Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

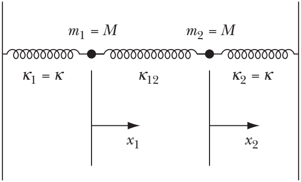
Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 10

Sprzężone oscylatory harmoniczne

Rozważmy jednowymiarowy układ drgający:



$$M\ddot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{12})\, x_1 - \kappa_{12} x_2 = 0$$
$$M\ddot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{12})\, x_2 - \kappa_{12} x_1 = 0$$

Odejmujemy równania stronami:

$$M(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (\kappa + 2\kappa_{12})(x_1 - x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\eta}_1 + \frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}\eta_1 = 0 \text{ gdzie } \eta_1 = x_1 - x_2$$

Rozwiązanie: $\eta_1(t) = 2A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$ gdzie $\omega_f = \sqrt{\dfrac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}$

Dodajemy równania stronami:

$$M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \kappa(x_1 + x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\eta}_2 + \frac{\kappa}{M}\eta_2 = 0 \text{ gdzie } \eta_2 = x_1 + x_2$$

Rozwiązanie: $\eta_2(t) = 2A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$ gdzie $\omega_s = \sqrt{\dfrac{\kappa}{M}}$

W zmiennych x_1 i x_2 rozwiązanie przyjmuje postać:

$$x_1(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) + A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$$
$$x_2(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) - A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$$

Sprzeżone oscylatory harmoniczne

Ogólna metoda: szukamy rozwiązań w postaci (A_1, A_2 mogą być zespolone):

$$x_1(t) = A_1 \mathrm{e}^{i\omega t} \quad \text{oraz} \quad x_2(t) = A_2 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

Wstawiając te rozwiązania do układu równań ruchu otrzymujemy:

$$\begin{cases} (\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)A_1 - \kappa_{12}A_2 = 0 \\ -\kappa_{12}A_1 + (\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

Nietrywialne rozwiązanie istnieje kiedy wyznacznik układu jest równy zero:

$$(\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)^2 - \kappa_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}$$

Dla $\omega^2 = \omega_s^2$ mamy: $\kappa \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2$

Dla $\omega^2 = \omega_f^2$ mamy: $\kappa \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -A_2$

Ogólne rozwiązanie ma postać:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega_s t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\omega_s t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega_f t} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\omega_f t}$$

Mody normalne

Żądamy aby położenia $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$ były rzeczywiste dla wszystkich t:

$$C_1 = C_2^\star \equiv \frac{1}{2} A_s \mathrm{e}^{i\phi_s} \quad \text{oraz} \quad C_3 = C_4^\star \equiv \frac{1}{2} A_f \mathrm{e}^{i\phi_f}$$

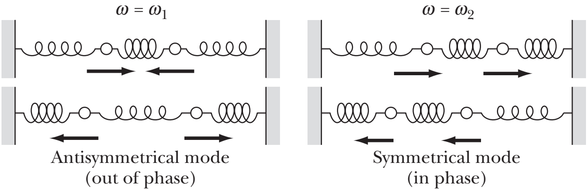
W rezultacie otrzymujemy rozwiązania identyczne jak z pierwszej metody:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) + A_f \cos(\omega_f t + \phi_f) \\ x_2(t) &= A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) - A_f \cos(\omega_f t + \phi_f) \end{aligned}$$

Mody normalne:

Dla $A_f = 0$ mamy: $x_1(t) = x_2(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$

Dla $A_s = 0$ mamy: $x_1(t) = -x_2(t) = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$



Dowolny ruch układu jest kombinacją liniową modów normalnych.

Współrzędne normalne

Współrzędnymi normalnymi w powyższym problemie są:

- $\eta_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$ – drgania z częstością ω_f
- $\eta_2(t) = x_1(t) + x_2(t)$ – drgania z częstością ω_s

W zmiennej η_1 układ wykonuje drgania z częstością ω_f, natomiast w zmiennej η_2 z częstością ω_s.

