Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 9

Prosty oscylator harmoniczny

Zakładamy, że siła przywracająca układ do położenia równowagi ($x = 0$) zależy tylko od wychylenia:

$$F(x) = F(0) + \frac{dF}{dx}\bigg|_{x=0} x + \frac{1}{2!}\frac{d^2F}{dx^2}\bigg|_{x=0} x^2 + \ldots \qquad \text{gdzie} \quad F(0) = 0$$

Dla małych drgań mamy: $F(x) = -kx$ gdzie $k = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} > 0.$

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

Rozwiązania w postaci $x(t) = A\sin(\omega_0 t - \delta)$ lub $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$

Energia kinetyczna:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\cos^2(\omega_0 t - \delta) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t - \delta)$$

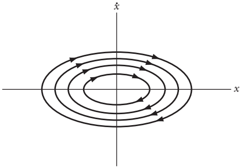
Energia potencjalna (praca niezbędna do przesunięcia cząstki na odległość x):

$$V = \int dW = -\int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t - \delta)$$

Całkowita energia jest zachowana: $E = T + V = \frac{1}{2}kA^2$

Prosty oscylator harmoniczny, diagram fazowy

Okres drgań: $\omega_0 \tau_0 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$



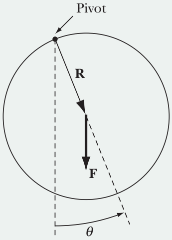
Ponieważ:
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \delta)$$
$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \delta)$$

więc eliminując czas dostajemy: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega_0^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1$

Powyższe równanie przedstawione graficznie nazywamy diagramem fazowym.

Przykład: Znajdź okres drgań sfery o masie m i promieniu R zawieszonej w punkcie na powierzchni.

Ponieważ: $$I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$
$$\vec{N} = \vec{R} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad N = Rmg\sin\theta$$



Dla małych drgań równanie ruchu ma postać ($\sin\theta \approx \theta$):

$$I\vec{\alpha} = \vec{N} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{Rmg}{I}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Rmg}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}}$$

Oscylator harmoniczny, równanie Lagrange'a

- Rozważmy układ zachowawczy z jednym stopniem swobody, opisany współrzędną uogólnioną q. Lagrangian i rówanie ruchu przyjmują postać:

$$L = \frac{1}{2}\alpha(q)\dot{q}^2 - V(q), \quad \Rightarrow \quad \alpha(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\alpha'(q)\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq}$$

- Jeśli potencjał posiada minimum, $\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=q^{(0)}} = 0$, oraz $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q^{(0)}} > 0$,

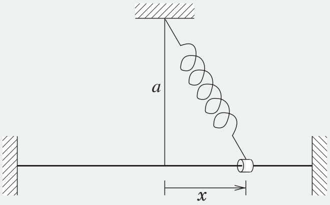
  to po wychyleniu z położenia równowagi układ będzie wykonywał oscylacje wokół punktu równowagi.

Przykład: Masa m ślizga się bez tarcia po sztywnym drucie w kształcie paraboli $y = x^2/R$, umieszczonym w płaszczyźnie pionowej w polu grawitacyjnym, $\vec{g} = -g\hat{y}$ Zapisz Lagrangian wybierając jako współrzędną uogólnioną $q = x$.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{4x^2}{R^2}\right)\dot{x}^2 - \frac{mg}{R}x^2$$

Oscylator harmoniczny, równanie Lagrange'a

Przykład: Masa m zamocowana z jednej strony na sprężynie o długości naturalnej ℓ i stałej sprężyskości k, ślizga się bez tarcia po sztywnym poziomym pręcie, jak na rysunku. znajdź punkty równowagi dla $\ell > a$ oraz $\ell < a$.



