Automaty komórkowe
v. 2.718281828459045235360287

http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/

Krzysztof Malarz

2 września 2019

Podziękowania. Chciałbym podziękować Krzysztofowi Kułakowskiemu za wprowadzenie mnie w tematykę będącą przedmiotem niniejszego wykładu i nieustanną pomoc w jego przygotowaniu i prowadzeniu oraz udostępnienie prywatnych notatek.
Podziękowania należą się również moim Koleżankom i Kolegom z ZIS WFiIS AGH: Małgorzacie Krawczyk, Pawłowi Paściakowi, Tomaszowi Sitkowskiemu i Maciejowi Wołoszynowi, którzy udostępnili wyniki swoich prac oraz rysunki do rozdziałów 11, 15 i 17.
Dziękuję również B. Jagodzie i P. Bialicowi z Instytutu Chemii UJ za udostępnieniu swoich prac magisterskich wykorzystanych w rozdziale 18.

Skład komputerowy systemem $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Część I

Teoria

Opowieść 1

Wstęp

— Tak to właśnie wygląda, kiedy ludzie próbują edukować swoje dzieci — stwierdził kruk — zamiast mówić im o różnych rzeczach...

[Terry Pratchett, *Muzyka duszy*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2002)]

Czym są automaty komórkowe (AK)?

- alternatywną matematyką, szczególnie przydatną w obliczeniach równoległych, wolną od błędów zaokrągleń,
- narzędziem do symulacji procesów fizycznych, w których bierze udział wiele układów oddziałujących ze sobą,
- obiektami matematycznymi, interesującymi z punktu widzenia teorii procesów dynamicznych,
- zabawką,
- oraz — przedmiotem tego wykładu...

Trochę historii

- Za twórcę automatów komórkowych uważa się Janosa von Neumanna, Węgra pracującego w Princeton. Jak wiadomo, wprowadził do swego modelu "pierwotnej zupy" dyskretny czas i przestrzeń z inspiracji Stanisława Ulama, lwowskiego matematyka, który przebywał wtedy w Los Alamos. Ulam jest też autorem określenia automatów komórkowych jako "fizyki urojonej"...
- Najsłynniejszym chyba automatem jest *Life* autorstwa angielskiego matematyka Johna H. Conwaya. Ten automat miał kiedyś swój fanklub wśród naukowców i studentów USA. W konkursie na konfigurację komórek, która będzie rosła nieskończenie, zwyciężyła w listopadzie 1970 grupa z MIT, publikując "działo szybowcowe" i zgarniając nagrodę w wysokości 50 dolarów amerykańskich. W *Life* można widzieć model żyjącego środowiska; w użyciu jest terminologia "żywych" i "martwych" komórek. Ale jest to automat uniwersalny, czyli zdolny do każdej operacji logicznej.

- AK weszły do bibliotek fizyków na początku lat 80-tych. Jednym z głównych popularyzatorów tej idei był Stephen Wolfram, znany jako twórca pakietu Mathematica. Próbował on również sklasyfikować AK — gdyby się ten zamiar powiódł, można by mówić o klasyfikacji **wszystkich** dyskretnych procesów dynamicznych.

Literatura

[1] S.Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.

[2] A.Ilachinski. *Cellural Automata. A Discrete Universe*. World Scientific, 2001.

[3] K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000.

[4] A.Bunde, S.Havlin (eds.) *Fractals and Disordered Systems*. Springer, 1996.

[5] S.Wolfram. *Cellural Automata and Complexity. Collected Papers*. Adison-Wesley, 1994.

[6] D.Stauffer. W: *J. Phys.* A24.909 (1991).

[7] H.Gutowitz (ed.) *Cellular Automata. Theory and Experiment*. MIT Press, 1991.

[8] T.Toffoli, N.Margolus. *Cellural Automata Machines*. MIT Press, 1987.

[9] E.Bienenstock, F.Fogelman-Soulié, G.Weisbuch (eds.) *Disordered Systems and Biological Organization*. Springer-Verlag, 1986.

[10] S.Wolfram. *Theory and Applications of Cellural Automata*. World Scientific, 1986.

[11] S.Wolfram. W: *Rev. Mod. Phys.* 55.601 (1983).

[12] S.Wolfram. „testpaper”. W: *Journal of Ho Yinsen* 55.601 (1983), s. 700–721. ISSN: 0950-1207.

[13] E.R.Berlekamp, J.H.Conway, R.K.Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. New York: Academic, 1982.

