

Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

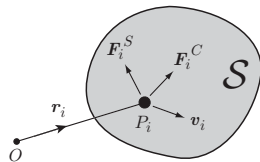
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 4

Więzy i współrzędne uogólnione

Ruch ciał często nie jest swobodny lecz ograniczony tzw. więzami (np. ruch cząstki może być ograniczony do zadanej krzywej lub powierzchni, bryła sztywna, gaz w pojemniku, itp.).

Rozróżniamy więzy **geometryczne** (zależne tylko od $\{\vec{r}_i\}$) oraz **kinematyczne** (zależne także od $\{\vec{v}_i\}$).



Przykłady więzów geometrycznych:

- Ruch cząstki ograniczony do zadanej powierzchni: $f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z) = 0$, np.
$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$
- Cząstka na deformowalnej (ruchomej) powierzchni: $f(\vec{r}, t) \equiv f(x, y, z, t) = 0$.
- Dwie cząstki połączone sztywnym prętem o długości ℓ : $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - \ell^2 = 0$

Konfiguracją układu nazywamy zbiór $\{\vec{r}_i\}$ wszystkich możliwych położenia zgodnych z warunkami narzuconymi przez więzy.

Zbiór niezależnych zmiennych $\{q_1, \dots, q_n\}$ opisujących w pełni konfigurację układu nazywamy zbiorem **współrzędnych uogólnionych**.

Oznacza to, że znane są relacje $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$, gdzie $i = 1, \dots, N$.

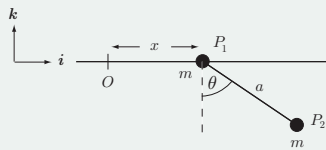
Więzy i współrzędne uogólnione

Przykład: Współrzędne uogólnione dla układu cząstek pokazanego na rysunku.

Zmienne x oraz θ są współrzędnymi uogólnionymi ponieważ są niezależne i pozwalają na pełny opis konfiguracji układu:

$$\vec{r}_1 = x\vec{i}$$

$$\vec{r}_2 = (x + a \sin \theta)\vec{i} - (a \cos \theta)\vec{k}$$



Liczba stopni swobody układu to liczba współrzędnych uogólnionych niezbędnych do opisu układu.

Uwaga: Liczba stopni swobody jest równa liczbie równań ruchu koniecznych do opisu ruchu układu.

Powyższa dyskusja jest prawdziwa dla więzów geometrycznych.

Więzy kinematyczne zawierają oprócz współrzędnych także prędkości, które mogą zależeć zarówno od $\{q_i\}$ jak i $\{\dot{q}_i\}$. Generalnie więzów kinematycznych nie można uwzględnić wprowadzając nowe współrzędne uogólnione i tego typu więzy trzeba uwzględnić jako dodatkowe (do równań ruchu) równania różniczkowe potrzebne do rozwiązania problemu.

Więzy kinematyczne całkowalne i niecałkowalne

- Więzy kinematyczne dzielimy na **całkowalne** i **niecałkowalne**.
Więzy całkowalne można sprowadzić do więzów geometrycznych.

Przykład: Cylinder toczący się bez poślizgu po równi pochyłej.

Warunek toczenia się bez poślizgu wzdłuż linii prostej oznacza, że $\dot{x} = r\dot{\theta}$.
(x - pozycja środka masy cylindra, lub θ - kąt obrotu względem środka masy).
Równanie to można scałkować otrzymując więz geometryczny $x = r\theta$, który można uwzględnić redukując liczbę współrzędnych uogólnionych.
Taki układ ma więc efektywnie tylko jeden stopień swobody.

- Więzów niecałkowalnych nie można sprowadzić do więzów geometrycznych.

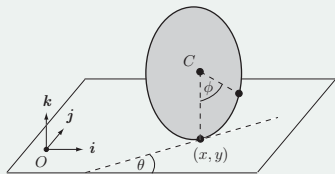
Przykład: Dysk o promieniu r toczący się po poziomej płaszczyźnie.

Układ ma cztery stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione wybieramy: x , y , θ oraz ϕ .

