Zestaw 9 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Wielomiany Legendre'a. Zbuduj ortonormalny układ z liniowo niezależnych funkcji $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ na przedziale $-1 \leqslant x \leqslant 1$ z wagą $w(x) = 1$.

2. (a) Pokaż, że dla $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0$$
reprezentuje regularny problem Sturm-Liouville'a. (b) Znajdź wartości własne i funkcje własne dla tego problemu.

3. (a) Zapisz w postaci problemu Sturma-Liouville'a:
$$y'' - 2y' + \lambda y = 0,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$
(b) Znajdź wartości własne i funkcje własne dla tego problemu. (c) Znajdź rozwinięcie zadanej funkcji $f(x)$ poprzez funkcje własne na przedziale $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

4. (a) Znajdź wartości własne i funkcje własne następującego problemu Sturma-Liouville'a:
$$y'' + \lambda y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) - y'(1) = 0$$
(b) Pokaż, że funkcje własne są ortogonalne poprzez bezpośrednie sprawdzenie, że
$$\int_0^1 y_n(x) y_m(x) \mathrm{d}x = 0,\ n \neq m$$
(c) Znajdź układ ortonormalnych funkcji własnych.

5. Równanie Hermite'a. Pokaż, że równanie różniczkowe
$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0,\ \ -\infty < x < \infty$$
tworzy osobliwy problem Sturma-Liouville'a. Jeśli $H_n(x)$ i $H_m(x)$ są dwoma rozwiązaniami tego problemu, pokaż, że
$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = 0, \ \ \text{dla}\ \ n \neq m$$

6. Równanie Laguerre'a. Pokaż, że równanie różniczkowe
$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,\ \ 0 < x < \infty$$
reprezentuje osobliwy problem Sturma-Liouville'a. Jeśli $L_n(x)$ i $L_m(x)$ są dwoma rozwiązaniami dla tego problemu, pokaż, że
$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x) L_m(x) \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 0, \ \ \text{dla}\ \ n \neq m$$

7. Równanie Chebyshev'a. Pokaż, że równanie różniczkowe
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0,\ \ -1 < x < 1$$
reprezentuje osobliwy problem Sturma-Liouville'a. Jeśli $T_n(x)$ i $T_m(x)$ są dwoma rozwiązaniami dla tego problemu, pokaż, że
$$\int_0^{\infty} T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 0, \ \ \text{dla}\ \ n \neq m$$

8. Rozwiąż równanie oscylatora harmonicznego
$$y''(x) + k^2 y(x) = 0$$
z warunkami brzegowymi
   a) $y(0) = y(L) = 1$,
   b) $y(0) = 1 \wedge y\left(\frac{\pi}{k}\right) = -1$,
   c) $y(0) = 1 \wedge y\left(\frac{\pi}{k}\right) = -2$.