Automaty komórkowe

v. 2.71828182845904523536028

http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/

Krzysztof Malarz

2 września 2019

Część I

Teoria

Liniowość i iniektywność AK

- Zastanawiałem się tylko, nic więcej. Prawdopodobnie wszyscy to wiedzą, prawdopodobnie pytając, wychodzę na głupca, prawdopodobnie jest to rzecz powszechnie znana...

[Terry Pratchett, *Wiedźmikołaj*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2004)]

- Reguły AK (2,1) liniowych spełniają zasadę superpozycji:

$$F(xyz.\mathbf{XOR}.uvw) = F(xyz).\mathbf{XOR}.F(uvw)$$

- $x.\mathbf{XOR}.y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- Dla określenia liniowego AK wystarczy podać regułę dla trzech konfiguracji otoczenia tworzących tzw. *bazę*.

- Np. (100), (010) i (001) tworzą bazę bo można z nich i operacji **XOR** odtworzyć wszystkie stany otoczenia:

000	100.**XOR**.100
001	001
010	010
011	010.**XOR**.001
100	100
101	100.**XOR**.001
110	100.**XOR**.010
111	100.**XOR**.010.**XOR**.001

- Wartość reguły dla trzech bazowych konfiguracji otoczenia na $k^3 = 8$ sposobów.

- Łatwo je otrzymać jeden po drugim podstawiające "0" i "1" za $F(001)$, $F(010)$ i $F(100)$ a następnie korzystać z definicji AK liniowego. Są nimi automaty: 0_{dec}, 60_{dec}, 90_{dec}, 102_{dec}, 150_{dec}, 170_{dec}, 204_{dec} i 240_{dec}:
  - 0 jest automatem produkującym "0" bez względu na stan otoczenia,
  - 60_{dec}, 90_{dec} i 102_{dec} są równoważne regule $x.\mathbf{XOR}.y$, $x.\mathbf{XOR}.z$ oraz $y.\mathbf{XOR}.z$,
  - 150_{dec} odpowiada $x.\mathbf{XOR}.y.\mathbf{XOR}.z$,
  - 170_{dec} i 240_{dec} przesuwają całą sieć w lewo i prawo o jedną komórkę,
  - 204_{dec} to transformacja identycznościowa.

Iniektywność

Reguła AK jest **iniektywna** w $(i+k)$-tej składowej (gdzie $k=-r,\dots,r$),

jeśli

dla każdego stanu otoczenia $(x_{i-r},\dots,x_{i+r})$ reguła jest jedno–jednoznacznym odwzorowaniem:

$$x_{i+k} \Leftrightarrow F(x_{i-r},\dots,x_{i+r})$$

, gdy pozostałe x_{i+j} (dla $j\neq k$) są stałe.

- 15: $\begin{array}{cccccc} 100 & 101 & 110 & 111 & \to & 1 \\ 000 & 001 & 010 & 011 & \to & 0 \end{array}$
  jest iniektywna w $(i-1)$ składowej.

- 150: jest iniektywny we wszystkich trzech składowych:
  - w $(i-1)$, bo:

$$
\begin{array}{cccccc}
110 & 000 & 101 & 011 & \rightarrow & 0 \\
010 & 100 & 001 & 111 & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

  - w i, bo:

$$
\begin{array}{cccccc}
110 & 000 & 101 & 011 & \rightarrow & 0 \\
100 & 010 & 111 & 001 & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

  - w $(i+1)$, bo:

$$
\begin{array}{cccccc}
110 & 000 & 101 & 011 & \rightarrow & 0 \\
111 & 001 & 100 & 010 & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

Każdy liniowy automat jest iniektywny w przynajmniej jednej składowej, lub jest równy zero.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, np. 30:

$$\begin{array}{cccccc} 000 & 101 & 110 & 111 & \rightarrow & 0 \\ 100 & 001 & 010 & 011 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

jest iniektywny w $(i-1)$ składowej a nie jest liniowy, bo:

$$0 = F(101) = F(110.\mathbf{XOR}.011) \neq$$
$$\neq F(110).\mathbf{XOR}.F(011) = 0.\mathbf{XOR}.1 = 1.$$

Sekwencje aperiodyczne

- Reguła AK pozwala na generacje ciągu $s_i(t)$ stanów pojedynczej komórki, lecz nie potrafimy odkryć żadnej prawidłowości.
- Podobnie jak w eksperymencie fizycznym, mamy więc generator liczb prawdziwie losowych.
- Np. AK 90_{dec}, czyli reguła **XOR** zdefiniowana na stanach sąsiadów:

  $$s_i(t+1) = s_{i-1}(t).\mathbf{XOR}.s_{i+1}(t)$$

  mamy

  $$s_i(t) = s_{i-t}(0).\mathbf{XOR}.s_{i+t}(0)$$

  , co wiąże się z jego liniowością.

- Jeśli przyjrzymy się stanom centralnej komórki, widać, że nie może być ona periodyczną funkcją czasu, gdyż napotykamy dowolnie długie ciągi "0". Jest to tzw. sekwencja *aperiodyczna*.
- Zdolność automatów do generowania sekwencji aperiodycznych określa twierdzenie: Jeżeli reguła jest iniektywna w $(i+1)$ składowej i konfiguracja (100) daje "1", lub jeśli reguła jest iniektywna w $(i-1)$ składowej i konfiguracja (001) daje "1", to dla dowolnych skończonych warunków początkowych może istnieć najwyżej jedna sekwencja periodyczna.
- Niektóre automaty nieliniowe potrafią "naśladować" AK 90_{dec}, jeśli pozbawimy stan początkowy niektórych skończonych konfiguracji. Taką operację określa się czasem jako *linearyzację* AK, chociaż właściwie powinno się mówić o linearyzacji sieci...

[K.Kułakowski, *Automaty komórkowe*, OEN AGH, Kraków 2000][1]

Literatura

[1] K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000.