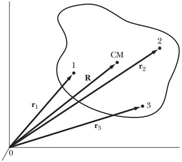
Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 7

Masa zredukowana

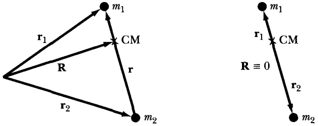


- Środkiem masy układu cząstek nazywamy:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha} m_\alpha \vec{r}_\alpha \quad \text{gdzie} \quad M = \sum_{\alpha} m_\alpha$$

lub

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad \text{gdzie} \quad M = \int \mathrm{d}m$$



- Dla układu dwóch cząstek mamy:

niech $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ oraz $\vec{R} = 0$:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \quad \text{oraz} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Zakładając, że energia potencjalna układu tych dwóch cząstek zależy jedynie od ich wzajemnej odległości, możemy zapisać lagranżjan w postaci:

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{r}}_2|^2 - V(r) = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - V(r)$$

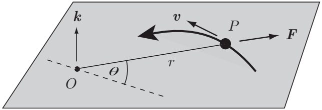
gdzie $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ nazywamy masą zredukowaną.

Ruch w polu centralnym

- Pole siły $\vec{F}(\vec{r})$ nazywamy polem centralnym o środku O jeśli ma postać:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$$

- Każde pole centralne jest polem zachowawczym: $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$
- Równania ruchu we współrzędnych biegunowych:



$$\mu\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial r} = F(r)$$

$$\mu\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu r^2\dot{\theta} = l = const$$

A więc ruch dowolnej cząstki w polu centralnym odbywa się w płaszczyźnie.

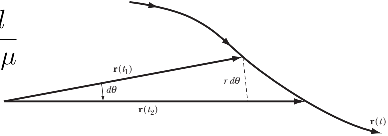
- Współrzędna θ jest współrzędną cykliczna, a więc:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad \text{oraz} \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}$$

- Zachowanie momentu pędu jest równoważne II prawu Keplera:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2\mu}$$

II prawo Keplera jest słuszne w dowolnym polu siły centralnej (nie tylko $F(r) \propto r^{-2}$).

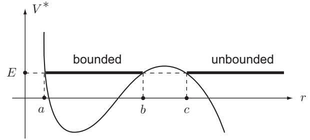


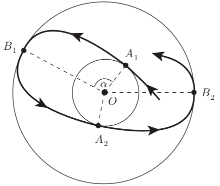
Ruch orbitalny

- Korzystając z zasad zachowania całkowitej energii i momentu pędu:
$$\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = E \qquad \mu r^2\dot{\theta} = l$$
znajdujemy równanie różniczkowe opisujące ruch w zmiennej r:
$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = E \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V^\star(r) = E \quad \text{gdzie} \quad V^\star(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$
A stąd $\quad \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V^\star\right)} \quad \Rightarrow \quad t(r) = \ldots \quad \Rightarrow \quad r(t) = \ldots$

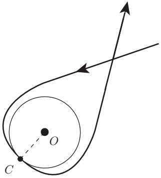
Ponieważ $\quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad \theta(r) = \int \frac{\pm(l/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu\left(E - V^\star\right)}}$

- Ruch cząstki w polu sił jest możliwy tylko dla $V^\star \leqslant E$





bounded orbit



unbounded orbit

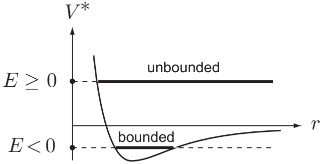
Ruch orbitalny

- Apsyda - punkt orbity w którym obiekt znajduje się w minimalnej lub maksymalnej odległości od źródła pola.

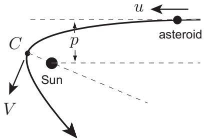
  peryhelium - punkt orbity najbliższy od Słońca
  aphelium - punkt orbity najbardziej oddalony od Słońca

  Analogiczne terminy dla orbit wokół Ziemi noszą nazwy perygeum i apogeum.

  Dla apsyd mamy $\dot{r} = 0$, więc $V(r) + \dfrac{l^2}{2\mu r^2} = E$



- Dla pola grawitacyjnego: $V^\star = -\dfrac{\gamma}{r} + \dfrac{l^2}{2\mu r^2}$
  - orbita związana jesli $E < 0$
  - orbita niezwiązana jeśli $E \geqslant 0$
- Przykład: Asteroida zbliża się do Słońca z dużej odległości z parametrem zderzenia p oraz prędkością początkową u. Znajdź położenia apsyd jej orbity.



