Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 1

Literatura

- Mechanika, L.D. Landau, J.M. Lifszyc, PWN, 2006.
- Mechanika Klasyczna, tom 1 i 2, J.R. Taylor, PWN, 2008.
- Classical Dynamics of Particles and Systems, S.T. Thornton, J.B. Marion, Brooks Cole, 2003.
- Analytical Mechanics, N.A. Lemos, Cambridge, 2018.
- Classical Mechanics: Point Particles and Relativity, W. Greiner, Springer, 2003.
- Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics, W. Greiner, Springer, 2009.
- Classical Mechanics, H. Goldstein, Ch.P. Poole, J.L. Safko, Addison Wesley, 2001
- Introduction to Classical Mechanics, D. Morin, Cambridge, 2004.
- Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism, A. Deriglazov, Springer, 2010.
- Solved Problems in Lagrangian and Hamiltonian Mechanics, C. Gignoux, B. Silvestre-Brac, Springer, 2009.

$\Rightarrow$ http://home.agh.edu.pl/mariuszp

Mechanika Newtona (Sir Isaac Newton (1642-1727))

Prawa Newtona, (Principia, London, 1687)

1. Jeśli na ciało nie działa żadna siła (lub działające siły się równoważą) to ciało porusza się ze stałą prędkością (która może być równa zero).
   - definiuje pojęcie zerowej siły,
   - definiuje inercjalny układ odniesienia (jako taki w którym to prawa działa),
   - słuszne dla wszystkich cząstek jeśli słuszne dla chociaż jednej.
2. Szybkość zmian pędu ciała jest równa wypadkowej sile działającej na to ciało:
   $$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$
   - definiuje niezerową siłę $\vec{F} = m\vec{a}$ (słuszne tylko w układzie inercjalnym),
   - słuszne dla wszystkich cząstek, tzn. jeśli taka sama siła działa na dwie cząstki to ich przyspieszenia są związane relacją $a_1/a_2 = m_1/m_2$,
   - stwierdza, że $\vec{F} = m\vec{a}$, a nie np. $\vec{F} = m\vec{v}$ albo $\vec{F} = m\left(\mathrm{d}^3x/\mathrm{d}t^3\right)$.
3. Siły z jakimi działają na siebie wzajemnie dwa ciała są równe co do wartości i mają przeciwne zwroty.
   - postuluje zasadę zachowania pędu:
   $$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{\mathrm{d}t} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$
   - słuszne tylko dla sił działających wzdłuż linii łaczącej cząstki.

Całkowanie równań ruchu w postaci $m\ddot{x} = F(x,v,t)$

- Siła jest jedynie funkcją czasu, $F = F(t)$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t) \quad\Rightarrow\quad m\int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}v' = \int_{t_0}^{t} F(t')\mathrm{d}t' \quad\Rightarrow\quad v(t) = \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t) \quad\Rightarrow\quad \int_{x_0}^{x(t)} \mathrm{d}x' = \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t' \quad\Rightarrow\quad x(t) = \ldots$$

- Siła jest jedynie funkcją położenia, $F = F(x)$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(x) \quad\Rightarrow\quad m\int_{v_0}^{v(x)} v'\mathrm{d}v' = \int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \quad\Rightarrow\quad v(x) = \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x) \quad\Rightarrow\quad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x'}{v(x')} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \quad\Rightarrow\quad x(t) = \ldots$$

- Siła jest jedynie funkcją prędkosci, $F = F(v)$:

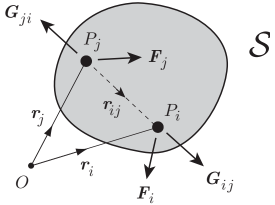
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v) \quad\Rightarrow\quad m\int_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v'}{F(v')} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \quad\Rightarrow\quad v(t) = \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t) \quad\Rightarrow\quad \int_{x_0}^{x(t)} \mathrm{d}x' = \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t' \quad\Rightarrow\quad x(t) = \ldots$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(v) \quad\Rightarrow\quad m\int_{v_0}^{v(x)} \frac{v'\mathrm{d}v'}{F(v')} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \quad\Rightarrow\quad v(x) = \ldots$$

Zasady zachowania dla układu cząstek - pęd

- Rozważmy układ N cząstek oddziałujących wzajemnie siłami $\vec{G}_{ij}$ oraz podlegających siłom zewnętrznym $\vec{F}_i$.
  Równanie ruchu i-tej cząstki ma postać:



$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{G}_{ij} + \vec{F}_i \qquad \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i = m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

- Twierdzenie: Jeśli wypadkowa siła zewnętrzna działająca na układ cząstek jest równa zero, to pęd układu jest zachowany.

