Automaty komórkowe
v. 2.718281828459045235360287

http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/

Krzysztof Malarz

2 września 2019

Część I

Teoria

Samozorganizowany stan krytyczny

Większość mieszkańców Lancre, jak mówi stare powiedzenie, kładzie się spać z kurami a wstaje z krowami *.

——

* Ehm. To znaczy, że kładą się do łóżek o tej samej porze, kiedy zasypiają kury, a wstają o tej samej porze, kiedy wstają krowy. Takie nieprecyzyjne sformułowania mogą prowadzić do nieporozumień.

[Terry Pratchett, *Maskarada*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2003)]

Self-Organized Criticality (SOC) = dalekie od równowagi stany uporządkowane. Jest to taki stan krytyczny, do którego prowadzą ośrodek rozchodzące się w nim zaburzenia. Gdy go już do niego doprowadzą, ośrodek pozostaje w SOC; jest to więc stan stabilny mimo dowolnie dużych (krytycznych) fluktuacji.

SOC wymaga ośrodka co najmniej dwuwymiarowego: w ośrodku jednowymiarowym fluktuacje są zawsze skończone, ponieważ istnieje skończone prawdopodobieństwo zatrzymania każdej fluktuacji. Istnieje skończone prawdopodobieństwo dowolnie wysokiej bariery, a więc gdzieś na nieskończonej osi taka bariera istnieje.

SOC w piasku

Wyobraźmy sobie stertę suchego piasku, uzupełnianą w sposób ciągły przez dosypywanie go z góry wąską strużką.

- Nachylenie ścian utworzonego w ten sposób stożka fluktuuje wokół pewnej wielkości krytycznej.
- Same fluktuacje mają zaś postać lawin, schodzących w nieprzewidywalnych momentach i mających nieprzewidywalne rozmiary.
- Rozkład odstępów czasu między lawinami:

  $$P(T) \propto T^{-\alpha}$$

  może być użyty do otrzymania:

  $$P(f = 1/T) \propto f^{-2+\alpha}.$$

- Wynik eksperymentu komputerowego dla układu 3D brzmi: $\alpha = 0.94$. Modelowa sterta piasku opisuje zjawisko szumu $1/f$.

- Numeryczne badanie rozkładu rozmiaru s lawin:

$$P(s) \propto s^{-\tau}$$

  dają dla układu 3D $\tau = 1.37$. Reguły automatu były takie, że lawina zaczynała się obsypywać, gdy przekroczony został pewien kąt krytyczny $\rightarrow$ ziarno piasku przesuwało się wtedy o jedną komórkę $\rightarrow$ co mogło powodować przekroczenie kąta krytycznego w kolejnej komórce $\rightarrow$ itd.

- Kłopot — co robić gdy w danym punkcie spotykają się dwie lawiny (problem komutacji reguł AK)?

- Co gorsza, dla *rzeczywistej* sterty piasku, jeśli średnica podstawy sterty przekracza 1.5 cala teoria SOC przestaje działać — przewagę zyskują większe lawiny budzone pod powierzchnią zbocza.

Przykład numeryczny:

- Sterta piachu *bez* zdefiniowanej odległości między ziarnami: sąsiedzi są dobierani przypadkowo spośród wszystkich ziaren na zboczu, niezależnie od ich położenia.

- Jeśli ziarno piasku wyląduje na już zajętym miejscu, to uruchamiana jest lawina: oba ziarna są przenoszone w losowo wybrane miejsca dopóki wszystkie ziarna nie upadną w wolnych miejscach.

- Wtedy dostarczane jest do układu nowe ziarno z zewnątrz.

- Rozmiar lawiny s — to ilość uruchomionych ziaren między uzupełnieniami.
- Czas trwania lawiny t to ilość kroków czasowych między uzupełnieniami.
- Część położeń uważa się za brzeg stożka; ziarno, które tam upadnie, znika.
- W takim sformułowaniu znika również problem komutacji reguł: dla dużego układu jest małe prawdopodobieństwo spotkania się dwóch ziaren lądujących w tym samym położeniu.