Opowieść 2

Skala trudności

— Oczywiście, nadrektorze. Ale zdaje pan sobie chyba sprawę, że odnalezienie go może nam zabrać całe lata?
— Ehm... — wtrącił Myślak. — Gdybyśmy odszyfrowali jego sygnaturę thaumiczną, HEX poradziłby sobie z tym w jeden dzień.
Dziekan rzucił mu gniewne spojrzenie.
— To nie jest magia — burknął. — To... mechanika!

[Terry Pratchett, *Ciekawe czasy*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2003)]

Maszyna Turinga

Deterministyczna maszyna Turinga składa się:

- z **modułu sterującego** mogącego się znajdować w jednym ze skończonej ilości stanów w danej chwili,
- **głowicy** czytająco-piszącej,
- **taśmy** będącej układem pamięciowym podzielonym na jednostki i prawostronnie nieskończonym,

i może być traktowana jako **model** każdego obliczenia sekwencyjnego.

Każde obliczenie można przedstawić poprzez siedem elementarnych operacji, tworzących język Turinga–Posta mogący realizować dowolne możliwe obliczenia. Np. `DRUKUJ-0` — ma kod 000, `DRUKUJ-1` — ma kod 001, `IDŹ-W-LEWO` — ma kod 010, aż `STOP` — ma kod 100. Tym sposobem, wszystkie możliwe algorytmy (a między nimi i dowody twierdzeń) można ustawić w ciąg i ponumerować — tworzą one zbiór przeliczalny.

Swój numer ma również sama maszyna Turinga — czyli algorytm odczytujący i wykonujący dowolny zadany algorytm.

Twierdzenie Gödla

- Swój numer ma nawet dowód, że niektórych algorytmów **nie ma** na liście — inaczej mówiąc, nie istnieją.
- **Nie istnieją więc dowody niektórych twierdzeń!** Można je wypowiedzieć, ale niesposób udowodnić.
- Ta teza jest treścią słynnego twierdzenia Gödla, opublikowanego w 1931 roku: **"W ramach każdego formalizmu można wypowiedzieć twierdzenia, których nie można udowodnić w ramach tego formalizmu"**.
- Problem stopu: Czy dla danego programu Turinga–Posta P, można za pomocą obliczenia sprawdzić czy dla pewnej danej tego programu, program P zatrzyma się jeśli obliczenie programu P zostało rozpoczęte z tą daną?
- Problem stopu i inne problemy tej klasy nazywamy **nierozwiązywalnymi** bądź **nierozstrzygalnymi** (undecidable).

- Inną kategorię trudności stanowią problemy w zasadzie rozwiązywalne, których czas rozwiązywania jest jednak bardzo długi.
- Problem komiwojażera: dane są położenia N miast, które komiwojażer chce odwiedzić. W jakiej kolejności powinien je odwiedzać, jeśli w każdym musi być dokładnie jeden raz a całkowita droga powinna być najkrótsza?
- Czas wykonania takiego algorytmu jest proporcjonalny do $N!$, czyli rośnie z N szybciej, niż N^α, gdzie $\alpha \in \mathbb{N}$.
- Ta zależność czasu obliczeń od rozmiaru problemu może służyć do naiwnego rozróżnienia między problemami klasy P (polynomial) a problem klasy NP (non-polynomial). Te drugie są uważane za **praktycznie nierozwiązywalne** (intractable).
- Istnieje cała grupa problemów klasy NP które da się wzajemnie na siebie przetłumaczyć (w formalnej definicji problemy mają być wielomianowo redukowalne jeden w drugi) — tworzą one grupę problemów **NP-zupełnych** (NP-com).
- Gdy zaczynaliśmy dzisiejszy wykład problem komiwojażera był na liście problemów NP-com (P$\neq$NP)...

Porównanie czasów obliczeń problemów klasy P i klasy NP.

Typ	$N=10$	$N=20$	$N=40$	$N=60$
N	10^{-5} s	$2\cdot10^{-5}$ s	$4\cdot10^{-5}$ s	$6\cdot10^{-5}$ s
N^2	10^{-4} s	$4\cdot10^{-4}$ s	0.0016 s	0.0036 s
N^3	0.001 s	0.008 s	0.064 s	0.216 s
N^4	0.1 s	3.2 s	1.7 min.	13 min.
2^N	0.001 s	1 s	12.7 dni	36600 lat
3^N	0.059 s	58 min.	385500 lat	$1.2\cdot10^{15}$ lat

- Złożoność problemu definiuje się jako minimalną długość algorytmu jego rozwiązania.
- O nieprzewidywalności obliczeniowej mówimy, gdy algorytmu nie można skrócić: jedyną drogą uzyskania wyniku jest wykonanie obliczeń krok po kroku.

Na podstawie: [3].