

KSN — III FK — teoria 7

Równania różniczkowe zwyczajne

Większość praw fizyki (zarówno w mechanice klasycznej, kwantowej jak i w elektrodynamice) wyraża się matematycznie w języku równań różniczkowych (czasami cząstkowych) drugiego rzędu. Najprostszym sposobem rozwiązania zwyczajnego równania różniczkowe drugiego rzędu

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x))$$

jest przybliżenie lewej strony tego równań ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

a następnie iteracyjne wyznaczenie kolejnych wartości

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + (\Delta x)^2 \cdot f(x_i, y_i, y_{i-1})$$

o ile z warunków początkowych zna się wartości w $y(x=0) = y_0$ i $y(x=\Delta x) = y_1$...

Każde zwyczajne równanie różniczkowe n -tego rzędu można zamienić na równoważny mu układ n równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. I znów numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego postaci

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

zasadza się właściwie na zastąpieniu nieskończenie małych wielkości dy i dx po lewej stronie równania (1) przez skończone wartości Δy i Δx , pomnożeniu równania przez Δx , i potraktowaniu go jako iteracyjnego przepisu na znajdowanie wartości $y(x_{k+1})$ w punkcie $x_{k+1} = x_0 + (k+1)\Delta x$ w zależności od $y(x_k)$, kroku całkowania Δx i prawej strony równania (1). Przedstawiony powyżej schemat nosi nazwę *metody Eulera* rozwiązywania równań różniczkowych — i stanowi raczej konceptualny niż praktyczny wzorec postępowania.

W praktyce równania różniczkowe zwyczajne najczęściej rozwiązuje się korzystając:

- z metody *Rungego-Kutty* (czwartego rzędu),
- z metody „predyktor-korektor”,
- bądź z ekstrapolacji *Richardsona* (implementowanej metodą *Burlischa-Stoera*).

i to najczęściej jeszcze ze zmiennym (adaptacyjnym) krokiem całkowania.

W bibliotece *Numerical Recipes* jeden krok metody Rungego-Kutty czwartego rzędu jest zaimplementowany w procedurze `rk4` sukcesywnie wywoływanej przez procedurę `rkdumb`.

GNU Scientific Library (GSL) zawiera funkcję `gsl_odeiv_step_apply` realizującą pojedynczy krok wybranej przez nas metody, określonej w jednym z parametrów funkcji. Metodzie Rungego-Kutty czwartego rzędu odpowiada *Step Type*: `gsl_odeiv_step_rk4`.

Użycie zmiennego, adaptacyjnego kroku całkowanie umożliwia funkcja `gsl_odeiv_evolve_apply`.

Krzysztof Malarz & Maciej Wołoszyn, Kraków, 26 listopada 2003