Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 11

Transformacje kanoniczne

Rozwiązywanie problemów za pomocą transformacji kanonicznych:

- transformacja do zmiennych kanonicznych, które wszystkie są cykliczne (możliwe jeśli Hamiltonian jest zachowany),
- transformacja od zmiennych (q, p) w chwili t do nowych zmiennych które są wielkościami stałymi (np. 2n wartości początkowych (q_0, p_0) w t_0):

  Rozwiązaniem problemu są wówczas równania transformacji:

$$q = q(q_0, p_0, t), \qquad p = p(q_0, p_0, t)$$

Dalsza dyskusja dotyczy drugiej metody (Hamitonian może zależeć od czasu).

Aby nowe zmienne były niezależne o czasu wystarczy aby nowy hamiltonian $\tilde{H}$ był tożsamościowo równy zero, wtedy:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0, \qquad -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0$$

co zachodzi gdy: $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t) + \dfrac{\partial F}{\partial t} \equiv 0$

Równanie Hamiltona-Jacobiego

Wybierając funkcję generującą $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ oraz korzystając z równań transformacji $p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}$ otrzymujemy równanie Hamiltona-Jacobiego:

$$H\left(q_1, ..., q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Rozwiązanie ma postać $F_2 \equiv S = S(q_1, ..., q_n; \alpha_1, ..., \alpha_n; t)$, przy czym stałe całkowania wybieramy jako nowe pędy $\alpha_i = P_i$.

Równania transformacji przyjmują postać:

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \qquad Q_i \equiv \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$$

Równania te pozwalają wyznaczyć $2n$ stałych całkowania, na podstawie znajomości (q, p) w chwili początkowej t_0.

Odwracając drugie z powyższych równań, a następnie korzystając z pierwszego, otrzymujemy rozwiązanie problemu w postaci:

$$q_j = q_j(\alpha, \beta, t) \qquad p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$$

Zastosowanie metody Hamiltona-Jacobiego

Przykład: Prosty oscylator harmoniczny.

Hamiltonian: $\frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \equiv E$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Równanie Hamilton-Jacobiego przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Kiedy Hamiltonian nie zależy od czasu funkcje S można wybrać w postaci $S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha t$ co prowadzi do równania:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = \alpha$$

Całkując równanie Hamiltona-Jacobiego otrzymujemy:

$$W = \sqrt{2m\alpha}\int \mathrm{d}q\,\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}$$

a więc

$$S = \sqrt{2m\alpha}\int \mathrm{d}q\,\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}} - \alpha t$$

Prosty oscylator harmoniczny

Znajdujemy rozwiązanie dla $q(t)$:

$$\beta' = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}} - t$$

Całkujemy: $\quad t + \beta' = \frac{1}{\omega} \arcsin q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}$

Odwracamy: $\quad q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$

Zależność pędu od czasu otrzymujemy z równania transformacji:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}$$

po podstawieniu wcześniej wyznaczonego q:

$$p = \sqrt{2m\alpha}\,\cos(\omega t + \beta)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2, \qquad \mathrm{tg}\,\beta = m\omega\,\frac{q_0}{p_0}$$

Zastosowanie metody Hamiltona-Jacobiego

Nowe zmienne kanoniczne α oraz β to odpowiednio całkowita energia i faza.

Wstawiając $q(t)$ do funkcji S otrzymujemy:

$$S = 2\alpha \int \cos^2(\omega t + \beta)\mathrm{d}t - \alpha t = 2\alpha \int \left(\cos^2(\omega t + \beta) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Lagranżjan przyjmuje postać:

$$L = \frac{1}{2m}(p^2 - m^2\omega^2 q^2) = 2\alpha\left(\cos^2(\omega t + \beta) - \frac{1}{2}\right)$$

Uwaga: Ogólnie prawdziwa jest relacja $S = \int L\mathrm{d}t$

Przykład: Dwuwymiarowy (anizotropowy) oscylator harmoniczny.

Hamiltonian (równy całkowitej energii):

$$H \equiv E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + m^2\omega_x^2 x^2 + m^2\omega_y^2 y^2\right), \quad \text{gdzie } \omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$$

Ponieważ współrzędne i pędy separują się, więc funkcja S może być zapisana jako suma dwóch funkcji charakterystycznych:

$$S(x, y, \alpha, \alpha_y, t) = W_x(x, \alpha_x) + W_y(y, \alpha_y) - \alpha t$$

Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + m^2\omega_x^2 x^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + m^2\omega_y^2 y^2\right] = \alpha$$

Ponieważ zmienne separują się, więc każda z częsci musi być równa stałej:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 &= \alpha_y \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 &= \alpha_x \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_x + \alpha_y = \alpha$.

Rozwiązania przyjmują postać:

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2}}\sin(\omega_x t + \beta_x), \qquad p_x = \sqrt{2m\alpha_x}\cos(\omega_x t + \beta_x)$$

$$y = \sqrt{\frac{2\alpha_y}{m\omega_y^2}}\sin(\omega_y t + \beta_y), \qquad p_y = \sqrt{2m\alpha_y}\cos(\omega_y t + \beta_y)$$

Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny

Przykład: Dwuwymiarowy (izotropowy) oscylator harmoniczny.