  Sumujemy po wszystkich cząstkach układu:

$$\sum_i m_i\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \vec{G}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i = \left\{ \vec{G}_{ij} = -\vec{G}_{ji} \right\} = \sum_i \vec{F}_i \equiv \vec{F}_{\text{ext}}$$

  Definiując wektor wodzący $\vec{R}$ środka masy układu oraz całkowity pęd $\vec{P}$ układu, otrzymujemy:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \equiv \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} \quad \Rightarrow \quad M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \left\{ \vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt} \right\} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

  Jeśli $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ to środek masy układu porusza się ze stałą prędkością.

- Twierdzenie: Jeśli wypadkowy zewnętrzny moment siły działający na układ cząstek jest równy zero, to moment pędu układu jest zachowany.

Całkowity moment pędu względem punktu Q o wektorze wodzącym $\vec{r}_Q$:

$$\vec{L}_Q = \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_Q) \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,(Q)} \times \vec{v}_i^{\,(Q)}$$

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum\nolimits_i m_i \vec{v}_i^{\,(Q)} \times \vec{v}_i^{\,(Q)} + \sum\nolimits_i \vec{r}_i^{\,(Q)} \times \dot{\vec{p}}_i - \sum\nolimits_i m_i \vec{r}_i^{\,(Q)} \times \ddot{\vec{r}}_Q =$$

$$= \sum\nolimits_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \vec{r}_i^{\,(Q)} \times \vec{G}_{ij} + \sum\nolimits_i \vec{r}_i^{\,(Q)} \times \vec{F}_i - M(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q = \ldots$$

$$\left\{ \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \vec{r}_i^{\,(Q)} \times \vec{G}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \left[\vec{r}_i^{\,(Q)} \times \vec{G}_{ij} + \vec{r}_j^{\,(Q)} \times \vec{G}_{ji} \right] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{G}_{ij} = 0 \right\}$$

$$\ldots = \vec{N}_{\text{ext}}^{(Q)} - M(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q \quad \text{gdzie} \quad \vec{N}_{\text{ext}}^{(Q)} = \sum\nolimits_i \vec{r}_i^{\,(Q)} \times \vec{F}_i$$

Moment pędu względem początku układu ($\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,\prime} + \vec{R},\ \ \vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{V}$):

$$\vec{L} = \sum\nolimits_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum\nolimits_i \vec{r}_i^{\,\prime} \times \vec{p}_i^{\,\prime}$$

Zasady zachowania dla układu cząstek - całkowita energia

- Twierdzenie: Jeśli wszystkie siły działające na układ cząstek są zachowawcze, to całkowita energia układu $E = T + V$ jest zachowana.

  Całkowita energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej środka masy (tak jakby cała masa układu była skoncentrowana w tym punkcie) oraz energii kinetycznej wszystkich cząstek w ruchu względem środka masy:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i {v'_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \vec{V}\cdot\cancelto{0\ \text{(śr. masy)}}{\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}\,'_i}$$

  Praca wykonana przez wszystkie siły przy przejściu układu od stanu A do B:

$$W_{AB} = \sum_i \int_A^B \left(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i}\vec{G}_{ij}\right)\cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_A^B m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i\, dt =$$

$$= \sum_i \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \int_A^B dT = T_B - T_A$$

  Dla konserwatywnych sił zewnętrznych zachodzi ($\vec{\nabla}_i \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z_i}$):

$$\sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\int_A^B \sum_i \vec{\nabla}_i V^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_i = -\int_A^B dV^{\text{ext}} = V_A^{\text{ext}} - V_B^{\text{ext}}$$

Zasady zachowania dla układu cząstek - całkowita energia

Jeśli siły wewnętrzne G_{ij} zależą jedynie od wzajemnej pozycji $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ cząstek, to mogą być wyrażone za pomocą energii potencjalnej $V_{ij} = V_{ji}$:

$$\vec{G}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = +\vec{\nabla}_j V_{ij} = \vec{\nabla}_j V_{ji} = -\vec{G}_{ji}$$