Warunek toczenia się bez poślizgu: $v = r\dot{\phi}$ daje dla składowych prędkości punktu C :

$$\dot{x} = r\dot{\phi} \cos \theta \quad \dot{y} = r\dot{\phi} \sin \theta$$

Równania te nie mogą być scałkowane ponieważ θ jest nieznaną funkcją czasu.



Więzy holonomiczne i nieholonomiczne

- Układ mechaniczny nazywamy **holonomicznym** jeśli występują w nim tylko więzy geometryczne lub kinematyczne całkowalne.
W przeciwnym wypadku układ nazywamy **nieholonomicznym**.
- Jeśli równanie więzów zależy od czasu to układ nazywamy **reonomicznym**.
W przeciwnym wypadku mówimy, że układ jest **skleronomiczny**.
- W przypadku więzów holonomicznych, zastosowanie współrzędnych uogólnionych prowadzi do tożsamościowego spełnienia równań więzów.

Przykład: Podwójne wahadło w ustalonej płaszczyźnie.

Układ ma dwa stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione wybieramy: $q_1 = \theta_1$ oraz $q_2 = \theta_2$:

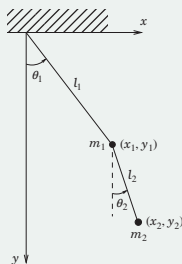
$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad y_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \quad y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

Równania więzów są spełnione tożsamościowo:

$$l_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_1^2 \cos^2 \theta_1 - l_1^2 \equiv 0$$

$$l_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 - l_2^2 \equiv 0$$



Przestrzeń konfiguracyjna

- Zbiór współrzędnych uogólnionych $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ wygodnie jest traktować jako punkt w n -wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej.

- Pozycja punktu w przestrzeni konfiguracyjnej w pełni określa konfigurację układu poprzez relacje:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}), \quad i = 1, \dots, N$$

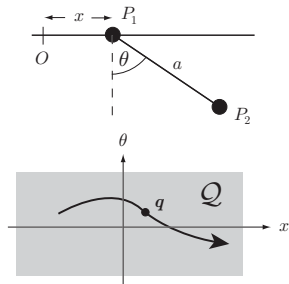
- Pochodne czasowe $\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ nazywamy uogólnionymi prędkościami układu S.

- Ponieważ $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q})$ oraz $\vec{q} = \vec{q}(t)$, więc prędkości cząstek układu są liniowymi kombinacjami prędkości uogólnionych:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

- Przyspieszenia cząstek układu dane są przez:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right] = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j$$



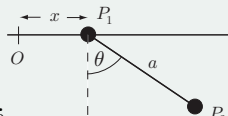
Przykład: Energia kinetyczna układu punktów P_1 i P_2

Ponieważ prędkości punktów są odpowiednio równe:

$$\vec{v}_1 = \dot{x}\vec{i} \quad \text{oraz} \quad \vec{v}_2 = \dot{x}\vec{i} + (a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{k})\dot{\theta}$$

więc energia kinetyczna układu wyraża się przez:

$$T = \frac{1}{2}m(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) + \frac{1}{2}m(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + (ma \cos \theta)\dot{x}\dot{\theta}$$



Energia kinetyczna układu cząstek jest jednorodną formą kwadratową w zmiennych $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = \sum_{j,k=1}^n a_{kj}(\vec{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j$$

gdzie
$$a_{kl}(\vec{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right).$$

Zasada D'Alemberta

- Równania Newtona dla dowolnego układu N cząstek:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^S + \vec{F}_i^C \quad i = 1, \dots, N$$

gdzie \vec{F}^S to siły przyłożone, a \vec{F}^C to nieznanne siły więzów.

- Wirtualnym przesunięciem** nazywamy każde przesunięcie zgodne z nałożonymi więzami, **w ustalonej chwili czasu**:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

δq_j to wirtualne przesunięcia w przestrzeni konfiguracyjnej.

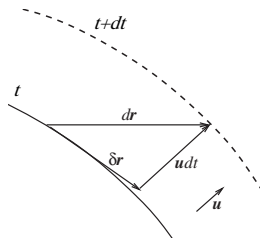
- Zasada d'Alemberta**: Ponieważ więzy nie wykonują wirtualnej pracy, więc

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^C \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^S - m_i \dot{\vec{v}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

- Wirtualna praca wykonana przy przesunięciu $\delta \vec{r}_i$ wynosi:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^S \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \vec{F}_i^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

gdzie $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ to tzw. **uogólnione siły**.



