

Zestaw 8 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Obowiązują nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.

2. Pokaż, że funkcje Bessela: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, oraz $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

3. Pokaż, że $\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x)$, $\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

4. Znajdź rozwiązanie równania Laguerre'a

$$xy'' + (1-x)y' + qy = 0$$

gdzie q jest pewną stałą.

5. Znajdź rozwiązanie równania $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$

6. Korzystając z postaci funkcji tworzącej funkcji Bessela

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

wykaż

a) $2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$,

b) $\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$,

c) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) = 1$.