Automaty komórkowe
v. 2.718281828459045235360287

http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/

Krzysztof Malarz

2 września 2019

Część I

Teoria

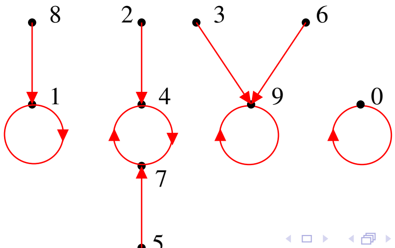
Pochodna dyskretna

Nadeszła chyba właściwa chwila, by — dla uzyskania ciągłości akcji i późniejszych wydarzeń — poinformować, że największy matematyk świata Dysku leżał w tej chwili i spokojnie jadł kolacje. Interesujące jest to, że ze względu na swoją przynależność gatunkową, matematyk jadł na kolację swój obiad.

[Terry Pratchett, *Piramidy*, Prószyński i S-ka (Warszawa 1998)]

Zapis odwzorowań na zbiorach skończonych

- Odwzorowania F **skończonych** zbiorów X **na siebie** dadzą się przedstawić w postaci grafów.
- Np. dla zbioru 10 punktów jedno z takich odwzorowań można przedstawić jako:



- Ponieważ zbiór jest skończony, “ścieżka” może kończyć się albo w cyklu granicznym, albo w punkcie stałym (czyli cyklu granicznym o długości 1).

- Baza wektorowa:

$$\hat{e}_j = \begin{bmatrix} e_j^1 \\ e_j^2 \\ \vdots \\ e_j^N \end{bmatrix}$$

, gdzie $e_j^i = \delta_{ij}$ dla $j = 1, \ldots, N$ (symbol/delta Kroneckera).

- Każdemu odwzorowaniu można przyporządkować **macierz odwzorowania**:
  - jeśli punkt i ma przejść w punkt j, to w j-tym wierszu w i-tej kolumnie musi się pojawić "1",
  - ponieważ punkt i może przejść tylko w jeden stan, więc w i-tej kolumnie może się pojawić **dokładnie** jedna "1",
  - ponieważ w j-ty stan może przechodzić więcej niż jeden stan, więc w j-tym wierszu może być więcej "1",
  - ponieważ niektóre stany mogą być tylko stanami początkowymi — niektóre wiersze mogą mieć same "0".

- Np. dla “naszego” odwzorowania z grafu mamy macierz $\mathbf{A}(F)$ postaci:

$$\mathbf{A}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Generalnie, nie ma sposobu na skrócenie dowolnego przepisu: u nas akurat przepis jest taki:
  1. numer punktu podnieś do kwadratu,
  2. cyfry użyte do zapisu wyniku dodaj do siebie,
  3. jeśli wynik jest większy niż 9, idź do (2).
- Wprowadzenie liczb $0 \dots 9$ ułatwiło nam sprawę — generalnie jednak możemy je uznać za symboliczny zapis **stanów układu**, którego komórki sieci mają tylko $k = 2$ stany: "0" i "1" (zmienne *Boole'a*).
- Zbiór stanów układu o rozmiarze N jest wówczas iloczynem kartezjańskim N zbiorów $\{0, 1\}$.
- Elementem takiego zbioru jest ciąg N "0" i "1".

- Jest 2^N takich ciągów — każdy z nich może być uważany za wierzchołek n-kostki w n-wymiarowej przestrzeni ($n = 2^N$).