Równania Lagrange'a

Drugi wyraz występujący w zasadzie D'Alemberta przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j = \dots\end{aligned}$$

Ponieważ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\dots &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a

- Z zasady D'Alemberta otrzymujemy więc:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j - Q_j \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n$$

- W przypadku układów zachowawczych, $\vec{F}_j = -\vec{\nabla} \cdot V$, siły uogólnione można zapisać jako:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

a równania Lagrange'a przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n$$

Ponieważ $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, więc równanie te można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

gdzie $L = T - V$ to funkcja Lagrange'a lub lagrangian (lagranżjan).

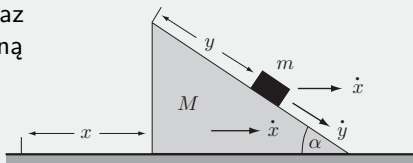
Zastosowania równań Lagrange'a

Przykład: Blok zsuwający się bez tarcia po równi, która także może się poruszać bez tarcia po poziomej powierzchni.

Jako współrzędne uogólnione wybieramy x oraz y jak na rysunku. Obliczamy energie kinetyczną i potencjalną układu:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha)$$

$$V = -mgy\sin\alpha$$



Obliczamy wielkości potrzebne do równań Lagrange'a:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m\cos\alpha\dot{y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\cos\alpha\dot{x} + m\dot{y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -mg\sin\alpha.$$

Równania Lagrange'a przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} [(M + m)\dot{x} + m\cos\alpha\dot{y}] - 0 = 0$$

$$\frac{d}{dt} [m\cos\alpha\dot{x} + m\dot{y}] - 0 = mg\sin\alpha$$

Po zróżniczkowaniu i rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

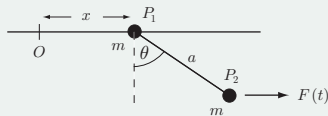
$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \quad \ddot{y} = \frac{(M + m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

Zastosowania równań Lagrange'a

Przykład: Znajdź równania Lagrange'a dla układu przedstawionego na rysunku. Punkt P_1 ślizga się bez tarcia. Brak siły grawitacji. Na punkt P_2 działa siła $\vec{F}(t)$.

Jako współrzędne uogólnione wybieramy x oraz θ jak na rysunku.

Siła zależna od czasu nie może być przedstawiona za pomocą potencjału. W tej sytuacji musimy obliczyć siły uogólnione z definicji.



Ponieważ $\vec{F}_1^S = 0$, $\vec{F}_2^S = F(t)\vec{i}$, $\vec{r}_1 = x\vec{i}$, $\vec{r}_2 = (x + a \sin \theta)\vec{i} - a \cos \theta \vec{k}$ więc:

$$Q_x = \vec{F}_1^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} + \vec{F}_2^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} = 0 + F(t)\vec{i} \cdot \vec{i} = F(t)$$

$$Q_\theta = \vec{F}_1^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} + \vec{F}_2^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} = 0 + F(t)\vec{i} \cdot (a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{k}) = a \cos \theta F(t)$$

Energia kinetyczna układu $T = m\dot{x}^2 + (ma \cos \theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$

Równania Lagrange'a: $\frac{d}{dt} [2m\dot{x} + (ma \cos \theta)\dot{\theta}] = F(t)$

$$\frac{d}{dt} [(ma \cos \theta)\dot{x} + m\dot{\theta}] - [-(ma \sin \theta)\dot{x}\dot{\theta}] = (a \cos \theta)F(t)$$

Równania Lagrange'a - przykład

Przykład: Cząstka o masie m ślizga się po wewnętrznej powierzchni stożka (rysunek). Znajdź równanie ruchu cząstki.

Jako współrzędne uogólnione wybieramy współrzędne cylindryczne r , θ oraz z .

Korzystając z równania więzów $z = r / \operatorname{tg} \alpha$ możemy wyeliminować jedną ze współrzędnych.

