KSN — III FK — teoria 11
Szybka transformata Fouriera

Na funkcję $f(x)$ i jej fourierowską transformatę $F(u)$

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-iux) dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \exp(iux) du.$$

można (i należy) patrzeć jak na różne reprezentacje tej samej funkcji (można ewentualnie tu dodać: w przestrzeni i w przestrzeni do niej odwrotnej, np.: czas/częstotliwość, położenie/wektor falowy).

Efektywne, numeryczne wyznaczenie transformaty ($f(x) \to F(u)$) bądź oryginału ($F(u) \to f(x)$) odbywa się za pomocą algorytmu znanego pod nazwą *szybkiej transformaty Fouriera* (FFT).

Szybką transformatę Fouriera można wykorzystać do numerycznego obliczania całek typu

$$I^s = \int_a^b f(t) \sin(\omega t) dt, \qquad I^c = \int_a^b f(t) \cos(\omega t) dt, \tag{1}$$

które mogą być *trudne* do wyznaczenia tradycyjnymi metodami z poprzedniego zestawu ze względu na oscylacyjny charakter funkcji podcałkowej.

Wartości tych całek mogą jednocześnie posłużyć do znajdowania dyskretnej transformaty Fouriera funkcji $f(x)$

$$I^c(n) = a_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L} x\right) dx, \qquad I^s(n) = b_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L} x\right) dx, \tag{2}$$

a więc współczynników rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg trygonometryczny

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

W praktyce funkcja $f(x)$ zwykle jest stablicowaną wartością pomiarową $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots N$ a współczynniki (2) wyznacza się zastępując całki skończoną sumą.

W bibliotece *Numerical Recipes* użytkownik procedury
`SUBROUTINE dftint(func,a,b,w,cosint,sinint)`

liczącej całki (1) musi zatroszczyć się o przygotowanie procedury `func` zwracającej wartość funkcji $f(x)$. Wówczas `cosint` i `sinint` zawierają odpowiednio I^c i I^s.

Do wyznaczanie dyskretnej transformaty Fouriera służy procedura

`SUBROUTINE realft(data,n,isign).`

Przed jej użyciem proszę *wyjątkowo dokładnie* przeczytać jej opis — współczynniki a_n i b_n są zwracane w mało intuicyjnej kolejności a funkcja *musi* być stablicowana na $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) punktach.

Wyznaczanie transformat Fouriera wartości rzeczywistych jest realizowane w bibliotece *GSL* funkcjami:

`gsl_fft_real_transform`

`gsl_fft_real_radix2_transform`

Należy wybrać funkcję odpowiednią dla rozmiaru tablicy z danymi wejściowymi!

Dostępne są także funkcje liczące transformaty odwrotne – odpowiednio:

`gsl_fft_halfcomplex_inverse`

`gsl_fft_halfcomplex_radix2_inverse`

Krzysztof Malarz & Maciej Wołoszyn, Kraków, 12 stycznia 2004