Jeśli energia potencjalna zależy jedynie od odległości $s_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ pomiędzy cząstkami (siły centralne) to wtedy siły $\vec{G}_{ij}$ mają kierunek linii łączącej cząstki:

$$\vec{G}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(s_{ij}) = -\frac{\vec{r}_{ij}}{s_{ij}} V'_{ij}(s_{ij}) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{prim oznacza pochodną} \\ \text{po argumencie V}\end{array}\right)$$

Dla konserwatywnych sił wewnętrznych $\vec{G}_{ij}(\vec{r}_{ij})$ mamy:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \int_A^B \vec{G}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \int_A^B (\vec{G}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{G}_{ji} \cdot d\vec{r}_j)$$

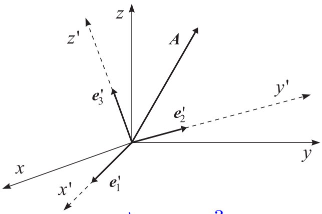
$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \int_A^B \vec{G}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \int_A^B \vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} V_{ij} \Big|_A^B$$

Podsumowując, przy przejście ze stanu A do B zachowana jest wielkość:

$$(T+V)_A = (T+V)_B \qquad \text{gdzie} \qquad V = V^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} V_{ij}$$

Rozważmy układ M obracający się względem układu inercjalnego L oraz dowolny, zależny od czasu, wektor

$$\begin{aligned}\vec{A}(t) &= A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 \\ &= A'_1\vec{e}'_1 + A'_2\vec{e}'_2 + A'_3\vec{e}'_3\end{aligned}$$

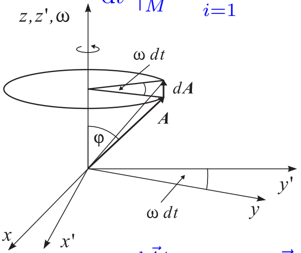


Szybkości zmian wektora $\vec{A}$ w czasie w obu układach związane są relacją:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_L = \frac{\mathrm{d}A'_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_1 + \frac{\mathrm{d}A'_2}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_2 + \frac{\mathrm{d}A'_3}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_3 + A'_1\dot{\vec{e}}'_1 + A'_2\dot{\vec{e}}'_2 + A'_3\dot{\vec{e}}'_3 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_M + \sum_{i=1}^{3} A'_i\dot{\vec{e}}'_i$$

Ponieważ $\vec{e}'_i \cdot \dot{\vec{e}}'_i = 0$ więc można zapisać:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}'_1 &= a_1\vec{e}'_2 + a_2\vec{e}'_3 \ \ / \cdot \vec{e}'_2 \ \ \Rightarrow \ \ \dot{\vec{e}}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = a_1 \\ \dot{\vec{e}}'_2 &= a_3\vec{e}'_1 + a_4\vec{e}'_3 \ \ / \cdot \vec{e}'_1 \ \ \Rightarrow \ \ \dot{\vec{e}}'_2 \cdot \vec{e}'_1 = a_3 \\ \dot{\vec{e}}'_3 &= a_5\vec{e}'_1 + a_6\vec{e}'_2\end{aligned}$$



Ponieważ $\dot{\vec{e}}'_i \cdot \vec{e}'_j = -\dot{\vec{e}}'_j \cdot \vec{e}'_i$, dla $i \neq j$, więc $a_3 = -a_1,\ a_5 = -a_2,\ a_6 = -a_4$.

$$\mathrm{d}A = \omega \mathrm{d}t\, A \sin\phi \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_L = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_L = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_M + \begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_4 & -a_2 & a_1 \\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_M + \vec{C} \times \vec{A} \quad \text{gdzie} \quad \vec{C} = (a_4, -a_2, a_1) \equiv \vec{\omega}$$

Prawa Newtona w układzie nieinercjalnym

A więc dla dowolnego wektora $\vec{A}$ mamy: $$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_L = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

Przykład: Transformacje wektorów prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i położenia $\vec{r}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_L = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_M \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_L = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Transformacja wektora przyspieszenia do układu obracającego się:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_L = \left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_M + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_M \times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_M + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Ponieważ w układzie inercjalnym mamy $m\vec{a}_L = \vec{F}$, więc analogiczne równanie dla układu obracającego się ma postać:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

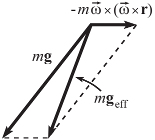
- siła azymutalna: $\vec{F}_{az} \equiv -m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}$

  Osoba stojąca w spoczynku na przyspieszającej karuzeli odczuwa siłę tarcia, która jest równoważona w układzie nieinercjalnym przez siłę azymutalną. Rzeczywistą siłą jest tylko siła tarcia.

