

Zestaw 5 / Ruch w polu centralnym:

1. Cząstka porusza się pod wpływem siły centralnej $F(r) = -k/r^n$. Pokaż, że jeśli orbita cząstki jest okręgiem przechodzącym przez środek pola, to wówczas $n = 5$.
2. Kometę porusza się po orbicie parabolicznej w płaszczyźnie orbity Ziemi. Pokaż, że jeśli odległość komety od Słońca, w punkcie największego jej zbliżenia się do Słońca, wynosi βr_Z , gdzie r_Z to promień orbity Ziemi, a $\beta < 1$, to czas (mierzony w latach) spędzony przez kometa wewnątrz orbity Ziemi wynosi:

$$\frac{1}{3\pi} \sqrt{2(1-\beta)(1+2\beta)}$$

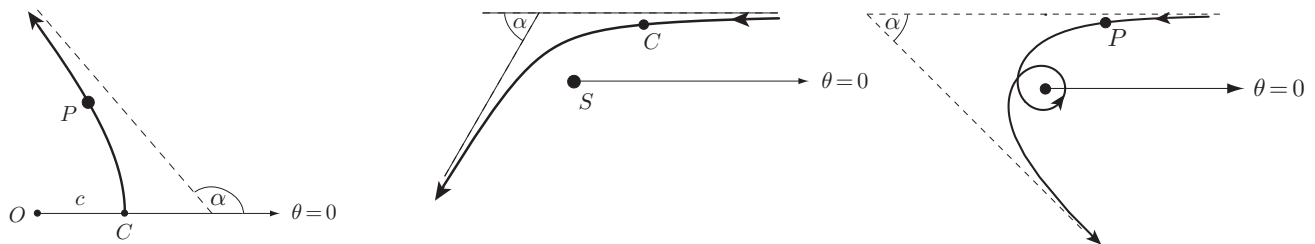
3. Znajdź postać siły centralnej, w polu której możliwy jest ruch cząstki po spirali $r = k\theta^2$, gdzie k jest stałą.
4. Cząstka o jednostkowej masie porusza się z nieskończoności wzdłuż linii o parametrze zderzenia $b\sqrt{2}$ względem punktu P . Zakładając, że punkt P jest źródłem siły centralnej $F(r) = k/r^5$, oraz że moment pędu cząstki względem punktu P wynosi \sqrt{k}/b , pokaż, że cząstka porusza się po trajektorii danej przez $r = b \operatorname{ctgh}(\theta/\sqrt{2})$.
5. Cząstka P porusza się w polu siły centralnej $F(r) = -m\gamma/r^2$. Początkowo znajduje się w punkcie C odległym od źródła pola o c (rysunek), skąd zostaje wystrzelona prostopadłe do linii OC z prędkością $\sqrt{3\gamma}/c$. Pokaż, że równanie trajektorii cząstki dane jest przez

$$r = \frac{3c}{1 + 2 \cos \theta}$$

6. Kometę poruszającą się pod wpływem siły grawitacyjnej Słońca, nadlatuje z dużej odległości z prędkością początkową V i parametrem zderzenia p . Znajdź kąt α , o jaki odchylna zostanie trajektoria komety (rysunek), oraz jej minimalną odległość od Słońca.
7. Cząstka o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej $F(r) = -m\gamma^2/r^3$, gdzie $\gamma > 0$. Początkowo znajdując się w dużej odległości porusza się z prędkością V oraz parametrem zderzenia p (z centrum pola siły). Wiedząc, że

$$V = \frac{15\gamma}{\sqrt{209}p}$$

znajdź równanie trajektorii cząstki $r(\theta)$, minimalną odległość na jaką cząstka zbliży się do źródła pola oraz kąt α o jaki efektywnie zostanie odchylna trajektoria cząstki (rysunek).



8. Cząstka o masie m porusza się w polu siły centralnej

$$F(r) = -m\gamma^2 \left(\frac{4}{r^3} + \frac{a^2}{r^5} \right)$$

gdzie γ oraz a są dodatnimi stałymi. Początkowo cząstka znajduje się w odległości a od źródła siły i zostaje następnie wystrzelona prostopadłe do wektora wodzącego z prędkością $3\gamma/\sqrt{2}a$. Znajdź równanie trajektorii cząstki oraz czas po którym dotrze do źródła pola.