Zestaw 7 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. **Obowiązują nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu. Proszę opuścić zadanie ostatnie. Dotyczy ono trójwymiarowej transformacji Fouriera niedyskutowanej na wykładach.**

2. **Rozwiąż równanie różniczkowe $y'' + y = 0$, stosując rozwinięcie $y(x)$ w szereg potęgowy.**

3. **Rozwiąż podane równanie różniczkowe stosując rozwinięcie $y(x)$ w szereg Frobeniusa.**

   - $xy'' + 2y' + xy = 0,$
   - $8x^2y'' + 10xy' + (x-1)y = 0,$
   - $4xy'' + 2y' - y = 0,$
   - $x^2y'' - xy' - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) y = 0$

4. **Znajdź rozwiązania równania różniczkowego (równanie Bessel'a)**

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

   gdzie n jest znaną liczbą, w postaci szeregu Frobeniusa

$$y = x^p \sum_{j=0} a_j x^j = \sum_{j=0} a_j x^{j+p}, \quad a_0 \neq 0,\ p = const$$

   Przekonaj się, że rozwiązanie to przyjmuje postać funkcji Bessel'a

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{n+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$