Hamiltonian (równy całkowitej energii) w zmiennych polarnych ma postać:

$$H \equiv E = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + m^2\omega^2 r^2\right), \qquad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \;\; p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

i nie zależy od ziennej θ. Funkcję S zapisujemy w postaci:

$$S(r,\theta,\alpha,\alpha_\theta) = W_r(r,\alpha) + W_\theta(\theta,\alpha_\theta) - \alpha t = W_r(r,\alpha) + \theta\alpha_\theta - \alpha t$$

Uwaga: Dla współrzędnych cyklicznych funkcja charakterystyczna ma zawsze postać: $W_{q_i} = q_i\alpha_i$.

Pęd sprzężony ze współrzędną cykliczną ma stałą wartość: $p_\theta = \dfrac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \alpha_\theta$

Równanie H-J przyjmuje więc postać:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \alpha$$

Rozwiązania:

$$r = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sqrt{\sin^2\omega t + \sin^2(\omega t + \beta)}, \qquad p_r = m\dot{r}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sin\omega t}{\sin(\omega t + \beta)}\right], \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

Równania H-J dla funkcji charakterystycznych

W przypadku gdy Hamiltonian nie zależy od czasu zawsze istnieje możliwość separacji funkcji

$$S\left(q,\alpha,t\right)=H\left(q,\alpha\right)-at$$

Prowadzi to do równania Hamiltona-Jacobiego, które nie zawiera zmiennej t:

$$H\left(q_i,\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=\alpha_1$$

Uwaga: Zwykle H jest energią całkowitą, ale nie zawsze tak musi być.

Funkcja charakterystyczna W generuje transformacje kanoniczne różne od tych generowanych przez S:

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\qquad Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}=\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

W szczególności ponieważ W nie zależy od czasu, więc:

$$\tilde{H}(q_i,P_i)=H(q_i,p_i)+\frac{\partial W}{\partial t}=H(q_i,p_i)\equiv\alpha_1$$

Wniosek: Funkcja charakterystyczna W generuje transformację kanoniczną, w której wszystkie nowe współrzędne są cykliczne.

Równania H-J dla funkcji charakterystycznych

W szczególności mamy:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_i = \alpha_i$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_i} = 1, \quad i = 1 \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = t + \beta_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i \neq 1 \qquad \Rightarrow \qquad Q_i = \beta_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

Równania te wraz równaniami transformacji pozwalają na wyznaczenie pozostałych $(n-1)$ stałych $\alpha_i, \;\; i = 2, .., n$ oraz stałych β_i i powiązaniu ich z wartościami początkowymi zmiennych q_i, p_i w chwili t_0.

Równanie Hamiltona-Jacobiego - podsumowanie metody

Dwie metody rozwiązania w zależności od postaci Hamiltonianu:

Postać Hamiltonianu:

dowolna funkcja $H(q,p,t)$	zachowany $H(q,p) = const$

Szukamy transformacji kanonicznych takich, że:

wszystkie Q_i i P_i są stałymi ruchu	tylko pędy P_i są stałe

W tym celu żądamy aby:

$\tilde{H} = 0$	$\tilde{h} = H(P_i) = \alpha_1$

Równania ruchu przyjmują postać:

$\dot{Q}_i = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = 0$	$\dot{Q}_i = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = v_i$
$\dot{P}_i = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0$	$\dot{P}_i = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0$

Rozwiązania równań ruchu:

$Q_i = \beta_i$	$Q_i = v_i t + \beta_i$
$P_i = \gamma_i$	$P_i = \gamma_i$

Funkcja generująca transfromację:

$S(q,P,t)$	$W(q,P)$

Równania Hamiltona-Jacobiego - podsumowanie metody

Postać równania Hamiltona-Jacobiego:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad\qquad H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0$$

Pełne rozwiązanie równania Hamiltona-Jacobiego zawiera:

n stałych całkownia α_i | α_1 oraz $(n-1)$ stałych α_i

Nowe stałe pędy P_i można wybrać jako n niezależnych funkcji stałych α_i:

$$P_i = \gamma_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \qquad\qquad P_i = \gamma_i(\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

W szczególności funkcje γ_i mogą być równe stałym α_i, wtedy:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \qquad\qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

są spełnione automatycznie ponieważ były wykorzystane przy konstrukcji równań Hamitona-Jacobiego. Natomiast z równań:

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} = \beta_i \qquad\qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = v_i(\gamma_i)t + \beta_i$$

znajdujemy $q_i(t, \beta_i, \gamma_i)$, gdzie stałe β_i i γ_i wyznaczamy z warunków początkowych

Uwaga: Jeśli Hamiltonian nie zależy od czasu, to wtedy można skorzystać z każdej z powyższych metod, a funkcje generujące są związane zależnością:

$$S(q, P, t) = W(q, P) - \alpha_1 t$$