- Odwzorowanie $F : X \ni \vec{x} \to F(\vec{x}) = \vec{y} \in X$ można przedstawić (choć nie zawsze wiadomo jak) w postaci:

$$\begin{array}{cl} y_1 & = f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ y_2 & = f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots & \\ y_{N-1} & = f_{N-1}(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ y_N & = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{array},$$

, gdzie $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N)$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_N)$

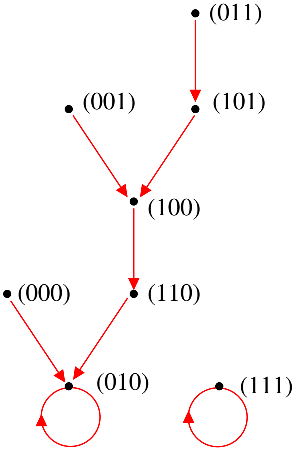
- **Macierz zależności B** odwzorowania F: $\mathbf{B}(F) = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } f_i \text{ nie zależy od } x_j \\ 1 & \text{gdy } f_i \text{ zależy od } x_j \end{cases}$$

- Macierz $\mathbf{B}(F)$ nie daje pełnej informacji o odwzorowaniu F: na jej podstawie nie można odtworzyć F, ale za to jest to macierz $N \times N$ zamiast $2^N \times 2^N$ (jak to było w przypadku macierzy odwzorowania $\mathbf{A}(F)$).
  Np. dla $X = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$ i F danej przepisem:

$$\begin{cases} y_1 & = x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_3 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 & = x_1 + \bar{x}_3 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 & = x_2 \cdot x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

- Funkcja F w postaci grafu:

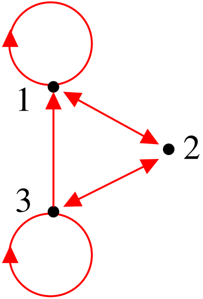


- Na tej podstawie można podać również macierz $\mathbf{A}(F)$.

- Natomiast macierz $\mathbf{B}(F)$ dla tego odwzorowania ma postać:

$$\mathbf{B}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Macierz zależności $\mathbf{B}(F)$ można też przedstawić w postaci **grafu połączeń**, pokazującego od których zmiennych x_i zależy y_i:



Boole'owska odległość wektorowa

- Dla dwóch punktów $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ definiujemy odległość:

$$\vec{d}(\vec{x}, \vec{y}) = (\delta(x_1, y_1), \delta(x_2, y_2), \ldots, \delta(x_N, y_N)),$$

, gdzie

$$\delta(x_i, y_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_i = y_i \\ 1 & \text{dla } x_i \neq y_i \end{cases}$$

Odległość ta jest **wektorem**!

- Odległość Hamminga można otrzymać, sumując elementy tego wektora.

- Odległość ta spełnia aksjomaty (przyzwoitej) odległości, tj.:
  - $\vec{d}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$
  - $\vec{d}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{d}(\vec{y},\vec{x})$
  - $\vec{d}(\vec{x},\vec{z}) \leqslant \vec{d}(\vec{x},\vec{y}) + \vec{d}(\vec{y},\vec{z})$

  W trzecim aksjomacie $+$ jest oczywiście boolowskie, natomiast nierówność jest spełniona **dla każdej składowej z osobna**.

- Przy okazji, jedno twierdzenie...

$$\vec{d}(F(\vec{x}),F(\vec{y})) \leqslant \mathbf{B}(F)\cdot\vec{d}(\vec{x},\vec{y}),$$

  , gdzie $\mathbf{B}(F)$ jest macierzą zależności funkcji F.

- ... no i może jeszcze jedno:

$$\mathbf{B}(E \circ F) \leqslant \mathbf{B}(E) \cdot \mathbf{B}(F)$$

- Sąsiedztwo: Każdemu (z $n = 2^N$) wierzchołków n-kostki $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ możemy przypisać N jego sąsiadów:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (\bar{x}_1, x_2, \ldots, x_N)\\ \tilde{x}_2 &= (x_1, \bar{x}_2, \ldots, x_N)\\ &\vdots\\ \tilde{x}_N &= (x_1, x_2, \ldots, \bar{x}_N)\end{aligned}$$

- Np. dla $N = 3$ sąsiadami punktu (0,1,1) są (1,1,1), (0,0,1) i (0,1,0) — nazwa jest więc geometrycznie całkiem uzasadniona.