Przykład: W pewnym problemie rozwiązanie ma postać:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Współrzędnymi normalnymi są:

- $\eta_1 = 5x_1 + x_2$ odpowiadająca modowi normalnemu (3,2) dragnia z częstością ω_1
- $\eta_2 = 2x_1 - 3x_2$ odpowiadająca modowi normalnemu (1,-5) dragnia z częstością ω_2

Słabe sprzężenie

Niech warunki początkowe w naszym problemie mają postać:

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad x_1(0) = 0 \;\; \text{i} \;\; x_2(0) = A.$$

Korzystając z rozwiązania w postaci:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a\cos\omega_s t + b\sin\omega_s t + c\cos\omega_f t + d\sin\omega_f t \\ x_2(t) &= a\cos\omega_s t + b\sin\omega_s t - c\cos\omega_f t - d\sin\omega_f t \end{aligned}$$

otrzymujemy $b = d = 0$ oraz $a = -c = A/2$, czyli

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A}{2}\left(\cos\omega_s t - \cos\omega_f t\right) \\ x_2(t) &= \frac{A}{2}\left(\cos\omega_s t + \cos\omega_f t\right) \end{aligned}$$

W przypadku gdy $\kappa_{12} \ll \kappa$, wartość ω_f jest tylko niewiele większa od ω_s.

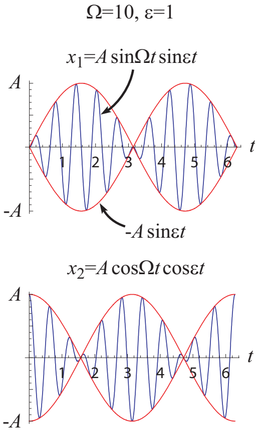
Wprowadzamy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{\omega_f + \omega_s}{2} - \frac{\omega_f - \omega_s}{2} \equiv \Omega - \epsilon \\ \omega_f &= \frac{\omega_f + \omega_s}{2} + \frac{\omega_f - \omega_s}{2} \equiv \Omega + \epsilon \end{aligned}$$

Słabe sprzężenie

Otrzymujemy:

$$x_1(t) = \frac{A}{2}\left(\cos\left(\Omega-\epsilon\right)t - \cos\left(\Omega+\epsilon\right)t\right) = A\sin\Omega t\sin\epsilon t$$
$$x_2(t) = \frac{A}{2}\left(\cos\left(\Omega-\epsilon\right)t + \cos\left(\Omega+\epsilon\right)t\right) = A\cos\Omega t\cos\epsilon t$$

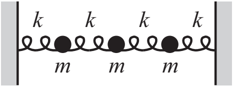


Obserwacje:

- wielkości $A\sin\epsilon t$ i $A\cos\epsilon t$ zmieniają się wolno,
- $x_1(t)$ i $x_2(t)$ wykonują drgania sinusoidalne z wolno zmieniającą się amplitudą,
- energia jest przekazywana od jednego oscylatora do drugiego i z powrotem ($\epsilon t = \pi/2$)

Układ trzech mas

Równania ruchu dla układu trzech mas (rysunek):



$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) - kx_3 \end{aligned}$$

Szukamy rozwiązań w postaci $x_i(t) = A_i \mathrm{e}^{i\omega t}$. Wstawiając do układu mamy:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gdzie $\omega_0^2 = k/m$. Nietrywialne rozwiązania istnieją dla zerowego wyznacznika:

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)(\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 2\omega_0^2 \text{ i } \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega_0^2$$

Mody normalne:

$$\omega = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

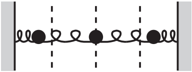
Układ trzech mas

Mody normalne:

$$\omega = \pm\sqrt{2}\omega_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ogólne rozwiązanie otrzymujemy jako kombinację liniową sześciu rozwiązań odpowiadających sześciu wartościom ω:

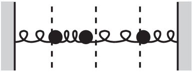
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\sqrt{2}\omega_0 t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\sqrt{2}\omega_0 t} + \ldots$$



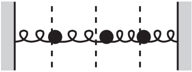
medium: (-1,0,1)

Ponieważ położenia muszą być rzeczywiste, więc:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= A_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}\,\omega_0 t + \phi_m\right) \\ &+ A_f \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0 t + \phi_f\right) \\ &+ A_s \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0 t + \phi_s\right) \end{aligned}$$



fast: (1,-$\sqrt{2}$,1)



slow: (1,$\sqrt{2}$,1)

Ogólna teoria małych drgań

Niech S będzie układem zachowawczym o n stopniach swobody i współrzędnych uogólnionych $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$.

Punkt $\vec{q} = \vec{q}_0 = const$ jest położeniem równowagi układu S jeśli spełnia równania Lagrange'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad j = 1, ..., n$$

gdzie $\quad T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_{j,k=1}^{n} t_{jk}(\vec{q})\dot{q}_j\dot{q}_k \quad$ oraz $\quad V(\vec{q})$.

Ponieważ lewa strona j-tego równania Lagrange'a jest równa zero dla $\vec{q} = \vec{q}_0$:

$$2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{dt_{jk}}{dt}\dot{q}_k + t_{jk}\ddot{q}_k\right) - \sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{dt_{jk}}{dq_j}\dot{q}_j\dot{q}_k\right) \overset{\vec{q}=\vec{q}_0}{=} 0$$

więc $\vec{q} = \vec{q}_0$ spełnia równania Lagrange'a wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, ..., n$$

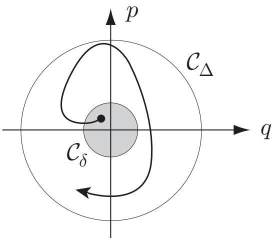
Wniosek: Położeniami równowagi układu zachowawczego są punkty stacjonarne energii potencjalnej tego układu.

Stabilne położenie równowagi

Punkt $\vec{q}_0$ w przestrzeni konfiguracyjnej odpowiada punktowi $(\vec{q}_0, \vec{0})$ w przestrzeni fazowej.

Definicja: Położenie równowagi $(\vec{q}_0, \vec{0})$ nazywamy stabilnym jeśli promień Δ dąży do zera gdy δ dąży do zera.

Twierdzenie: Minima energii potencjalnej $V(\vec{q})$ są stabilnymi położeniami równowagi układu S.



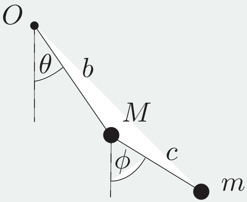
Przykład: Stabilność położenia równowagi podwójnego wahadła

Energia potencjalna:

$$V = (M+m)gb(1-\cos\theta) + mgc(1-\cos\phi)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (M+m)gb\sin\theta = 0 \quad \text{dla} \quad \theta = 0,\ \phi = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = mgc\sin\theta = 0 \quad \text{dla} \quad \theta = 0,\ \phi = 0$$



A więc punkt (0,0) jest stabilnym punktem równowagi.

Przybliżone formuły dla V oraz T

Niech energia potencjalna układu S ma minimum dla $\vec{q} = \vec{0}$ takie że $V(\vec{0}) = 0$.

Rozwijając w szereg wokół minimum dostajemy (dla dwóch stopni swobody):

$$V(q_1, q_2) = V(0,0) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} q_2 \right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} q_1 q_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} q_2^2 \right) + \ldots$$

Ponieważ $V(0,0) = 0$ oraz w minimum $\partial V / \partial q_1 = \partial V / \partial q_2 = 0$, więc

$$V^{\mathrm{app}}(q_1, q_2) = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right|_{(0,0)} q_1^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{(0,0)} q_1 q_2 + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right|_{(0,0)} q_2^2$$

Dla n stopni swobody:

