Automaty komórkowe
v. 2.71828182845904523536028

http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/

Krzysztof Malarz

2 września 2019

Część I

Teoria

Opowieść 3

Definicje i inne kłamstwa

Elfy są przedziwne. Budzą zdziwienie.
Elfy są cudowne. Sprawiają cuda.
Elfy są fantastyczne. Tworzą fantazje.
Elfy są urocze. Rzucają urok.
Elfy są czarowne. Splatają czary.
Ich uroda powala. Strzałą.
Kłopot ze słowami polega na tym, że ich znaczenie może się wić jak wąż. A jeśli ktoś chce znaleźć węże, powinien ich szukać za słowami, które zmieniły swój sens.
Nikt nigdy nie powiedział, że elfy są miłe.
Elfy są złe.

[Terry Pratchett, *Panowie i damy*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2002)]

Deterministyczny automat komórkowy jest pojęciem matematycznym definiowanym poprzez:

- **sieć** komórek $\{i\}$ D-wymiarowej przestrzeni,
- zbiór $\{s_i\}$ **stanów** pojedynczej komórki — zwykle ten sam dla wszystkich komórek i k-elementowy,

- **regułę** F określającą stan komórki w chwili $t+1$ w zależności od stanu w chwili t tej komórki i komórek ją otaczających:

$$s_i(t+1) = F(\{s_j(t)\}), \text{ gdzie } j \in O(i)$$

i $O(i)$ jest otoczeniem i-tej komórki.

Do najpopularniejszych otoczeń na sieci 2-wymiarowej należy zaliczyć otocznie von Neumanna (1+4) i Moore'a (1+8).

Jeśli ponadto funkcja F zależy od zmiennej losowej, to automat nazywamy **probabilistycznym automatem komórkowym**.

Life Conwaya

- AK *Life* jest zdefiniowany na **dwuwymiarowej sieci kwadratowej**, a więc $D = 2$.
- Zbiór stanów każdej komórki zawiera tylko dwa elementy ($k = 2$), a mianowicie "1" i "0". Inaczej mówiąc, komórka jest "żywa" lub "martwa". Otoczeniem i-tej komórki w automacie *Life* są wszystkie komórki z nią sąsiadujące, a więc stykające się z nią krawędziami lub rogami (otoczenie Moore'a).
- Reguła tego automatu jest następująca:
  - jeśli w otoczeniu komórki (nie licząc jej samej) są w czasie t trzy komórki żywe, to w czasie $(t + 1)$ ta komórka jest żywa,
  - jeżeli w jej otoczeniu w czasie t są dwie komórki żywe, a ona sama również jest żywa, to pozostaje żywa również w czasie $t + 1$,
  - w pozostałych przypadkach jest ona martwa w czasie $t + 1$.
- *Life* jest AK deterministycznym.

Najprostsza notacja

- Jak widać, ważne parametry AK to:
  - wymiar sieci D,
  - ilość stanów pojedynczej komórki k,
  - oraz otoczenie.
- Często używanym parametrem jest promień r otoczenia. Dla automatu *Life* $r = 1$; argumentem funkcji F są tylko najbliższi sąsiedzi danej komórki.
- Często używaną notacją dla określenia całej rodziny automatów jest podanie dwóch liczb: (k, r). W tej notacji automat *Life* jest zapisany jako (2,1).
- Notacja ta nie jest precyzyjna: nie podaje wymiaru sieci, w związku z czym nie musi być jasne, czy np. dla automatu dwuwymiarowego otoczenie jest otoczeniem von Neumanna czy Moore'a. Niemniej często jej się używa zwłaszcza, gdy chodzi o automaty jednowymiarowe.

Elementarne AK

- Najdokładniej zbadaną rodziną automatów są jednowymiarowe ($D = 1$) automaty deterministyczne o dwóch stanach komórki ($k = 2$) i otoczeniu składającym się z najbliższych sąsiadów ($r = 1$) — zgodnie z najprostszą notacją te automaty oznaczamy jako (2,1).
- Argumentem funkcji F jest stan $2r + 1 = 3$ komórek, każda z nich może być w $k = 2$ stanach — funkcja F musi być więc określona dla $2^3 = 8$ różnych konfiguracji. Dla każdej z nich funkcja F może przyjmować $k = 2$ wartości. Można ją więc określić na $2^8 = 256$ sposobów.
- Za Wolframem te 256 jednowymiarowych AK nazywamy **elementarnymi**.