Lagrangian: $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+x^2} - \ell\right)^2$

Położenie równowagi:

$$\frac{dV}{dx} = k\left(\sqrt{a^2+x^2} - \ell\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0,\ x = \pm\sqrt{\ell^2 - a^2} \ \text{ dla } \ \ell > a$$

Dla $a > \ell$ mamy jedno stabilne położenie równowagi: $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} = k\left(1 - \frac{\ell}{a}\right) > 0$

Częstość kołowa małych drgań wokół $x = 0$ wynosi $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right)}$

Dla $a < \ell$ mamy trzy położenia równowagi: $x = 0$ (niestabilne, $V''(0) < 0$) oraz stabilne dla $x = \pm\sqrt{\ell^2 - a^2}$:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\pm\sqrt{\ell^2-a^2}} = k\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right)}$$

Drgania harmoniczne w dwóch wymiarach

Niech siła zawracająca będzie proporcjonalna do odległości od środka układu:

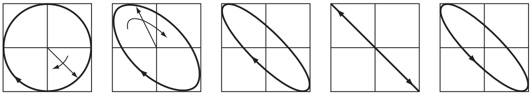
$$\vec{F} = -k\vec{r} \quad \Rightarrow \quad F_x = -kr\cos\theta = -kx \quad \text{oraz} \quad F_y = -kr\sin\theta = -ky$$

Równania ruchu: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ oraz $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ gdzie $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

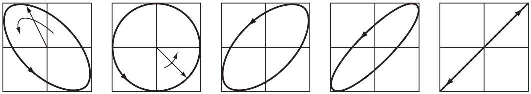
mają rozwiązania $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \alpha)$ oraz $y(t) = B\cos(\omega_0 t - \beta)$

Eliminując czas dostajemy:

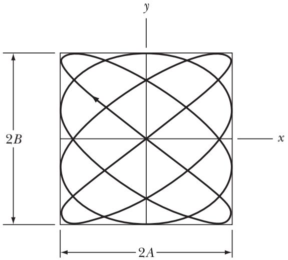
$$B^2x^2 - 2ABxy\cos\delta + A^2y^2 = A^2B^2\sin^2\delta \quad \text{gdzie} \quad \delta \equiv \alpha - \beta$$



$\delta = 90°$ $\delta = 120°$ $\delta = 150°$ $\delta = 180°$ $\delta = 210°$



$\delta = 240°$ $\delta = 270°$ $\delta = 300°$ $\delta = 330°$ $\delta = 360°$



W ogólnym przypadku częstości kołowe nie muszą być równe (krzywe Lissajous):

$$x(t) = A\cos(\omega_x t - \alpha) \quad \text{oraz} \quad x(t) = B\cos(\omega_y t - \beta)$$

Drgania tłumione

Prosty oscylator harmoniczny jest idealizacją. W praktyce drgania są tłumione. Jeśli siła tłumiąca draganie jest proporcjonalna do prędkości, $\vec{F} = -b\dot{\vec{r}}$, to wtedy równania ruchu Lagrange'a mają postać:

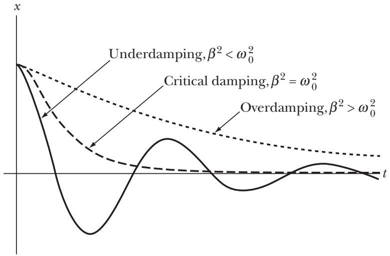
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 0$$

Funkcja dyssypacji Rayleigha, R: $\left\{ -b\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = -b\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{b}{2}\vec{v}^{\,2} \equiv -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} \right\}$

Równanie ruchu oscylatora jednowymiarowego:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

gdzie $\beta = b/2m$ jest parametrem tłumienia, oraz $\omega_0^2 = k/m$ jest charakterystyczną częstością kątową w przypadku braku tłumienia.



Ogólne rozwiązanie równania ruchu ma postać:

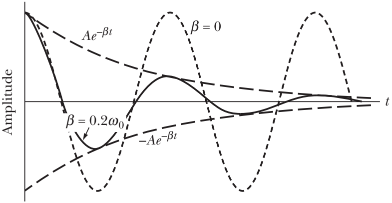
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left[A_1 \exp\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t\right)\right]$$

- słabe tłumienie: $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$

  Ogólne rozwiązanie przyjmuje postać:

$$x(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\beta t}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right)$$

lub $$x(t) \;=\; C\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\left(\omega_1 t - \gamma\right)$$

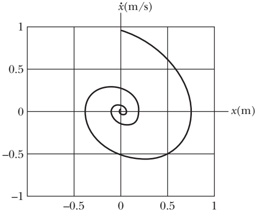


  Ruch periodyczny $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$.

