

## KSN — III FK — teoria 8

### Wektory i wartości własne

Liczbę  $\lambda$  nazywamy wartością własną macierzy  $\mathbf{A}$  (o rozmiarze  $N \times N$ ), zaś wektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  wektorem własnym stowarzyszonym z tą wartością własną  $\lambda$  jeśli

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad (1)$$

co jest równoważne warunkowi

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0. \quad (2)$$

Lewa strona ostatniego równania jest wielomianem stopnia  $N$ , którego pierwiastki są wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{A}$ .

W najogólniejszym przypadku większość algorytmów *próbuję* znaleźć komplet wartości i wektorów własnych — poprzez jej diagonalizację — a następnie oczekuje od użytkownika *sprawdzenia* jakości rozwiązania. Zazwyczaj byle macierz przed znalezieniem jej wartości i/lub wektorów własnych sprowadza się do postaci trójkątnej albo Hessenberga.

W bibliotece *Numerical Recipes* procedura `jacobi` znajduje wektory i wartości własne macierzy metodą Jacobiego.

```
SUBROUTINE jacobi(a,n,np,d,v,nrot)
  INTEGER n,np,nrot,NMAX
  REAL a(np,np),d(np),v(np,np)
  ...
END
```

Na „wyjściu” elementy `a` powyżej głównej diagonalnej zostają zniszczone. `d` zawiera wartości własne macierzy `a`, zaś kolejne kolumny macierzy `v` zawierają wektory własne macierzy `a` odpowiadające wartościom własnym zawartym w `d`. Wartości własne nie koniecznie są uporządkowane. Procedura `eigsrt` sortuje wartości własne zawarte w `d` i odpowiednio przestawia również kolumny w macierzy `v`.

Do znajdowania wektorów i wartości własnych rzeczywistych, symetrycznych macierzy trójkątnych dedykowana jest procedura `tqli`.

```
SUBROUTINE tqli(d,e,n,np,z)
  INTEGER n,np
  REAL d(np),e(np),z(np,np)
  ...
END
```

Macierz `d` zawiera główną przekątną, `e` — pierwszą pod- i naddiagonalę (dla macierzy symetrycznej są one takie same, `e(1)` może być dowolne — nie jest wykorzystywane). Odpowiednie kolumny macierzy `z` zawierają wektory własne odpowiadające wartościom własnym trzymanym w `d`. Uporządkowanie wektorów i wartości własnych znów można zapewnić przy użyciu procedury `eigsrt`.

Dowolną rzeczywistą ale symetryczną macierz do postaci trójkątnej sprowadza procedura `tred2`.

*Krzysztof Malarz, Kraków, 3 grudnia 2003*