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{1+\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < \alpha < 1$$

10. Wybierając kontur całkowania w postaci wycinka okręgu, oblicz całki Fresnela:

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$$