Pochodna Boole'a

- Pochodna dyskretna: odwzorowanie F w punkcie $\vec{x} \in \{0,1\}^N$ jest macierzą Boole'a $N \times N$ o wyrazach:

$$f'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \neq \\ & \neq f_i(x_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_N) \\ 0 & \text{gdy } f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = \\ & = f_i(x_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_N) \end{cases}$$

- Innymi słowy, $f'_{ij}(\vec{x}) = 1$, gdy $f_i(\vec{x}_j) \neq f_i(\tilde{x}_j)$; i $f'_{ij}(\vec{x}) = 0$ w przeciwnym wypadku, dla $i, j = 1, \dots, N$.

- Np.: $N = 2$, $X = \{0,1\} \times \{0,1\}$ i F dana przepisem:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + \bar{x}_2$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot \bar{x}_2$$

W punkcie $\vec{x} = (1,0)$ mamy dwóch sąsiadów: $\tilde{x}_1 = (0,0)$ oraz $\tilde{x}_2 = (1,1)$

- Dla sąsiada $\tilde{x}_1$ mamy:

$$\left.\begin{array}{r} f_1(\vec{x}) = 1 \\ f_1(\tilde{x}_1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_{11} = 0$$

oraz

$$\left.\begin{array}{r} f_2(\vec{x}) = 1 \\ f_2(\tilde{x}_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_{21} = 1$$

- Dla sąsiada $\tilde{x}_2$:

$$\left.\begin{array}{r} f_1(\vec{x}) = 1 \\ f_1(\tilde{x}_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_{12} = 0$$

oraz

$$\left.\begin{array}{r} f_2(\vec{x}) = 1 \\ f_2(\tilde{x}_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_{21} = 1$$

Czyli pochodna funkcji F w punkcie (1,0) jest:

$$\mathbf{F}'(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i należy ją chyba sobie kojarzyć raczej z pochodną kierunkową.

- Mając pochodną funkcji F w punkcie $\vec{x}$, możemy odtworzyć wartości funkcji F dla sąsiadów $\vec{x}$: dla sąsiada $\tilde{x}_1$ funkcja $F(\tilde{x}_1)$ powinna różnić się od $F(\vec{x})$ tam, gdzie w pochodnej są jedynki, a więc $F(\tilde{x}_1) = (1, 0)$ a $F(\tilde{x}_2) = (1, 0)$.

- Np.: załóżmy, że przy $N = 3$ wartość funkcji F w (0,1,1) wynosi $F(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$, zaś pochodna w tym punkcie:

$$\mathbf{F}'(0,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wówczas można odtworzyć wartość funkcji F dla wszystkich N sąsiadów (0,1,1): $F(\tilde{x}_1) = (0, 1, 0)$, $F(\tilde{x}_2) = (1, 0, 1)$ i $F(\tilde{x}_3) = (0, 0, 0)$.

- Twierdzenie:

$$\forall \vec{x} \in \{0,1\}^N \ \forall \vec{y} \in \{\tilde{x}_i\}_{i=1,\dots,N} : \\ \vec{d}(F(\vec{x}), F(\vec{y})) = \mathbf{F}'(\vec{x}) \vec{d}(\vec{x}, \vec{y})$$

- Twierdzenie: Jeżeli $\mathbf{B}(F)$ — macierz zależności odwzorowania F, $\vec{x} \in \{0,1\}^N$, to:

$$\forall \vec{x} : \ \mathbf{F}'(\vec{x}) \leqslant \mathbf{B}(F)$$

  oraz

$$\sup_{\vec{x}} \{\mathbf{F}'(\vec{x})\} = \mathbf{B}(F)$$

  (tu kres górny jest równy maksimum).

- Jedną z nadziei, jaką fizycy wiązali z AK, była próba przełożenia języka równań różniczkowych na formalizm AK — stąd cały ten dość egzotyczny aparat matematyczny.
- Niestety, tu akurat AK nie spełniły pokładanych w nich nadziei — aparat zaś pozostał...

[K.Kułakowski, *Automaty komórkowe*, OEN AGH, Kraków 2000][1]

Literatura

[1] K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000.