Automaty komórkowe

v. 2.718281828459045235360287

http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/

Krzysztof Malarz

2 września 2019

Część I

Teoria

Opowieść 5

Odwracalność

Babcia i pani Plinge przeciskały się między przechodniami na ulicach, podążając w kierunku Mroków — części miasta tłocznej jak gniazdo gawronów, a pachnącej jak wysypisko śmieci. I odwrotnie.

[Terry Pratchett, *Maskarada*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2003)]

- generalnie $\longrightarrow$ nierozwiązywalne
- wyjątek stanowią AK 1D
- zasadnicza trudność: reguła AK jest funkcją stanu **kilku** komórek ale zwraca wartość **tylko jednej** komórki:

$$\begin{array}{ccc} \text{odwzr. lokalne} & \Rightarrow & \text{odwzr. globalne} \\ & & \Downarrow \\ (\text{odwzr. lokalne})^{-1} & \Leftarrow & (\text{odwzr. globalne})^{-1} \end{array}$$

Przykład: (2,1/2)

Np. rozważmy grupę AK (2,1/2), tzn. grupę automatów o dwóch stanach komórki sieci i zależności jej stanu w chwili $(t+1)$ tylko od jej stanu w chwili t jak i jej jednego (np. lewego) sąsiada:

Przykład automatu nr 7

11	10	01	00
0	1	1	1

Rodzina automatów (2,1/2)

nr AK	reguła	nr AK	reguła
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	10	1010
3	0011	11	1011
4	0100	12	1100
5	0101	13	1101
6	0110	14	1110
7	0111	15	1111

Takich AK jest tylko 16. Ale z góry można odrzucić te, które mają przewagę "1" nad "0" w regule bądź przewagę "0" nad "1". Z kolei, w części spośród pozostałych AK ewolucja komórki zależy tylko od stanu jednej z komórek otoczenia:

- 3, $yx \rightarrow \sim y$

11	10	01	00
0	0	1	1

- 5, $yx \rightarrow \sim x$

11	10	01	00
0	1	0	1

- 10, $yx \rightarrow x$

11	10	01	00
1	0	1	0

- 12, $yx \rightarrow y$

11	10	01	00
1	1	0	0

Te AK są z pewnością odwracalne — nawet można łatwo wskazać AK do nich odwrotne...

Pozostały więc do przebadania tylko dwa automaty z rodziny (2,1/2): 6 i 9.

- Metody, których sprawdzanie zależy od przyjętych warunków brzegowych (w skrócie w.b.).
- Dla periodycznych w.b. i skończonego rozmiaru sieci N można to zrobić w sposób wyczerpujący: jeśli znajdziemy dwie konfiguracje w następnym kroku dające jedną — automat jest nieodwracalny.
- Zasadnicza trudność $\rightarrow$ rozmiar sieci N.

- **Zasadnicza trudność $\rightarrow$ rozmiar sieci N.**

- Np. dla $N = 3$ i periodycznych w.b. mamy $2^N = 2^3 = 8$ stanów **układu**:

stan sieci:	111	110	101	100	011	010	001	000
6	000	101	011	110	110	011	101	000
9	111	010	100	001	001	100	010	111

Można się więc spodziewać, że jeśli lista stanów komórek zawiera k symboli, to otrzymamy $k!$ równoważnych automatów — wszystkie odwracalne lub wszystkie nieodwracalne.

- Zawsze jednak pozostaje wątpliwość, czy dla większego N reguła nie przestaje być bijekcją.

- Możemy więc jedynie być pewni wyniku negatywnego: jak jest nieodwracalny dla danego układu — to jest nieodwracalny w ogóle...

[K.Kułakowski, *Automaty komórkowe*, OEN AGH, Kraków 2000][1]

Rajski ogród

- Czy istnieją konfiguracje, które nigdy nie powstaną jako wynik działania danego automatu?
- Taka konfiguracja mogłaby być tylko stanem początkowym układu; ewolucja zgodna z regułami gry nigdy do niej nie powróci.
- Metoda szukania konfiguracji nieosiągalnej również zależy od przyjętych warunków brzegowych.

