

Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 13

Obliczanie momentów bezwładności

Przykład: Znajdź składowe tensora momentu bezwładności jednorodnej płyty o masie M i bokach $2a$ oraz $2b$.

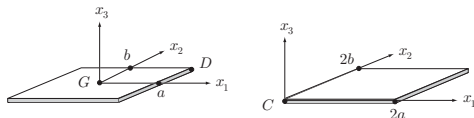
Względem środka masy G :

$$I_{11} = \frac{1}{3}Mb^2 \quad \text{tak jak dla pręta}$$

$$I_{22} = \frac{1}{3}Ma^2 \quad \text{tak jak dla pręta}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = 0$$



$$I_G = \frac{1}{3}M \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Względem punktu C :

$$I_{11} = \frac{1}{3}Mb^2 + Mb^2 = \frac{4}{3}Mb^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{3}Ma^2 + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{4}{3}M(a^2 + b^2)$$

$$I_{12} = \int_0^{2a} dx_1 \int_0^{2b} dx_2 (\sigma x_1 x_2) = 4\sigma a^2 b^2 = Mab$$

$$I_C = \frac{1}{3}M \begin{pmatrix} 4b^2 & -3ab & 0 \\ -3ab & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Obliczanie momentów bezwładności

Przykład: Tensor bezwładności względem punktu G w układzie obróconym względem osi Gx_3 tak aby nowa oś Gx'_1 pokrywała się z linią GD .

$$I'_G = A \cdot I_G \cdot A^T = \frac{M}{3(a^2 + b^2)} \begin{pmatrix} 2a^2b^2 & ab(a^2 - b^2) & 0 \\ ab(a^2 - b^2) & a^4 + b^4 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2)^2 \end{pmatrix}$$

gdzie A jest odpowiednią macierzą obrotu.

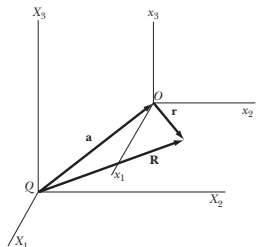
Przykład: Energia kinetyczna płyty obracającej się wokół osi GD z prędkością kątową λ .

$$T = \frac{1}{2} \omega^T \cdot I_G \cdot \omega = \frac{1}{2} (\lambda \cos \alpha, \lambda \sin \alpha, 0) \cdot I_G \cdot \begin{pmatrix} \lambda \cos \alpha \\ \lambda \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2b^2\lambda^2}{3(a^2 + b^2)}$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}'^T \cdot I'_G \cdot \vec{\omega}' = \frac{1}{2} (\lambda, 0, 0) \cdot I'_G \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2b^2\lambda^2}{3(a^2 + b^2)}$$

Uogólnione twierdzenie Steiner'a

Rozważamy dwa układy współrzędnych związane z ciałem: układ $Ox_1x_2x_3$ związany ze środkiem masy oraz inny układ $QX_1X_2X_3$ o odpowiednio równoległych osiach i przesuniętym początku: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{r}$.



$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k (x_k + a_k)^2 - (x_i + a_i)(x_j + a_j) \right) = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right) + \\ &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k (2x_k a_k + a_k^2) - (a_i x_j + a_j x_i + a_i a_j) \right) = \\ &= I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(2\delta_{ij} \sum_k x_k a_k - a_i x_j - a_j x_i \right) = \\ &= I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right) = I_{ij} + M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \end{aligned}$$

Osie główne bezwładności

Twierdzenie: Każdą macierz symetryczną można zdiagnozować a pomocą ortogonalnej transformacji podobieństwa $A \cdot T \cdot A^T$.

Wniosek: W dowolnym punkcie O bryły sztywnej można wybrać tzw. **osie główne**, które definiują układ współrzędnych w których tensor momentu bezwładności jest diagonalny.

