

# Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

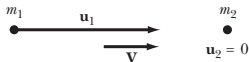
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 8

# Zderzenie elastyczne cząstek

Rozpatrujemy zderzenie cząstki o masie  $m_1$  i prędkości  $\vec{u}_1$  ze spoczywającą cząstką o masie  $m_2$ , w układach laboratoryjnym (LAB) i środka masy (CM).

Laboratory System

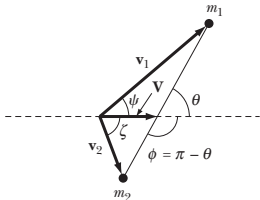


(a) Initial condition

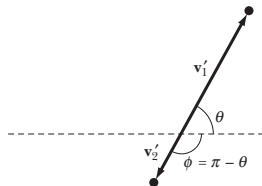
Center-of-Mass System



(b) Initial condition



(c) Final condition



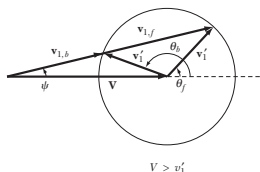
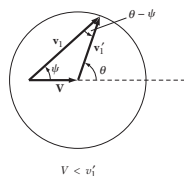
(d) Final condition

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \frac{m_1 \vec{u}_1}{m_1 + m_2} \quad \text{oraz} \quad \vec{u}'_2 = -\vec{V}$$

# Zderzenie elastyczne cząstek

Z zasad zachowania energii kinetycznej i pędu, wynika że w CM zachodzi:

$$\begin{aligned}v_1' &= u_1', & v_2' &= u_2' \\v_2' &= \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \\v_1' &= u_1 - u_2' = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$



Ponieważ  $v_1' \sin \theta = v_1 \sin \psi$  oraz  $v_1' \cos \theta + V = v_1 \cos \psi$

więc 
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{v_1' \sin \theta}{v_1' \cos \theta + V} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (V/v_1')} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (m_1/m_2)}$$

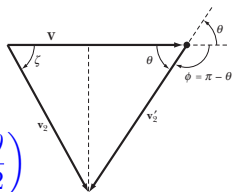
Wnioski:  $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \psi \approx \theta$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \psi = \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Dla cząstki  $m_2$  mamy:

$$v_2 \sin \zeta = v_2' \sin \theta \quad \text{oraz} \quad v_2 \cos \zeta = V - v_2' \cos \theta$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{v_2' \sin \theta}{V - v_2' \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{(V/v_2') - \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right)$$



# Zderzenie elastyczne cząstek

A więc  $2\zeta = \pi - \theta = \phi$

W przypadku cząstek o równych masach mamy  $\theta = 2\psi$  skąd wynika  $\zeta + \psi = \frac{\pi}{2}$ .

Wniosek: W przypadku zderzenia elastycznego cząstek o równych masach, z których jedna początkowo spoczywa, cząstki rozpraszają się tworząc kąt prosty.

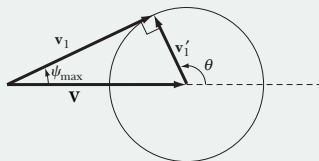
Przykład: Jaki jest maksymalny kąt  $\psi$  w przypadku gdy  $V > v'_1$ ?

Dla maksymalnego  $\psi$  wektory  $v'_1$  i  $v_1$  są prostopadłe, czyli

$$\sin \psi_{max} = \frac{v'_1}{V} = \frac{m_2}{m_1}$$

Wnioski:  $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \psi_{max} = 0$   
(brak rozpraszania)

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \psi_{max} = \frac{\pi}{2}$$



Wsteczne rozpraszanie niemożliwe dla

$$\frac{V}{v'_1} = \frac{m_1 u_1 / (m_1 + m_2)}{m_2 u_1 / (m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_2} > 1$$

# Kinematyka zderzenia elastycznego

Początkowe energie kinetyczne układu cząstek w LAB i CM:

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 \quad T'_0 = \frac{1}{2}(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} u_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0$$

Po rozproszeniu, w układzie CM, odpowiednio dla cząstek  $m_1$  i  $m_2$ , mamy:

$$T'_1 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 = \frac{1}{2}m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 T_0$$

$$T'_2 = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_0$$

Korzystając z wcześniej otrzymanych związków pomiędzy prędkościami i kątami w układach LAB i CM, można pokazać, że stosunek energii kinetycznych cząstki  $m_1$  po i przed rozproszeniem w LAB jest równy:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2} = \frac{v_1^2}{u_1^2} = 1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta)$$

lub

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[ \cos \psi \pm \sqrt{\left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 - \sin^2 \psi} \right]^2$$

Znak + występuje dla  $m_1 < m_2$  - w przeciwnym razie mamy dwa rozwiązania.

# Kinematyka zderzenia elastycznego

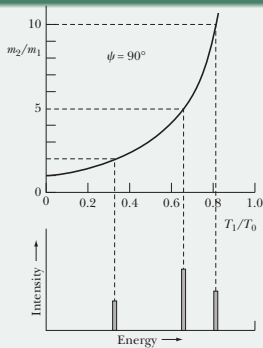
Przykład: Możliwy jest pomiar składu tarczy na podstawie rozkładu energii cząstek rozproszonych pod danym kątem.

Dla  $\psi = \pi/2$  mamy:  $\alpha \equiv \frac{T_1}{T_0} = \frac{m_2^2 - m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 (1 - \alpha) - 2\alpha \frac{m_2}{m_1} - 1 - \alpha = 0$$

A stąd  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$

Z wyników pokazanych na rysunku, wnioskujemy, że w skład tarczy wchodzi cząstki o masach:  
 $m_2 \approx 10m_1$ ,  $m_2 \approx 5m_1$  oraz  $m_2 \approx 2m_1$ .