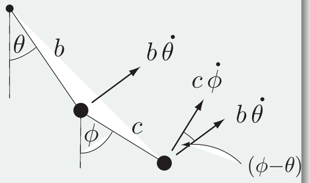
$$V^{\mathrm{app}}(\vec{q}) = \sum_{j,k=1}^{n} v_{jk} q_j q_k = \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{q} \quad \text{gdzie} \quad v_{jk} = v_{kj} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{\vec{q} = \vec{0}}$$

Przybliżona postać energii kinetycznej:

$$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_{j,k=1}^{n} t_{jk}(\vec{0}) \dot{q}_j \dot{q}_k + \ldots \qquad \Rightarrow \qquad T^{\mathrm{app}} = \sum_{j,k=1}^{n} t_{jk}(\vec{0}) \dot{q}_j \dot{q}_k = \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Przykład: Przybliżone energie potencjalna i kinetyczna dla wahadła podwójnego.

Energia potencjalna:



$$
\begin{aligned}
V &= (M+m)gb(1-\cos\theta) + mgc(1-\cos\phi) \\
V^{\text{app}} &= \frac{1}{2}(M+m)gb\theta^2 + \frac{1}{2}mgc\phi^2 \\
&= (\theta,\phi)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M+m)gb & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Energia kinetyczna:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M(b\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}m\left((b\dot\theta^2 + (c\dot\phi)^2 + 2(b\dot\theta)(c\dot\phi)\cos(\theta-\phi)\right) \\
T^{\text{app}} &= \frac{1}{2}(M+m)b^2\dot\theta^2 + mbc\dot\theta\dot\phi + \frac{1}{2}mc^2\dot\phi^2 \\
&= \left(\dot\theta,\dot\phi\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M+m)b^2 & \frac{1}{2}mbc \\ \frac{1}{2}mbc & \frac{1}{2}mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ogólna teoria modów normalnych

Zlinearyzowane równania dla małych drgań wokół położenia równowagi

Ponieważ: $\dfrac{\partial T^{\mathrm{app}}}{\partial \dot{q}_j} = 2\sum_{k=1}^{n} t_{jk}\dot{q}_k, \quad \dfrac{\partial T^{\mathrm{app}}}{\partial q_j} = 0, \quad \dfrac{\partial V^{\mathrm{app}}}{\partial q_j} = 2\sum_{k=1}^{n} v_{jk} q_k$ więc

$$\sum_{k=1}^{n} \left(t_{jk}\ddot{q}_k + v_{jk} q_k\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{T}\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{q} = \vec{0}$$

Mody normalne

Modami normalnymi nazywamy rozwiązania równań ruchu w postaci:

$$q_j = a_j \cos\left(\omega t - \gamma\right), \quad j = 1, ..., n \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{q} = \vec{a}\cos\left(\omega t - \gamma\right)$$

W modzie normalnym wszystkie współrzędne zmieniają się harmonicznie w czasie z ta samą częstością ω i tą samą fazą γ, ale z różnymi amplitudami.

Wstawiając mody normalne do równań ruchu otrzymujemy równania dla amplitud:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(v_{jk} - \omega^2 t_{jk}\right) a_k = 0, \quad j = 1, ..., n \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right)\cdot\vec{a} = \vec{0}$$

Częstości ω modów normalnych nazywamy częstościami normalnymi.

Podwójne wahadło matematyczne

Przykład: Znajdź częstości normalne podwójnego wahadła matematycznego dla: $M = 3m$ oraz $c = b$.