Z warunków początkowych $l = \mu p u$ oraz $E = \dfrac{1}{2}\mu u^2 > 0$ wynika, że orbita jest niezwiązana oraz:

$$-\frac{\gamma}{r} + \frac{p^2u^2}{2r^2} = \frac{1}{2}u^2 \quad \Rightarrow \quad u^2r^2 + 2\gamma r - p^2u^2 = 0$$

Równanie orbity

- Rezygnujemy z wyznaczania zależności położenia na orbicie od czasu, na rzecz znalezienia samego równania orbity. Wprowadzamy zmienną $u = 1/r$, wtedy:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -r^2\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

Ponieważ $r\dot{\theta}^2 = \dfrac{l^2}{\mu^2 r^3} = \dfrac{l^2u^3}{\mu^2}$ więc

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad \Rightarrow \quad -\frac{l^2u^2}{\mu}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{l^2u^3}{\mu} = F(1/u)$$

Równanie orbity w polu siły centralnej $\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$ ma więc postać:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2}F(1/u) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2}F(r)$$

Warunki początkowe to wartości $u = \dfrac{1}{r}$ oraz $\dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{\mu}{l}\dot{r}$ dla $\theta = \alpha$.

Równanie orbity

Przykład: Znajdź siłę centralną $F(r)$ oraz $r(t)$ i $\theta(t)$, jeśli cząstka umieszczona w polu tej siły porusza się po spirali $r = k\exp(\alpha\theta)$, gdzie α i θ to stałe.

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{e^{-\alpha\theta}}{k}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\alpha e^{-\alpha\theta}}{k}\right) = \frac{\alpha^2 e^{-\alpha\theta}}{k} = \alpha^2 u$$

Z równania orbity: $\quad F(r) = -\frac{l^2 u^2}{\mu}(\alpha^2 u + u) = -\frac{l^2}{\mu r^3}(\alpha^2 + 1)$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} = \frac{l}{\mu k^2 e^{2\alpha\theta}} \quad \Rightarrow \quad e^{2\alpha\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{l}{\mu k^2}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{2\alpha l t}{\mu k^2} + C\right)$$

$$\frac{r^2}{k^2} = e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha l t}{\mu k^2} + C \quad \Rightarrow \quad r(t) = \left[\frac{2\alpha l}{\mu}t + k^2 C\right]^{1/2}$$

Stałą C oraz moment pędu l wyznaczamy z warunków początkowych. Zakładając, że $V(\infty) = 0$ mamy:

$$V(r) = -\int F(r)\mathrm{d}r = \frac{l^2}{\mu}(\alpha^2 + 1)\int r^{-3}\mathrm{d}r = -\frac{l^2}{2\mu}(\alpha^2 + 1)\frac{1}{r^2}$$

Całkowita energia: $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\alpha l}{\mu r}\right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{l^2(\alpha^2+1)}{2\mu r^2} = 0$

Równanie orbity - przykład

Przykład: Statek kosmiczny z uszkodzonymi silnikami porusza się z prędkością V po torze o parametrze zderzenia p w stosunku do pewnej planety. Wiadomo, że stała γ w sile przyciągania planety $\vec{F} = -\frac{\mu\gamma}{r^3}\hat{r}$ dana jest przez $\gamma = \frac{8p^2V^2}{9}$.
Pokaż, że statek okrąży planetę, a następnie powróci na oryginalny kurs.

Mamy: $F(r) = -\mu\gamma/r^3 \quad \Rightarrow \quad F(1/u) = -\mu\gamma u^3$ oraz $l = \mu p V$.