  Diagram fazowy:

$$x(t) \;=\; A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\left(\omega_1 t - \delta\right)$$

$$\dot{x}(t) \;=\; -A\mathrm{e}^{-\beta t}\left[\beta\cos\left(\omega_1 t - \delta\right) + \omega_1\sin\left(\omega_1 t - \delta\right)\right]$$

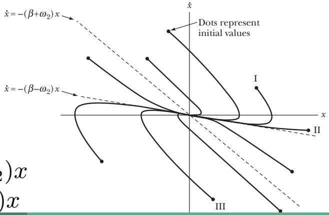


- tłumienie krytyczne: $\beta^2 = \omega_0^2$

$$x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\beta t}$$

- silne tłumienie: $\omega_2^2 = \beta^2 - \omega_0^2 > 0$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left(A_1\mathrm{e}^{\omega_2 t} + A_2\mathrm{e}^{-\omega_2 t}\right)$$



  Diagramy fazowe dla warunków początkowych:

  I $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$

  II $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) < 0$, start powyżej linii $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$

  III $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) < 0$, start poniżej linii $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$

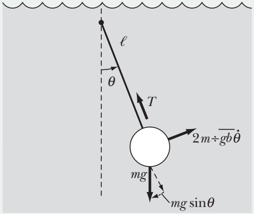
Drgania tłumione

Przykład: Ruch wahadła matematycznego o masie m i długości ℓ w oleju. Znajdź zależność wychylenia θ i prędkości kątowej $\dot{\theta}$ od czasu jeśli wiadomo, że siła oporu $F_{op} = 2m\sqrt{g/\ell}\,(\ell\dot{\theta})$. W chwili początkowej $\theta = \alpha$ oraz $\dot{\theta} = 0$.

Z r. Lagrange'a otrzymujemy równanie ruchu:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - 2m\sqrt{g/\ell}\,(\ell\dot{\theta})$$

$$\ddot{\theta} + 2\sqrt{g/\ell}\,\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\theta = 0$$



czyli $\omega_0^2 = \beta^2 = g/\ell$ - tłumienie krytyczne.

Mamy:

$$\theta(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\beta t}$$

$$\theta(0) = \alpha \quad \Rightarrow \quad A = \alpha$$

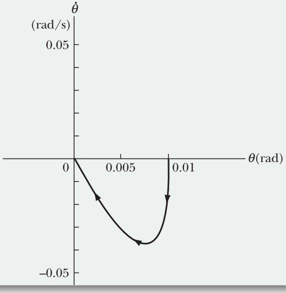
$$\dot{\theta}(t) = B\mathrm{e}^{-\beta t} - \beta(A + Bt)\mathrm{e}^{-\beta t}$$

$$\dot{\theta}(0) = B - \beta A \quad \Rightarrow \quad B = \beta\alpha$$

A więc:

$$\theta(t) = \alpha(1 + \sqrt{g/\ell}\,t)\,e^{-\sqrt{g/\ell}\,t}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\alpha g}{\ell}\,t\,e^{-\sqrt{g/\ell}\,t}$$



Drgania wymuszone

Rozważamy oscylator na który działa siła wymuszająca drgania $F_0 \cos \omega t$.

Równanie ruchu ma posatać:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t \quad \text{gdzie} \quad A = F_0/m$$

Rozwiązanie równania jednorodnego ma postać:

$$x_c(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 \exp\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t\right)\right]$$

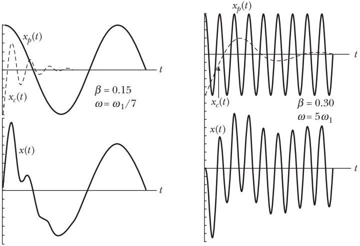
Rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci: $x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$

Wstawiając $x_p(t)$ do równania ruchu dostajemy:

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \sin\delta = ..., \quad \cos\delta = ...$$

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$$

Przykłady dla $\omega \lesseqgtr \omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.



gdzie δ oznacza różnicę faz pomiędzy siłą wymuszającą i odpowiedzią układu.

Ogólne rozwiązanie ma postać: $x(t) = x_c(t) + x_p(t) \xrightarrow[t \gg 1/\beta]{} x_p(t)$.

Drgania wymuszone

Przykład: Równanie ruchu pewnego oscylatora ma postać:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 10\cos t$$

Znajdź zależność położenia od czasu, wiedząc, że w chwili $t = 0$ ciało spoczywało w początku układu.