Dla cząstki  $m_2$  w LAB mamy:

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \zeta, \quad \zeta \leq \frac{\pi}{2}$$

W przypadku gdy  $m_1 = m_2$  otrzymujemy:  $\frac{T_1}{T_0} = \cos^2 \psi$  oraz  $\frac{T_2}{T_0} = \sin^2 \psi$ .

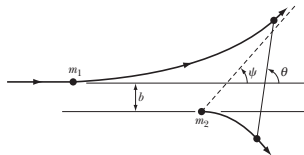
# Przekrój czynny na rozpraszanie

Rozważamy rozpraszanie cząstki  $m_1$  (o początkowej prędkości  $u_1$  na cząstce  $m_2$  (spoczywającej) zakładając istnienie siły odpychającej pomiędzy nimi.

Dla ustalonej energii kinetycznej  $T_0$ , moment pędu (a więc także kąt rozproszenia)

$$l = m_1 u_1 b = b \sqrt{2m_1 T_0}$$

zależy jedynie od parametru zderzenia  $b$ .



W oddziaływaniach cząstek elementarnych parametr zderzenia nie jest dokładnie znany. Dlatego możemy mówić jedynie o prawdopodobieństwie rozproszenia pod danym kątem  $\theta$  (lub  $\psi$ ).

W układzie CM definiujemy **różniczkowy przekrój czynny**  $\sigma(\theta)$ :

$$\sigma(\theta) \equiv \frac{\text{liczba oddziaływań na cząstkę tarczy w wyniku których rejestrujemy cząstkę rozproszoną w kącie bryłowym } d\Omega' \text{ wokół kąta } \theta}{\text{liczba cząstek padających na jednostkę powierzchni}}$$

lub  $\sigma(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega'}$  gdzie  $I$  oznacza intensywność wiązki (liczba cząstek padających przechodzących w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku wiązki).

# Przekrój czynny na rozpraszanie

Rozważmy problem jednociałowy (masa zredukowana, rozpraszanie na centrum siły w układzie CM) przy założeniu symetrii aksjalnej.

Ponieważ  $I \cdot 2\pi b db = -I \cdot \sigma(\theta) \cdot d\Omega' = -I \cdot \sigma(\theta) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta$

więc dostajemy:  $\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$

Ponieważ  $\Delta\Theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu(E - V^*)}}$

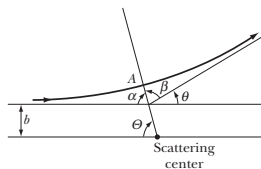
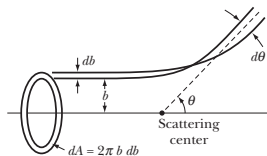
oraz  $\theta = \pi - 2\Theta$  i  $l = b\sqrt{2\mu T_0'}$ , więc:

$$\Theta(b) = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b^2/r^2) - (V/T_0')}}}$$

Transformacja do układu laboratoryjnego:

$$\sigma(\theta) d\Omega' = \sigma(\psi) d\Omega \Rightarrow \sigma(\psi) = \sigma(\theta) \cdot \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \psi d\psi}$$

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \cdot \frac{\left[ x \cos \psi + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi} \right]^2}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}}, \quad \text{gdzie } x \equiv \frac{m_1}{m_2} = \frac{V}{v_1'} = \frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi}$$





# Rozpraszanie Rutherforda

Rozpraszanie naładowanych cząstek w polu elektrostatycznym  $V(r) = \frac{k}{r}$

Równanie  $\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{(b/r)dr}{\sqrt{r^2 - (k/T_0')r - b^2}}$  można scałkować otrzymując

$$\cos \Theta = \frac{(\kappa/b)}{\sqrt{1 + (\kappa/b)^2}} \Rightarrow b = \kappa \operatorname{tg} \Theta = \left\{ \Theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right\} = \kappa \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

gdzie  $\kappa = \frac{k}{2T_0'}$

Przekrój czynny w układzie CM (formuła Rutherforda):

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{\kappa^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sin \theta \sin^2(\theta/2)} = \frac{\kappa^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{k^2}{(4T_0')^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

W przypadku gdy  $m_1 = m_2$  mamy  $T_0' = \frac{1}{2}T_0$  oraz:

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{4T_0^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \sigma(\psi) = \frac{k^2 \cos \psi}{T_0^2 \sin^2 \psi}$$

Uwaga: Wynik klasyczny identyczny z kwantowo-mechanicznym!

# Rozpraszanie na twardej sferze

Jednorodny strumień cząstek pada na sferę o promieniu  $a$ . Cząstki, które trafiają w sferę są rozpraszane elastycznie.

Cząstka pada pod kątem  $\psi$  (• na rysunku) i jest rozpraszana pod tym samym kątem:

$$p = a \sin \psi \Rightarrow \left\{ \theta = \pi - 2\psi \right\} \Rightarrow p = a \cos \frac{\theta}{2}$$

Różniczkowy przekrój czynny:

$$\sigma(\theta) = -\frac{p}{\sin \theta} \frac{dp}{d\theta} = -\frac{a \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \left( -\frac{1}{2} a \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{4} a^2$$

Oznacza to, że cząstki są rozpraszane izotropowo.

Całkowity przekrój czynny:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sigma(\theta) \sin \theta = 2\pi \left( \frac{1}{4} a^2 \right) \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \pi a^2$$

Całkowity przekrój czynny ma charakter czysto geometryczny - jest równy polu powierzchni koła wielkiego kuli na której następuje rozpraszanie.

W przypadku rozpraszania cząstek o promieniach  $r_1$  na cząstkach o promieniach  $r_2$ , całkowity przekrój czynny jest równy  $\sigma_{\text{tot}} = \pi(r_1 + r_2)^2$ .