Energia kinetyczna:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \dot{r}^2 / \sin^2 \alpha + \frac{r^2}{\dot{\theta}^2}$$

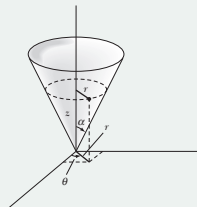
Energia potencjalna ($V(z=0) = 0$): $V = mgz = mgr \operatorname{ctg} \alpha$

Lagrangian: $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 / \sin^2 \alpha + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \operatorname{ctg} \alpha$

Ponieważ L nie zależy bezpośrednio od θ więc mamy:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \operatorname{const} - \text{moment pędu wokół osi } z.$$

Równanie ruchu dla współrzędnej r : $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0$



Równania Lagrange'a - przykład

Przykład: Znajdź okres małych drgań wahadła matematycznego umieszczonego w wagonie poruszającym się z przyspieszeniem \vec{a} w kierunku osi x .

Warunki początkowe: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Pozycja i prędkość masy m :

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + l \sin \theta \quad y = -l \cos \theta$$

$$\dot{x} = v_0 + a t + l \dot{\theta} \sin \theta \quad \dot{y} = l \dot{\theta} \cos \theta$$



Lagrangian: $L = T - V = \frac{1}{2} m (v_0 + a t + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} m (l \dot{\theta} \sin \theta)^2 + m g l \cos \theta$

Równanie ruchu dla współrzędnej θ : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{a}{l} \cos \theta$

Znajdujemy punkt równowagi $\theta = \theta_e$ żądając aby $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_e = -\frac{a}{g}$:

Rozważamy małe drgania wokół punktu równowagi, $\theta = \theta_e + \eta$, gdzie η jest małe:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\eta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta_e + \eta) - \frac{a}{l} \cos(\theta_e + \eta)$$

Zachowując wiodące wyrazy w rozwinięciu $\sin \eta$ i $\cos \eta$ otrzymujemy:

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{l} (g \cos \theta_e - a \sin \theta_e) \eta \Rightarrow \ddot{\eta} = -\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l} \eta \Rightarrow T = 2\pi \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{a^2 + g^2}}$$

Układy standardowe z ruchomymi więzami

- Teorię równań Lagrange'a można rozszerzyć na klasę problemów z więzami zależnymi od czasu (np. cząstka zmuszona do określonego ruchu, cząstka związana z ruchomą powierzchnią).
- Konfiguracja układu określona jest za pomocą relacji:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad i = 1, \dots, N$$

- Natomiast energia kinetyczna jest niejednorodną formą kwadratową:

$$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(\vec{q}, t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n b_j(\vec{q}, t) \dot{q}_j + c(\vec{q}, t)$$

- Ponieważ ruchome więzy wykonują pracę nad układem, więc całkowita energia $T + V$ nie jest zachowana.
- Jednak wykonana przez więzy praca wirtualna $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^C \cdot (\partial \vec{r}_i / \partial q_j) \delta q_j = 0$, a więc spełnione są równania Lagrange'a.

Układy standardowe z ruchomymi więzami

Przykład: Rozważmy wahadło, którego punkt zawieszenia porusza się w zadany sposób, np. $Z(t) = Z_0 \cos(pt)$.

Wektor wodzący punktu P :

$$\vec{r} = (a \sin \theta) \vec{i} + (Z(t) + a \cos \theta) \vec{k}$$

Energie kinetyczna i potencjalna układu:

$$T = \frac{1}{2} m \left(a^2 \dot{\theta}^2 + \dot{Z}^2 - 2a\dot{\theta}\dot{Z} \sin \theta \right)$$

$$V = -mg(Z + a \cos \theta)$$

Równanie E-L dla θ : $\frac{d}{dt} ma(a\dot{\theta} - \dot{Z} \sin \theta) + ma\dot{\theta}\dot{Z} \cos \theta = -mga \sin \theta$

$$\ddot{\theta} + \left(\Omega^2 + \frac{Z_0 p^2}{a} \cos(pt) \right) \sin \theta = 0, \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

W celu znalezienia rozwiązań numerycznych wprowadzamy bezwymiarowe parametry: $\tau = pt$, $p/\Omega = 1.1$ (górnny), 1.9 (dolny) oraz $Z_0/a = 0.2$:

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \left(\frac{\Omega^2}{p^2} + \left(\frac{Z_0}{a} \right) \cos \tau \right) \sin \theta = 0$$

