Zestaw 6 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Znajdź rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(t)$ jeśli wiadomo, że jest ona periodyczna, tzn. $f(t+2L) = f(t)$ oraz w przedziale $-L < t < L$ zdefiniowana jest przez:

$$f(t) = t, \qquad f(t) = t^2, \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & -1 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \end{cases}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ 2k & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

2. Funkcja $f(t) = t - t^2$ jest zdefiniowana tylko na przedziale $0 < t < 1$. Znajdź rozwinięcie tej funkcji w szereg Fouriera zawierające tylko wyrazy z (a) cosinus, (b) sinus.

3. Znajdź rozwinięcie funkcji $f(t) = t$ określonej tylko na przedziale $0 < t < 2$ w szereg Fouriera zawierający tylko wyrazy typu sinus.

4. Znajdź rozwinięcie w zespolony szereg Fouriera następujących funkcji okresowych określonych na przedziale $-\pi < t < \pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}, \qquad f(t) = \mathrm{e}^t$$

5. Korzystając z rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji

$$f(x) = x^2, \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1, \quad f(t+2) = f(t)$$

pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

6. Całkując rozwinięcie w szereg Fouriera periodycznej funkcji $f(t) = t^2$, $-L < t < L$, znajdź rozwinięcie w szereg Fouriera periodycznej funkcji $f(t) = t^3$, $-L < t < L$.

7. Znajdź całkę Fouriera funkcji $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$

Następnie pokaż, że

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega t \sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } -1 < t < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{dla } |t| = 1 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$$

8. Znajdź całki Fouriera typu sinus i cosinus funkcji $f(t) = \mathrm{e}^{-st}$, $t > 0$, $s > 0$.

9. Znajdź $f(t)$ jeśli wiadomo, że jest to funkcja parzysta, oraz

$$\int_0^{\infty} f(t)\cos at\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1-a & \text{dla } 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } a > 1 \end{cases}$$

10. Wykorzystaj transformację sinusową Fouriera do rozwiązania równania różniczkowego

$$y''(t) - 9y(t) = 50\mathrm{e}^{-2t}, \qquad y(0) = y_0$$

11. Znajdź transformatę Fouriera funkcji $f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$

12. Znajdź odwrotną transformatę Fouriera funkcji $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\alpha + i\omega}$

13. Znajdź transformatę Fouriera funkcji $f(r) = \dfrac{z^3}{\pi}\mathrm{e}^{-2zr}$, gdzie z jest stałą.