[E.Moore, *Proc. Symp. Appl. Math.* **14** (1962) 17][3]

Przykład: *Life*

Spróbujmy np. oszacować minimalny rozmiar układu, dla którego **istnieje** konfiguracja nieosiągalna:

- Idea rachunków zasadza się na porównaniu liczby N_w **wszystkich** stanów wyjściowych z liczbą N_o stanów **otrzymanych** pod działaniem automatu.
- Jeśli $N_w > N_o$, to *istnieją* konfiguracje, których nie można otrzymać...
- Rozważmy układ składający się z $M \times M$ kwadratów 5×5.
- Liczba stanów takiej sieci wynosi $(2^{25})^{M^2}$.

- Załóżmy, że jeden z kwadratów 5×5 składa się wyłącznie z martwych komórek.

- Taki stan jest równoważny stanowi, w którym taki kwadrat zastąpimy kwadratem 5×5 z dokładnie jedną żywą komórką centralną w tym sensie, że **w następnym kroku** oba te stany wybranego kwadratu 5×5 dają ten sam stan końcowy **całego układu**.

- Tak więc wystarczy rozważać

$$(2^{25} - 1)^{M^2} = 2^{24.999999957004337\ldots \cdot M^2} (= N_o)$$

z 2^{25M^2} konfiguracji układu $5M \times 5M$.

- Rozważmy "środkową" część takiego kwadratu z kwadratów: $(5M-2)\times(5M-2)$

- Część ta posiada dokładnie $N_w = 2^{(5M-2)^2}$ dostępnych stanów.

- Tak więc w sytuacji, gdy

$$24.999999957004337\ldots \cdot M^2 < 25M^2 - 20M + 4$$

  część z konfiguracji **nie** będzie miała swojego poprzednika!

- $M > 2315816000$.

Poszukiwanie "rajskiego ogrodu" jako drogi do badania odwracalności automatu jest wolna od wad metody wyczerpującej.

Symetria T

- Rozszerzmy regułę F AK w sposób następujący:

$$s(t+1) = [F(\{s(t)\}) - s(t-1)].\mathbf{MOD}.k$$

- Tak skonstruowane AK są nie tylko odwracalne, ale i sekwencje stanów przejawiają symetrię względem odbicia w czasie: wystarczy zmienić kolejnością dwa następujące po sobie stany całego układu, a dalszy rozwój układu opisany tymi regułami będzie polegał na cofaniu się w czasie [G.Y.Vichniac, *Physica* **D10** (1984) 96][2].

- Istnieją AK odwracalne, które tej symetrii nie wykazują: warunek symetrii T jest silniejszy od warunku odwracalności.

- **Istnieją AK odwracalne, które tej symetrii nie wykazują: warunek symetrii T jest silniejszy od warunku odwracalności.**

- Np. 6R:

$t-1$:	1	0	1	0	1	0	1	0
t:	11	11	10	10	01	01	00	00
$t+1$:	1	0	0	1	0	1	1	0

- Już z samej tabeli widać symetrię T: zmieniając jej pierwszy wiersz z trzecim, otrzymamy tą samą regułę.

- Można automat 6R sprowadzić do automatu, który nie wymaga pamięci o poprzednich stanach komórki — ceną, jaką trzeba zapłacić, jest rozszerzenie stanów komórki o tą właśnie informację: 11, 10, 01, 00 = 3, 2, 1, 0.
- Taka reguła wykazuje pewną nadmiarowość: nie odróżnia stanu 3X od 1X oraz stanu 2X od 0X.

33	32	31	30	23	22	21	20	13	12	11	10	03	02	01	00
3	0	2	1	2	1	3	0	3	0	2	1	2	1	3	0

[K.Kułakowski, *Automaty komórkowe*, OEN AGH, Kraków 2000][1]

Literatura

[1] K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000.

[2] G.Y.Vichniac. W: *Physica* D10 (1984), s. 96.

[3] E.Moore. W: 14 (1962), s. 17.