K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000

SOC w *Life*

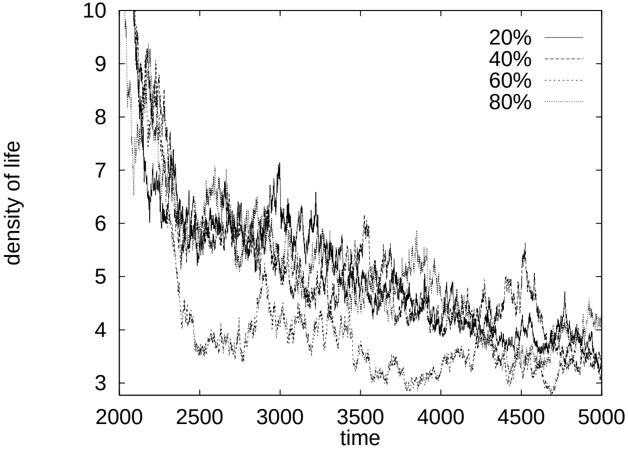
Reguły *Life*: śmierć z natłoku, jak i z samotności — można porównać do znanego równania logistycznego, z jego tłumiącą wzrost zależnością kwadratową (bądź członem Verhulsta):

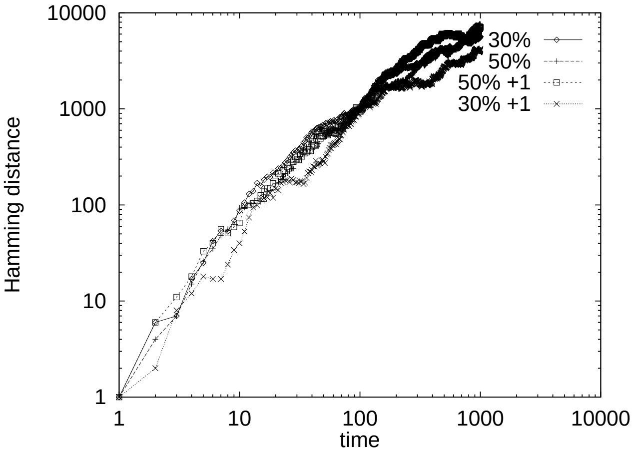
$$x_{t+1} = r \cdot x_t(1 - x_t).$$

- *Life* pozostawiony sam sobie zastyga w formie "skamielin" / "skamienieleń" (neo.) — małych izolowanych form statycznych bądź oscylujących z okresem 2.
- Niektóre z nich mogą się poruszać bez żadnych ograniczeń (np. szybowce).
- Czy przy pewnym rozmiarze układu reakcja szybowców ze skamienieleniami będzie się samopodtrzymywać?

- No, ale dla piasku sterta pozostaje w SOC tylko, jeśli się ją zasila piaskiem: SOC jest stanem *stacjonarnym* układu *otwartego*.
- Stan krytyczny oznacza, że zasięg rozchodzących się w nim zaburzeń jest nieograniczony.
- Można więc stwierdzić (stan) SOC, zaburzając układ otwarty i obserwując rozchodzące się w nim zaburzenia.
- Jeśli zasięg tego zaburzenia przekroczy rozmiar sieci, mamy do czynienia ze stanem krytycznym.
- Dla odpowiednio długich czasów odległość Hamminga między zaburzoną i niezaburzoną siecią $H(t) \propto t^{\mu}$, gdzie $\mu = 1.1 \pm 0.1$.

- Wynik jest nieco kontrowersyjny, gdyż *Life* jest uważany za AK klasy IV — dla klasyfikacji danego automatu istotne są warunki brzegowe.


10
9
8
7
6
5
4
3
density of life
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
time
20%
40%
60%
80%



K.Malarz et al. W: *Int. J. Mod. Phys.* C9 (1998), s. 449

Literatura

[1] K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000.

[2] K.Malarz et al. W: *Int. J. Mod. Phys.* C9 (1998), s. 449.