Dane: $2\beta = 3, \quad \omega_0^2 = 2, \quad A = 10, \quad \omega = 1$

Rozwiązanie równania jednorodnego:

$$x_c(t) = \mathrm{e}^{-(3/2)t}\left[A_1 \exp(t/2) + A_2 \exp(-t/2)\right] = A_1\mathrm{e}^{-t} + A_2\mathrm{e}{-2t}$$

Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego:

$$x_p(t) = \sqrt{10}\cos(t - \operatorname{arc\,tg} 3) = \cos t + 3\sin t$$

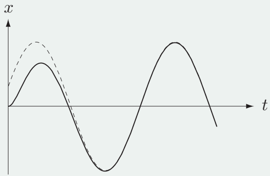
Rozwiązanie ogólne: $x(t) = x_c(t) + x_p(t) = A_1\mathrm{e}^{-t} + A_2\mathrm{e}^{-2t} + \cos t + 3\sin t$

Wyznaczamy stałe z warunków początkowych:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 + 1 \\ 0 &= -A_1 - 2A_2 + 3 \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = -5\mathrm{e}^{-t} + 4\mathrm{e}^{-2t} + \cos t + 3\sin t$$



Rezonans

Dla jakiej wartości ω_R amplituda D osiąga maksimum (rezonans amplitudy)?

$$\left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_{\mathrm{R}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\mathrm{R}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Amplituda dla częstości rezonansowej: $D_{\max} = \dfrac{A}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

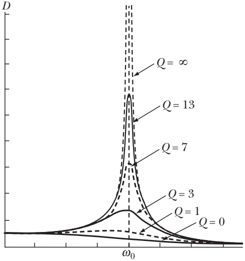
Uwaga: Dla $\beta > \omega_0/2$ rezonans nie występuje - amplituda D monotonicznie maleje ze wzrostem ω.

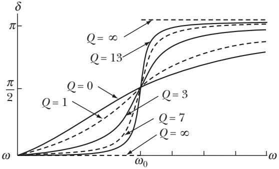
Rezonans energii kinetycznej: $T = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \dfrac{mA^2}{4} \cdot \dfrac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \sin^2(\omega t - \delta)$

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{4} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

$$\left.\frac{d\langle T \rangle}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_T = \omega_0$$

Definiujemy wielkość $Q \equiv \dfrac{\omega_R}{2\beta}$





Zasada superpozycji

Równanie ruchu harmonicznego w postaci operatorowej:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) x(t) = A\cos\omega t$$

Z definicji operatora liniowego wiemy, że:

$$\mathcal{L}x_1 = F_1(t),\ \mathcal{L}x_2 = F_2(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)$$

W szczególności jeśli $\displaystyle F(t) = \sum_n \alpha_n \cos\left(\omega_n t - \phi_n\right)$ to rozwiązania równania ruchu oscylatora można zapisać w postaci:

$$x(t) = \frac{1}{m}\sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2\beta^2}}\cos\left(\omega_n t - \phi_n - \delta_n\right)$$

$$\delta_n = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\omega_n\beta}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right)$$

Twierdzenie Fouriera: Dowolna funckja okresowa, $F(t+\tau) = F(t)$, może być przedstawiona w postaci szeregu funkcji harmonicznych:

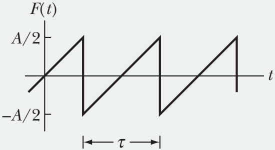
$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_m \sin n\omega t\right)$$

Twierdzenie Fouriera

gdzie
$$a_n = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^{\tau} F(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t)\cos(n\omega t)\,dt$$
$$b_n = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^{\tau} F(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Przykład: Znajdź rozwinięcie Fouriera dla podanej funkcji.

$F(t) = A\cdot\frac{t}{\tau} = \frac{\omega A}{2\pi}\,t,$ dla $-\tau/2 < t < \tau/2$



Ponieważ $F(-t) = -F(t)$ więc wszystkie $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} t\sin(n\omega t)\,dt = \frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

A więc: $F(t) = \dfrac{A}{\pi}\left[\sin\omega t - \dfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \dfrac{1}{3}\sin 3\omega t - \ldots\right]$