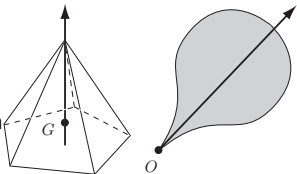
W układzie określonym przez osie główne, moment pędu i energia kinetyczna bryły sztywnej względem stałego (nieruchomego) punktu O mają postać:

$$\vec{L}_O = (I_1\omega_1)\hat{e}_1 + (I_2\omega_2)\hat{e}_2 + (I_3\omega_3)\hat{e}_3$$
$$T = \frac{1}{2} (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

Uwaga: Identyczne relacje zachodzą w dowolnym ruchu bryły sztywnej względem środka masy G

Znajdowanie osi głównych w oparciu o symetrię:

- jeśli ciało posiada symetrię ze względu na odbicie w płaszczyźnie przechodzącej przez O , wówczas linia prostopadła do tej płaszczyzny i przechodząca przez O jest jedną z osi głównych,



Osie główne bezwładności

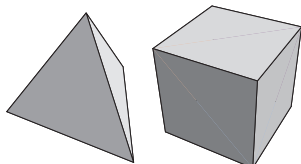
- jeśli ciało posiada symetrię rotacyjną względem osi przechodzącej przez O , to ta oś jest osią główną.

Z równania ruchu względem osi głównych $\frac{d}{dt}(I_O \cdot \vec{\omega}) = \vec{K}_O$ wynika, że pod wpływem tych samych sił zewnętrznych ciała które mają takie same główne momenty bezwładności poruszają się tak samo.

Ze względu na geometrię ciał rozróżniamy następujące **dynamiczne symetrie**:

- $I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$ – ciało **dynamicznie niesymetryczne** (np. prostokąt),
- $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$ – ciało **dynamicznie osiowo symetryczne** (np. ostrosłup),
Ciało które posiada symetrię obrotową rzędu co najmniej trzeciego posiada także dynamiczną symetrię osiową.
- $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ – ciało **dynamicznie sferycznie symetryczne** (np. kula, sześcián, czworościan)

Ciało które posiada dynamiczną symetrię osiową względem dwóch różnych osi przechodzących przez punkt O jest dynamicznie sferycznie symetryczne względem punktu O .



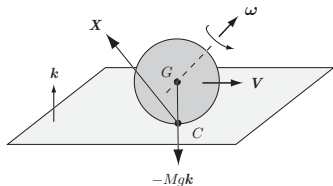
Opis ruchu ciał dynamicznie sferycznie symetrycznych

Rozważamy ruch kuli bilardowej o masie M i promieniu b przy czym dopuszczamy możliwość poślizgu. Oznacza to, że siła reakcji podłoża \vec{X} nie jest skierowana pionowo do góry.

$$M\dot{\vec{V}} = \vec{F} \Rightarrow M\dot{\vec{V}} = \vec{X} - Mg\hat{k}$$

$$\dot{\vec{L}}_G = \vec{K}_G \Rightarrow \dot{\vec{L}}_G = (-b\hat{k}) \times \vec{X}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G = I\vec{\omega} &\Rightarrow I\dot{\vec{\omega}} = b \left(M\dot{\vec{V}} + Mg\hat{k} \right) \times \hat{k} = \\ &= Mb\dot{\vec{V}} \times \hat{k} \end{aligned}$$



Całkując po czasie otrzymujemy:

$$I\vec{\omega} + Mb\hat{k} \times \vec{V} = \vec{C} \equiv const \quad / \cdot \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \cdot \hat{k} = n \equiv const$$

Wniosek: W dowolnym ruchu kuli składowa pionowa $\vec{\omega}$ jest zachowana.

Korzystając z równania ruchu otrzymujemy:

$$I\hat{k} \times \vec{\omega} = \hat{k} \times \vec{C} - Mb\hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{V}) = \hat{k} \times \vec{C} - Mb \left((\hat{k} \cdot \vec{V})\hat{k} - (\hat{k} \cdot \hat{k})\vec{V} \right) = \hat{k} \times \vec{C} - Mb\vec{V}$$

W przypadku braku poślizgu ($\vec{V} = \vec{\omega} \times (b\hat{k})$) ruch odbywa się po linii prostej:

$$\vec{V} + \left(\frac{Mb^2}{I} \right) \vec{V} = \left(\frac{b}{I} \right) \vec{C} \times \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = const, \quad \vec{\omega} = \frac{1}{b} \hat{k} \times \vec{V} + n\hat{k} = const$$

Opis ruchu ciał dynamicznie osiowo symetrycznych

Rozważamy ruch ciała o dynamicznej symetrii osiowej.