Rozwiązujemy układ równań na mody normalne:

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4n^2 - 4\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & n^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

gdzie $n^2 = g/b$. Z wyznacznika otrzymujemy częstości normalne:

$$\omega_1^2 = \frac{2n^2}{3}, \qquad \omega_2^2 = 2n^2$$

Znajdujemy amplitudy dla każdego z modów normalnych:

Dla $\omega_1^2 = 2n^2/3$ mamy:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a_1 = a_2 \equiv \epsilon$$

A więc:

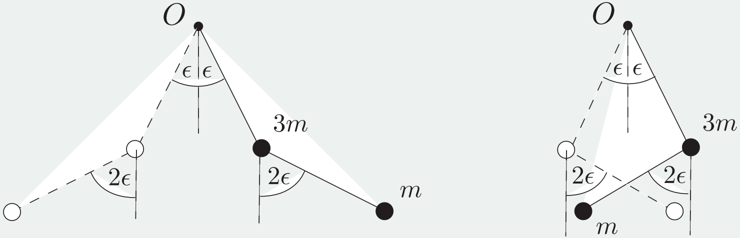
$$\begin{aligned} \theta &= \epsilon \cos\left(\sqrt{2/3}\, nt - \gamma\right) \\ \phi &= 2\epsilon \cos\left(\sqrt{2/3}\, nt - \gamma\right) \end{aligned}$$

Przykład: ciąg dalszy.

Podobnie dla $\omega_2^2 = 2n^2$ otrzymujemy:

$$\theta = \epsilon \cos\left(\sqrt{2}\, nt - \gamma\right)$$
$$\phi = -2\epsilon \cos\left(\sqrt{2}\, nt - \gamma\right)$$

gdzie w obu przypadkach stałe ϵ i γ wyznaczamy z warunków początkowych. Zachowanie układu dla obu modów normalnych przedstawia rysunek:



Ogólne rozwiązanie problemu małych drgań podwójnego wahadła ma postać:

$$\theta = \epsilon_1 \cos\left(\sqrt{2/3}\, nt - \gamma_1\right) + \epsilon_2 \cos\left(\sqrt{2}\, nt - \gamma_2\right)$$
$$\phi = 2\epsilon_1 \cos\left(\sqrt{2/3}\, nt - \gamma_1\right) - 2\epsilon_2 \cos\left(\sqrt{2}\, nt - \gamma_2\right)$$

Istnienie częstości normalnych i modów normalnych

Twierdzenie: Jeśli macierze $\mathbf{K}$ i $\mathbf{L}$ są rzeczywiste i symetryczne, a macierz $\mathbf{L}$ jest dodatnio określona to wszystkie uogólnione wartości własne w problemie własnym $\mathbf{K} \cdot \vec{x} = \lambda \mathbf{L} \cdot \vec{x}$ są rzeczywiste. Jeśli macierz $\mathbf{K}$ jest dodatkowo dodatnio określona to wartości własne są także dodatnie.

Ponieważ macierze energii kinetycznej $\mathbf{T}$ i energii potencjalnej $\mathbf{V}$ są symetryczne i dodatnio określone, więc jeśli wymiar macierzy jest $n \times n$ to w problemie modów normalnych istnieje n wartości ω^2 (uogólnionych wartości własnych), niekoniecznie różnych (w szczególności jeśli układ posiada jakąś symetrię).

Jeśli wszystkie wartości ω^2 są różne to równania na amplitudy $\vec{a}$:

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) \cdot \vec{a} = \mathbf{0}$$

mają n różnych rozwiązań, a więc dla każdej częstości normalnej istnieje tylko jeden mod normalny.

Jeśli któraś z wartości ω^2 powtarza się k razy, to istnieje do niej k liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{a}$, a więc k modów. Mówimy, że ta częstość jest zdegenerowana.

Wniosek: Całkowita liczba modów jest zawsze równa liczbie stopni swobody n układu.

Ortogonalność modów normalnych

Twierdzenie: Niech $\mathbf{K}$ i $\mathbf{L}$ będą symetrycznymi macierzami $n \times n$ oraz niech $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ będą uogólnionymi wektorami własnymi do różnych wartości własnych. Wówczas wektory $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ są wzajemnie ortogonalne względem macierzy $\mathbf{L}$, tzn. $\vec{x}_1^T \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{x}_2 = 0$.