Prawa Newtona w dowolnym układzie nieinercjalnym

- siła odśrodkowa: $\vec{F}_{od} \equiv -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

  Siła odpowiedzialna za efektywne przyspieszenie grawitacyjne.



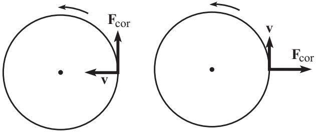
- siła Corriolisa: $\vec{F}_{cor} \equiv -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_M$

  Siła odczuwana przez osobę poruszającą się z prędkością $\vec{v}$ względem obracającej się karuzeli.

  (a) odpowiada za siłę tarcia konieczną do zmiany momentu pędu osoby w układzie Lab:

  0 (ruch wzdłuż promienia)

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\omega\right) = -2mr\omega v + mr^2 \cancel{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$

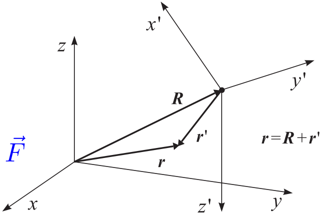


  (b) odpowiada za zrównoważenie dodatkowej siły tarcia koniecznej do ruchu po okręgu w Lab:

$$\vec{F}_t = \frac{m(V+v)^2}{r} = \frac{mV^2}{r} + \frac{2mVv}{r} + \frac{mv^2}{r}$$

Dla dowolnie (ruch translacyjny i obrotowy) poruszającego się układu nieinercjalnego mamy:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,' \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_L = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_L + m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_L = \vec{F}$$



Prawa Newtona w dowolnym układzie nieinercjalnym

II prawo Newtona w dowolnie poruszającym się układzie nieinercjalnym:

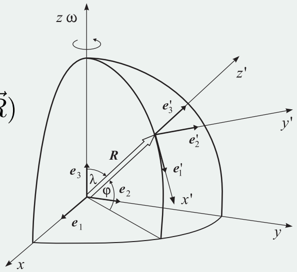
$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_M = \vec{F} - m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_L - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\bigg|_M \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_M - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

- siła translacyjna $\quad \vec{F}_{\mathrm{trans}} \equiv -m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$

Przykład: Swobodny spadek na wirującą Ziemię.

Ponieważ Ziemia obraca się ze stałą prędkości kątową $\vec{\omega}$, a wektor $\vec{R}$ nie zmienia się w układzie $x'y'z'$, więc:

$$\ddot{\vec{R}}|_L = \ddot{\vec{R}}_M + \dot{\vec{\omega}}|_M\times\vec{R} + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{R}}|_M + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$$



II PN ma więc postać:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

Wprowadzając efektywne przyspieszenie grawitacyjne:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^3}\vec{R} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$$

Prawa Newtona w dowolnym układzie nieinercjalnym, cd.

Przykład: Swobodny spadek na wirującą Ziemię, cd.

otrzymujemy $m\ddot{\vec{r}}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

Ponieważ ω^2 jest małe, więc mozemy zaniedbać ostatni wyraz, otrzymując:

$$\ddot{\vec{r}}' = -g\,\vec{e}_3' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Rozkładamy $\vec{\omega}$ na składowe w układzie $x'y'z'$: $\vec{\omega} = -\omega \sin\lambda\,\vec{e}_1' + \omega\cos\lambda\,\vec{e}_3'$

i obliczamy: $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = -\omega\dot{y}'\cos\lambda\,\vec{e}_1' + (\dot{z}'\omega\sin\lambda + \dot{x}'\omega\cos\lambda)\,\vec{e}_2' - \omega\dot{y}'\sin\lambda\,\vec{e}_3'$

Otrzymany układ równań różniczkowych ma rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
x &= g\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right)\\
y &= \frac{g\sin\lambda}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\\
z &= h - \frac{gt^2}{2} + g\sin^2\lambda\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right)
\end{aligned}$$

Prędkość i przyspieszenie w wybranych układach

Współrzędne cylindryczne (r, φ, z)

Wektor wodzący ma postać $\vec{\rho} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$

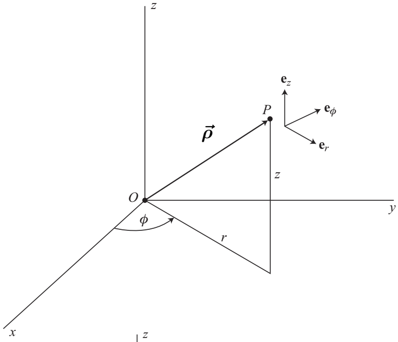
Prędkość kątowa układu $\vec{e}_r\vec{e}_\varphi\vec{e}_z$ to $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$.