Niech główne momenty bezwładności względem osi głównych przechodzących przez środek masy G będą równe $\{I, I, I_3\}$.

W przypadku braku sił zewnętrznym (lub jednorodnego pola grawitacyjnego) mamy $\vec{K}_G = 0$, więc:

$$\dot{\vec{L}}_G = 0 \quad \text{gdzie} \quad \vec{L}_G = I\omega_1\hat{e}_1 + I\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3$$

Uwaga: wektory $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ zależą od czasu.

Oznaczając $\hat{e}_3 \equiv \vec{a}$ mamy $\dot{\vec{a}} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ oraz:

$$\dot{\vec{a}} = \vec{\omega} \times \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \dot{\vec{a}} = \vec{a} \times (\vec{\omega} \times \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{\omega} - (\vec{a} \cdot \vec{\omega})\vec{a} = \vec{\omega} - (\vec{a} \cdot \vec{\omega})\vec{a}$$

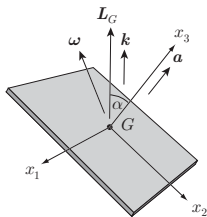
A więc w ogólności $\vec{\omega}$ ma postać: $\vec{\omega} = \vec{a} \times \dot{\vec{a}} + \lambda(t)\vec{a}$ gdzie $\lambda = \vec{\omega} \cdot \vec{a}$

Ponieważ wektory $\lambda\vec{a}$ oraz $\vec{a} \times \dot{\vec{a}}$ mają kierunki osi głównych, więc:

$$\vec{L}_G = I\vec{a} \times \dot{\vec{a}} + I_3\lambda\vec{a}$$

Po wstawieniu do równania ruchu otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{K}_G \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad I\vec{a} \times \ddot{\vec{a}} + I_3(\dot{\lambda}\vec{a} + \lambda\dot{\vec{a}}) = 0$$



Opis ruchu ciała dynamicznie osiowo symetrycznych

Mnożąc skalarnie przez \vec{a} otrzymujemy równanie ruchu swobodnego ciała o dynamicznej symetrii osiowej:

$$I\vec{a} \times \dot{\vec{a}} + I_3 n \vec{a} = \vec{L}_G$$

gdzie $n = \vec{\omega} \cdot \vec{a}$ nazywamy **spinem**.

Aby rozwiązać powyższe równanie mnożymy najpierw obustronnie skalarnie przez \vec{a} :

$$I\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \dot{\vec{a}}) + I_3 n \vec{a} \cdot \vec{a} = L(\vec{a} \cdot \hat{k}) \quad \Rightarrow \quad I_3 n = L(\vec{a} \cdot \hat{k}) = L \cos \alpha$$

Oznacza to, że $n = \frac{L}{I_3} \cos \alpha$, a więc oś symetrii ciała tworzy stały kąt z \hat{k} i zatacza stożek wokół osi $\{G, \hat{k}\}$.

Mnożąc równanie ruchu obustronnie wektorowo przez \vec{a} dostajemy kolejno :

$$I\vec{a} \times (\vec{a} \times \dot{\vec{a}}) + I_3 n \vec{a} \times \vec{a} = L(\vec{a} \times \hat{k})$$

$$I \left((\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \dot{\vec{a}} \right) = L(\vec{a} \times \hat{k}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{a}} = \left(\frac{L}{I} \hat{k} \right) \times \vec{a}$$

Oznacza to, że oś symetrii ciała precesuje wokół osi $\{G, \hat{k}\}$ ze stałą prędkością kątową L/I .