- Często określa się AK elementarny, podając wartości funkcji F stanów otoczenia w następującej kolejności:

111	110	101	100	011	010	001	000

- Do zdefiniowania reguły wystarczy więc podać ciąg ośmiu liczb "0" i "1" — tworzących w zapisie binarnym kolejny numer automatu elementarnego
- Np. automat $90_{\text{dec}} = 1011010_{\text{bin}}$ to automat o regule:

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0

- Między nami mówiąc 90_{dec} jest równoważny działaniu **XOR** na stanach sąsiadów komórki centralnej — jakby tego jeszcze było mało, to z jednej komórki "1" w morzu "0" generuje on fraktal: dywan Sierpińskiego...

konfiguracja

0000000000000000000000000000000000000000000000010000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000101000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000001000100000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000010101010000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000100000001000000000000
0000000000000000000000000000000000000000001010000010100000000000
0000000000000000000000000000000000000000010001000100010000000000
0000000000000000000000000000000000000000101010101010101000000000
0000000000000000000000000000000000000001000000000000000100000000
0000000000000000000000000000000000000010100000000000001010000000
0000000000000000000000000000000000000100010000000000010001000000
0000000000000000000000000000000000001010101000000000101010100000
0000000000000000000000000000000000010000000100000001000000010000
0000000000000000000000000000000000101000001010000010100000101000
0000000000000000000000000000000001000100010001000100010001000100
0000000000000000000000000000000010101010101010101010101010101010
0000000000000000000000000000000100000000000000000000000000000001
0000000000000000000000000000001010000000000000000000000000000010
0000000000000000000000000000010001000000000000000000000000000100
0000000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010
0000000000000000000000000001000000010000000000000000000000010000
0000000000000000000000000010100000101000000000000000000000101000
0000000000000000000000000100010001000100000000000000000001000100
0000000000000000000000001010101010101010000000000000000010101010
0000000000000000000000010000000000000001000000000000000100000000
0000000000000000000000101000000000000010100000000000001010000000
0000000000000000000001000100000000000100010000000000010001000000
0000000000000000000010101010000000001010101000000000101010100000
0000000000000000000100000001000000010000000100000001000000010000
0000000000000000001010000010100000101000001010000010100000101000
0000000000000000010001000100010001000100010001000100010001000100
0000000000000000101010101010101010101010101010101010101010101010
0000000000000001000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000010100000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000100010000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000001010101000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000010000000100000000000000000000000000000000000000000000
0000000000101000001010000000000000000000000000000000000000000000
0000000001000100010001000000000000000000000000000000000000000000
0000000010101010101010100000000000000000000000000000000000000000
0000000100000000000000010000000000000000000000000000000000000000
0000001010000000000000101000000000000000000000000000000000000000
0000010001000000000001000100000000000000000000000000000000000000
0000101010100000000010101010000000000000000000000000000000000000
0001000000010000000100000001000000000000000000000000000000000000
0010100000101000001010000010100000000000000000000000000000000000

Legalne AK

- Wśród AK elementarnych szczególne miejsce według Wolframa zajmują tzw. AK **legalne**, które:
    - zachowują stan próżni (quiescent state) $000 \rightarrow 0$, a więc nie generują drażniących oscylacji,
    - oraz wykazują symetrię: $F(001) = F(100)$ i $F(110) = F(011)$,

co daje $2^5 = 32$ legalne AK o regule typu:

$$\begin{array}{cccccccc} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \beta & \varepsilon & \delta & 0 \end{array}$$

Automaty głosujące

- Jeszcze mocniejszym żądaniem jest ograniczenie reguł do tzw. AK **głosujących** (liczących) dla których istotna jest tylko ilość "1" w otoczeniu:

$$\begin{array}{cccccccc} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ \alpha & \beta & \beta & \gamma & \beta & \gamma & \gamma & \delta \end{array}$$

- Tych automatów (nawet wraz z tymi które nie zachowują stanu próżni) jest tylko $2^4 = 16$.
- Sposób zapisu reguł takich automatów polega na
  - podaniu litery symbolizującej otoczenie: D=2, T=3, Q=4, H=8 i C=center,
  - oraz liczby, która oznacza ilość "1" w otoczeniu komórki, aby wartość reguły była "1".

- W tej konwencji otoczenie von Neumanna zapisuje się jako Q+C=V, zaś otoczenie Moore'a jako H+C=M.

- Np. dwuwymiarowy AK, który zwraca "1" wtedy gdy wśród najbliższych sąsiadów dwie komórki mają wartość "1" nosi nazwę Q2.

- Można też wyróżniać pojedyncze komórki: N, E, S, W.

- Inne notacje pozwalające kodować reguły automatu w formie ich nazw raczej trudno się przyjmują...

Literatura

[1] K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000.

[2] D.Stauffer. W: *J. Phys.* A24 (1991), s. 909.