Równanie orbity przyjmuje więc postać:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu^2\gamma u^3}{\mu^2 p^2 V^2 u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{u}{9} = 0$$

Jego ogólnym rozwiązaniem jest $u = A\cos(\theta/3) + B\sin(\theta/3)$

Wyznaczenie stałych z warunków początkowych:

$$r = \infty \quad \text{dla} \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \text{dla} \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$
$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{l} = -\left(\frac{-V}{pV}\right) = \frac{1}{p} \quad \text{dla} \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{p}$$

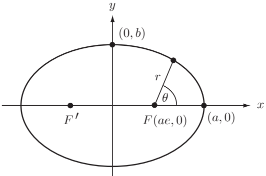
Poszukiwane rozwiązanie ma postać: $u = \frac{3}{p}\sin(\theta/3) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{p}{3\sin(\theta/3)}$

Wnioski: $r \to \infty$ dla $\theta = 3\pi$; punkt orbity najbliższy źródła: $r = \frac{p}{3}$ dla $\theta = \frac{3}{2}\pi$

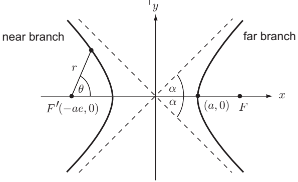
Siła centralna proporcjonalna do $1/r^2$

- Niech $F(r) = -\mu\gamma/r^2$ gdzie $\gamma > 0$, wówczas równanie orbity ma postać:
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mu^2\gamma}{l^2}$$
a jego ogólnym rozwiązaniem jest:
$$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{\mu^2\gamma}{l^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu^2\gamma}{l^2}\left(1 + e\cos\left(\theta - \alpha\right)\right)$$
gdzie $e \geqslant 0$ oraz α są stałymi wyznaczanymi z warunków początkowych.

- Jest to rówanie krzywej stożkowej:
  - $e < 1$ - elipsa $\quad \dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{b^2}(1 + e\cos\theta), \quad e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$
  - $e = 1$ - parabola
  - $e > 1$ - hiperbola $\quad \dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{b^2}(\pm 1 + e\cos\theta), \quad e^2 = 1 + \dfrac{b^2}{a^2}$



- Porównując równanie orbity dla $F \propto r^{-2}$ z równaniami krzywych stożkowych, znajdujemy związek momentu pędu z parametrami orbity:
$$l^2 = \frac{\mu^2\gamma b^2}{a}$$



Siła centralna proporcjonalna do $1/r^2$

- W punkcie największego zbliżenia $r = c$ obiekt porusza się poprzecznie do źródła pola z prędkością V. Całkowita energia dana jest przez:

$$E = \frac{1}{2}\mu V^2 - \frac{\gamma\mu}{c} = \Big\{ l = c\mu V \Big\} = \frac{l^2}{2\mu c^2} - \frac{\gamma\mu}{c} = \frac{\gamma\mu b^2}{ac^2} - \frac{\gamma\mu}{c}$$

- Dla ruchu po elipsie mamy: $c = a(1-e)$ oraz $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, a więc energia:

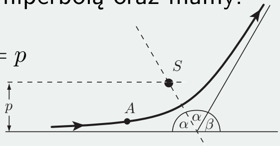
$$E = \frac{\gamma\mu a^2(1-e^2)}{2a^3(1-e)^2} - \frac{\gamma\mu}{a(1-e)} = -\frac{\gamma\mu}{2a} < 0$$

- Podobnie znajdujemy, że dla paraboli $E = 0$ oraz dla hiperboli $E = \dfrac{\gamma\mu}{2a} > 0$

Przykład: Znajdź kąt odchylenia przez Słońce ($\gamma = M_\odot G$) asteroidy poruszającej się początkowo z parametrem zderzenia p i prędkością V.

Ponieważ $l = \mu p V$ oraz $E = \frac{1}{2}\mu V^2$ więc trajektoria jest hiperbolą oraz mamy:

$$p^2V^2 = \frac{M_\odot G b^2}{a} \qquad \frac{1}{2}V^2 = \frac{M_\odot G}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{M_\odot G}{V^2}, \quad b = p$$



Kąt pomiędzy asymptotami hiperboli $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{pV^2}{M_\odot G}$

Kąt β odchylenia asteroidy wynosi $\beta = \pi - 2\alpha$ czyli $\quad \operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{M_\odot G}{pV^2}$

Okres obiegu po orbicie eliptycznej

- Bez względu na rodzaj siły centralnej, jeśli znamy trajektorię, to zależność ruchu obiektu od czasu można wyznaczyć z prawa zachowania momentu pędu:

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\mu}{l} \int\limits_0^{\theta} r^2 d\theta \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\mu}{l} \int\limits_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

- Ponieważ dla każdej zamkniętej trajektorii mamy $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = A$, więc w szczególności ponieważ dla elipsy $(A = \pi ab)$ dostajemy:

$$\tau = \frac{2\pi ab\mu}{l} = \left\{ l^2 = \frac{\mu^2 \gamma b^2}{a} \right\} = 2\pi \left(\frac{a^3}{\gamma} \right)^{1/2}$$

  Wstawiając $\gamma = M_\odot G$ otrzymujemy III prawo Keplera: $\tau^2 = \left(\frac{4\pi^2}{M_\odot G} \right) a^3$

  które jest słuszne jedynie dla sił proporcjonalnych do $1/r^2$.