Opis ruchu ciała dynamicznie osiowo symetrycznych

Rzeczywista prędkość kątowna ciała jest równa:

$$\vec{\omega} = \vec{a} \times \dot{\vec{a}} + n\vec{a} = \vec{a} \times \left(\frac{L}{I} (\hat{k} \times \vec{a}) \right) + \left(\frac{L \cos \alpha}{I_3} \right) \vec{a} = \frac{L}{I} \hat{k} + L \cos \alpha \left(\frac{I - I_3}{II_3} \right) \vec{a}$$

Twierdzenie: Niech bryła sztywna porusza się z prędkością kątowną $\vec{\omega}'$ w układzie C' , a układ C' ma prędkość kątowną $\vec{\Omega}$ względem układu C . Wówczas rzeczywista prędkość kątowna ciała względem układu C jest równa $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}'$.

Patrząc z układu precesującego, tzn. układu który obraca się wokół osi $\{G, \hat{k}\}$ z prędkością kątowną $(L/I)\hat{k}$ mamy:

$$\vec{\omega}' = L \cos \alpha \left(\frac{I - I_3}{II_3} \right) \vec{a}$$

Podsumowanie:

- oś symetrii ciała tworzy stały kąt α z wektorem $L\hat{k}$ i precesuje wokół osi $\{G, \hat{k}\}$ ze stałą prędkością kątowną L/I ,
- spin bryły $n = \vec{\omega} \cdot \vec{a} = L \cos \alpha / I_3$,
- w układzie precesującym ciało obraca się wokół osi symetrii ze stałą prędkością kątowną $L \cos \alpha (I - I_3) / (II_3)$.

Dynamika ruchu symetrycznego bąka

Rozważamy ruch symetrycznego bąka poruszającego się wokół ustalonego punktu O w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Równanie ruchu ma postać:

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{K}_O \Rightarrow \frac{d}{dt}(I\vec{a} \times \dot{\vec{a}} + I_3\lambda\vec{a}) = -Mgh\vec{a} \times \hat{k}$$

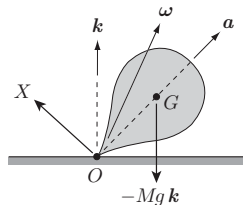
Z poprzednich rozważań wiemy, że:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{a} \times \dot{\vec{a}} + \lambda\vec{a} \\ \vec{L}_O &= I\vec{a} \times \dot{\vec{a}} + I_3\lambda\vec{a}\end{aligned}$$

A więc równanie ruchu bąka ma postać:

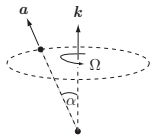
$$\frac{d}{dt}(I\vec{a} \times \dot{\vec{a}} + I_3n\vec{a}) = -Mgh\vec{a} \times \hat{k}$$

gdzie stałą $n = \omega \cdot \vec{a}$ należy wyznaczyć z warunków początkowych.



Dynamika ruchu symetrycznego bąka

Precesja stacjonarna: oś bąka tworzy stały kąt α z pionem i precesuje wokół osi $\{O, \hat{k}\}$ ze stałą prędkością kątową Ω .



Znajdziemy częstość **precesji stacjonarnej** rozwiązując równanie ruchu.

$$\vec{a} \times \dot{\vec{a}} = \vec{a} \times (\Omega \hat{k} \times \vec{a}) = \Omega(\vec{a} \cdot \vec{a})\hat{k} - \Omega(\vec{a} \cdot \hat{k})\vec{a} = \Omega(\hat{k} - \cos \alpha \vec{a})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \dot{\vec{a}}) = \Omega^2 \cos \alpha (\vec{a} \times \hat{k})$$

Równanie ruchu przyjmuje postać:

$$(I \cos \alpha \Omega^2 - Cn\Omega + Mgh) (\vec{a} \times \hat{k}) = 0$$

Precesja stacjonarna może zachodzić gdy: $C^2 n^2 \geq 4IMgh \cos \alpha$

Otrzymujemy wówczas dwie wartości dozwolonej częstości precesji:

$$\Omega_{F,S} = \frac{Cn}{2I \cos \alpha} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4IMgh \cos \alpha}{C^2 n^2} \right)^{1/2} \right]$$

