KSN — III FK — zadanie 6.2

Iteracyjne rozwiązywanie układów równań liniowych

Jednym ze źrodeł układów równań algebraicznych mogą być równania różniczkowe. Dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t). \tag{1}$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania (1) drugą pochodną położenia x po czasie t w chwili t_i ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2x(t_i)}{dt^2} \approx \frac{x(t_i+\Delta t) - 2x(t_i) + x(t_i - \Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

i wprowadzając oznaczenia $\Delta t = h$, $x_i = x(t_i)$ otrzymujemy z równania (1) przepis wiążący ze sobą wartości x_{i+1}, x_i i x_{i-1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{2}$$

Do jednoznaczego rozwiązania potrzeba jeszcze infomacji o wartościach x_0 i x_1. Dają je warunki początkowe: $x_0 = A$ jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, zaś iloraz $(x_1 - x_0)/h = v_0$ informuje o początkowej wartości prędkości ciała.

Równanie (2) wraz z warunkami początkowymi daje się zapisać w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sytuacja jest więc wysoce komfortowa: $\mathbf{D} = \mathbb{1}$, $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, zaś $\mathbf{L}$ ma na pierwszej poddiagonali prawie same $(\omega^2h^2 - 2)$ i same jedynki na drugiej poddiagonali.

Iteracyjny przepis dla metody Jacobiego $\mathbf{x}^{(n+1)} = (\mathbb{1} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ sprowadza się w tym przypadku do $\mathbf{x}^{(n+1)} = (\mathbb{1} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}$. Wzór roboczy metody Jacobiego przyjmuje więc postać:

$$x_i^{(n+1)} = \left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij} x_j^{(n)} \right),$$

co w praktyce oznacza konieczność używania **dwóch** wektorów x do przechowywania wartości rozwiązania z bieżącej i poprzedniej iteracji.

Chociaż metoda Jacobiego ma znaczenie wyłącznie dydaktyczne ze względu na bardzo wolną zbieżność proszę spróbować rozwiązać równanie oscylatora harmonicznego dla kilku pierwszych okresów drgań $t_{max} = kT = k \cdot 2\pi/\omega$.

Kilka uwag natury technicznej:

- Proszę przyjąć „wygodne” warunki początkowe, tj.: $v_0 = 0$, $A = 1$.
- Obliczenia proszę prowadzić w podwójnej precyzji.
- Krok całkowania $h = t_{\max}/10001$.
- 10^4 iteracji powinno całkowicie wystarczyć.

Krzysztof Malarz, Kraków, 22 października 2014