Ponieważ $\dot{\vec{e}}_z = 0$ oraz $\dot{\vec{e}}_r = \omega \times \vec{e}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ więc:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

Ponieważ $\dot{\vec{e}}_\varphi = \omega \times \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$ więc

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$



Współrzędne sferyczne (r, θ, φ)

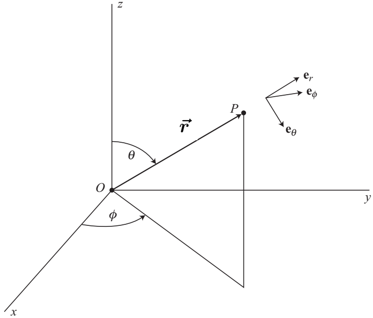
Wektor wodzący ma postać $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$

Prędkość kątowa układu $\vec{e}_r\vec{e}_\theta\vec{e}_\varphi$ dana jest przez

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi$$

Pochodne wektorów jednostkowych:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r &= \omega \times \vec{e}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\
\dot{\vec{e}}_\theta &= \omega \times \vec{e}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \\
\dot{\vec{e}}_\varphi &= \omega \times \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$



Prędkość i przyspieszenie w wybranych układach

Różniczkując wektor $\vec{r}$, znajdujemy wyrażenia na prędkość i przyspieszenie w układzie sferycznym:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

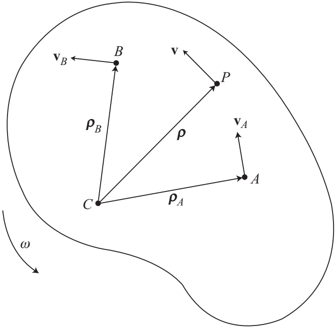
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\vec{e}_\theta + \\ + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\,\vec{e}_\varphi$$

Chwilowy środek obrotu:

Jeśli każdy punkt bryły sztywnej porusza się w ustalonej płaszczyźnie, a ta płaszczyzna nie porusza się jedynie ruchem postępowym, to istnieje taki punkt C, którego chwilowa prędkość jest równa zero, i nazywamy go chwilowym środkiem obrotu.

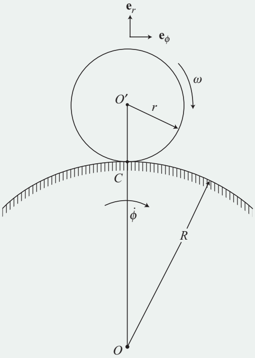
Jeśli znany jest chwilowy środek obrotu, to prędkość dowolnego punktu P określona jest relacją $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$.

W ogólności przyspieszenie punktu C nie jest równe zero, więc znajomość jego położenia nie ułatwia znalezienia przyspieszenia dowolnego innego punktu P.



Chwilowy środek obrotu

Przykład: Koło o promieniu r toczy się bez poślizgu po powierzchni o promieniu krzywizny R. Znajdź chwilowe przyspieszenie punktu styczności C.



Prędkość środka koła: $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\varphi$

Ponieważ $(R+r)\dot{\varphi} = r\omega$ więc $\dot{\varphi} = \dfrac{r\omega}{R+r}$

Przyspieszenie punktu O' w ruchu po okręgu o promieniu $(R+r)$ dane jest przez:

$$\vec{a}_{O'} = (R+r)\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - (R+r)\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r = r\dot{\omega}\,\vec{e}_\varphi - \frac{r^2\omega^2}{R+r}\,\vec{e}_r$$

Podobnie przyspieszenie punktu C względem O' wynosi:

$$\vec{a}_{C/O'} = -r\dot{\omega}\,\vec{e}_\varphi + r\omega^2\,\vec{e}_r$$

Całkowite przyspieszenie punktu C (chwilowegośrodka obrotu) wynosi więc:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{C/O'} = \frac{Rr}{R+r}\,\omega^2\,\vec{e}_r$$