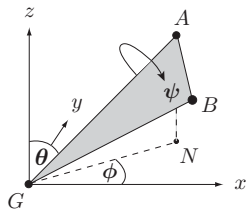
Ponieważ $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ więc jeśli $\frac{4IMgh}{C^2 n^2} \ll 1$ to:

$$\Omega_F \approx \frac{I_3 n}{I \cos \alpha} \quad \text{oraz} \quad \Omega_S \approx \frac{Mgh}{I_3 n}$$

Lagrangian wirującego bąka

Jako współrzędne uogólnione wybieramy kąty Eulera:

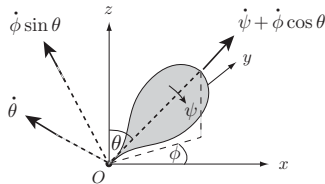
- początek układu umieszczamy w środku masy G ,
- jeśli ciało ma oś symetrii, wówczas kąty φ oraz θ określają jej położenie,
- kąt ψ określa obrót ciała względem wybranej osi (symetrii jeśli istnieje).



Lagrangian wirującego bąka:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

$$V = Mgz = Mgh\cos\theta$$



$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - Mgh\cos\theta$$

Ponieważ φ oraz ψ są współrzędnymi cyklicznymi więc zachowane są:

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta \equiv L_z$$

$$p_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = I_3 n$$

Nutacja osi bąka

Korzystając z powyższych zależności oraz zasady zachowania energii:

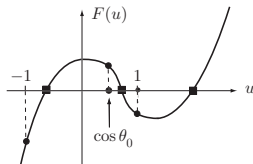
$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\varphi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + Mgh \cos \theta = E$$

otrzymujemy równanie:

$$I\dot{\theta}^2 = 2E - I_3 n^2 - \frac{(L_z - I_3 n \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} - 2Mgh \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{F(\cos \theta)}{I^2 \sin^2 \theta}$$

gdzie $F(u) = I(2E - I_3 n^2)(1 - u^2) - (L_z - I_3 n u)^2 - 2IMghu(1 - u^2)$

- ruch możliwy dla $F(\cos \theta) > 0$
- oś bąka wykonuje ruch oscylacyjny pomiędzy $u_{min} < u < u_{max}$ gdzie $F(u_{min}) = F(u_{max}) = 0$
- oscylacje w kącie θ nazywamy **nutacją** osi bąka.



Przykład: Puszczamy swobodnie bąk, którego oś początkowo tworzy z pionem kąt $\theta = \pi/3$. Zakładamy, że $C^2 n^2 = 4IMgh$.

Dla warunków początkowych $\theta = \pi/3$, $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ mamy:

$$L_z = \frac{1}{2}I_3 n, \quad E = \frac{1}{2}I_3 n^2 + \frac{1}{2}Mgh, \quad F(u) = IMghu(1 - 2u)(2 - u)$$

Precesja osi bąka

A więc oscylacje kąta θ (nutacja) odbywają się w zakresie $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Znając funkcję $\theta(t)$ można wyznaczyć zależność $\varphi(t)$ z z.z. momentu pędu:

$$I\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 n \cos \theta = L_z$$

Dla warunków początkowych $\theta = \alpha$, $\dot{\theta} = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \Omega$ mamy:

$$I\dot{\varphi} \sin^2 \theta = I\dot{\varphi} \sin^2 \alpha + I_3 n (\cos \alpha - \cos \theta)$$

W przypadkach kiedy może zachodzić precesja stacjonarna, $C^2 n^2 \geq 4IMgh$, możliwe są następujące ruchy bąka:

- $\Omega < \Omega_S$ – kąt θ początkowo rośnie, $\alpha < \theta < \beta$ (rysunek lewy),
- $\Omega = 0$ – rysunek środkowy,
- $\Omega < 0$ ale $I\dot{\varphi} \sin^2 \alpha + I_3 n (\cos \alpha - \cos \beta) > 0$ – rysunek prawy,
- $I\dot{\varphi} \sin^2 \alpha + I_3 n (\cos \alpha - \cos \beta) < 0 \Rightarrow \dot{\varphi} < 0$
- $\Omega_S < \Omega < \Omega_F$ – kąt θ początkowo maleje, $\dot{\varphi} > 0$.