Ponieważ macierze $\mathbf{T}$ i $\mathbf{V}$ są rzeczywiste i symetryczne, oznacza to, że jesli $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ są wektorami aplitud modów normalnych do różnych częstości normalnych to zachodzi:

$$\vec{a}_1^T \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{a}_2 = 0$$

W przypadku zdegenerowanych częstości własnych zawsze można wybrać wektory amplitud tak aby były ortogonalne.

Wniosek: Wektory amplitud $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ modów normalnych spełniają (lub można sprawić aby spełniały) relacje ortogonalności:

$$\vec{a}_j^T \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{a}_k = 0, \qquad \text{dla} \quad j \neq k$$

Ogólne rozwiązanie problemu małych drgań przyjmuje postać kombinacji liniowej modów normalnych:

$$\vec{q}(t) = C_1 \vec{a}_1 \cos(\omega_1 t - \gamma_1) + C_2 \vec{a}_2 \cos(\omega_2 t - \gamma_2) + ... + C_n \vec{a}_n \cos(\omega_n t - \gamma_n)$$

gdzie stałe C_j oraz fazy γ_j należy wyznaczyć z warunków początkowych.

Współrzędne normalne

Definicja: Współrzędnymi normalnymi nazywamy zbiór współrzędnych uogólnionych w których macierze $\mathbf{T}$ i $\mathbf{V}$ są diagonalne.

Rozważmy zmianę zmiennych $\vec{q} = \mathbf{P} \cdot \vec{\eta}$ gdzie $\mathbf{P}$ jest dowolną macierzą nieosobliwą:

$$
\begin{aligned}
T^{\mathrm{app}} &= \dot{\vec{q}}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\vec{q}} = (\mathbf{P} \cdot \dot{\vec{\eta}})^T \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{P} \cdot \dot{\vec{\eta}}) = \dot{\vec{\eta}}^T \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}) \cdot \dot{\vec{\eta}} \\
V^{\mathrm{app}} &= \vec{q}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{q} = (\mathbf{P} \cdot \vec{\eta})^T \cdot \mathbf{V} \cdot (\mathbf{P} \cdot \vec{\eta}) = \vec{\eta}^T \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) \cdot \vec{\eta}
\end{aligned}
$$

Macierz $\mathbf{P} = (\vec{a}_1 \,|\, \vec{a}_2 \,|\, \ldots \,|\, \vec{a}_n)$ przy założeniu, że $\vec{a}_i$ są ortnormalne, tzn.

$$
\vec{a}_j^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}
$$

diagonalizuje jednocześnie macierze $\mathbf{T}$ i $\mathbf{V}$:

$$
\mathbf{T} \to \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T} \cdot (\vec{a}_1 \,|\, \vec{a}_2 \,|\, \ldots \,|\, \vec{a}_n) = \mathbf{I}
$$

Ponieważ:

$$
\vec{a}_j^T \cdot \mathbf{V} \cdot \vec{a}_k = \vec{a}_j^T \cdot (\mathbf{V} \cdot \vec{a}_k) = \vec{a}_j^T \cdot (\omega_k^2 \, \mathbf{T} \cdot \vec{a}_k) = \omega_k^2 \, (\vec{a}_j^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \omega_j^2 & j = k \end{cases}
$$

Współrzędne normalne

Dla macierzy $\mathbf{V}$ otrzymujemy:

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

A więc współrzędne normalne mają postać:

$$\vec{\eta} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \vec{q} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{q} \qquad \Rightarrow \qquad \eta_j = (\vec{a}_j^T \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{q} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Równania małych drgań we współrzędnych normalnych przyjmują postać:

$$\ddot{\vec{\eta}} + \mathbf{\Omega}^2 \cdot \vec{\eta} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Przykład: Podwójne wahadło, cd.

Wcześniej znaleźliśmy: $\mathbf{T} = \frac{1}{2} m b^2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Współrzędne normalne:

$$\eta_1 = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = 6\theta + 3\phi$$

$$\eta_2 = (1,\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = 2\theta - \phi$$