- W jednostkach astronomicznych ($M_\odot$, AU, rok) mamy $G = 4\pi^2$ oraz $\tau^2 = \frac{a^3}{M}$
- Przykład: Wiedząc, że okres obiegu Plutona wokół Słońca wynosi 248 lat, wyznacz długość dłużesz półosi jego orbity - 39.5 AU.

Zależność od czasu - równanie Keplera

Czas potrzebny do osiągnięcia dowolnego punktu P na orbicie można wyliczyć z:

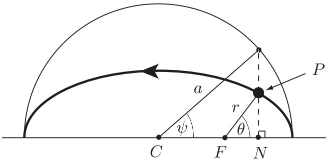
$$\mu r^2\dot{\theta} = l \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\mu}{l}\int_0^\theta r^2 d\theta \quad \Rightarrow \quad t(\theta) = \ldots$$

Dużo prostszą formułę otrzymuje się jednak dla kąta ψ (rysunek).

Ponieważ

$$CN = CF + FN \quad \Rightarrow \quad a\cos\psi = ae + r\cos\theta$$

z równania elipsy $\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 + e\cos\theta)$



otrzymujemy $(1 - e\cos\psi)(1 + e\cos\theta) = \frac{b^2}{a^2}$

Po zróżniczkowaniu mamy: $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi} = \frac{b}{a(1 - e\cos\psi)}$

A więc:

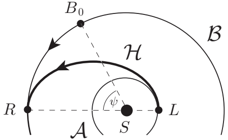
$$t = \frac{1}{l}\int_0^\theta r^2\mathrm{d}\theta = \frac{b^4}{a^2 l}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{b^4}{a^2 l}\int_0^\psi \frac{1}{(1 + e\cos\theta)^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi}\,\mathrm{d}\psi =$$

$$= \frac{ab}{l}\int_0^\psi (1 - e\cos\psi)\mathrm{d}\psi = \frac{ab}{l}(\psi - e\sin\psi) = \left\{ l^2 = \gamma b^2/a \right\} = \frac{\tau}{2\pi}(\psi - e\sin\psi)$$

Podróże kosmiczne

Aby zminimalizować zużycie paliwa w podróży z jednej orbity kołowej na inną, musimy zminimalizować wielkość (rozpatrujemy tylko trnsfer pomiędzy orbitami planet - zaniedbujemy start i lądowanie):

$$Q = |\Delta\vec{v}^A| + |\Delta\vec{v}^B|$$



Orbita, która łączy dwie planety i minimalizuje Q nazywana jest orbitą transferu Hohmanna (start - peryhelium, lądowanie - aphelium):

$$r_A = a(1-e) \qquad r_B = a(1+e) \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}(r_A + r_B) \qquad e = \frac{r_B - r_A}{r_B + r_A}$$

Moment pędu orbity wynosi: $l^2 = \dfrac{\gamma b^2}{a} = \gamma(1-e^2)a = \dfrac{2M_\odot G r_B r_A}{r_B + r_A}$

Prędkości po pierwszym uruchomieniu silników i przed drugim uruchomieniem:

$$v = \frac{l}{r} \qquad \Rightarrow \qquad v^L = \left(\frac{2M_\odot G r_B}{r_A(r_B + r_A)}\right)^{1/2} \qquad v^R = \left(\frac{2M_\odot G r_A}{r_B(r_B + r_A)}\right)^{1/2}$$

Całkowity czas podróży (połowa okresu orbity): $T^2 = \dfrac{\pi^2 a^3}{\gamma} = \dfrac{\pi^2 (r_B + r_A)^3}{8M_\odot G}$

Aby doszło do spotkania start musi odbyć się pod kątem $\psi = \pi\left(\dfrac{r_B + r_A}{2r_B}\right)^{3/2}$