Zestaw 9 / Transformacje kanoniczne:

1. Pokaż, że dowolna funkcja $F(q, \dot{q}, t)$ spełnia tożsamościowo równania Lagrange'a, wtedy i tylko wtedy gdy jest pochodną zupełną $\mathrm{d}\Lambda/\mathrm{d}t$ pewnej funkcji $\Lambda(q, t)$ zależnej tylko od współrzędnych i czasu.
   Oznacza to, że lagranżjany $\tilde{L} = L - \mathrm{d}\Lambda/\mathrm{d}t$ oraz L prowadzą do tych samych równań ruchu. Pokaż, że dla cząstki poruszającej się pionowo w jednorodnym polu grawitacyjnym, równania ruchu są niezmiennicze ze względu na transformacje współrzędnej (a) $z' = z+\alpha$, (b) $z' = z+\beta t$, gdzie α i β są stałymi. Tzn. znajdź postać funkcji Λ w każdym z przypadków.

2. Hamiltonian dla prostego oscylatora harmonicznego ma postać $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Wprowadzamy wielkości zespolone:
$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \quad \text{oraz} \quad a^\star = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$
   (a) Zapisz hamiltonian za pomocą a i $a^\star$.
   (b) Oblicz nawiasy Poissona $\{a, a^\star\}$, $\{a, H\}$ oraz $\{a^\star, H\}$.
   (c) Znajdź równania ruchu dla a i $a^\star$.

3. Jednowymiarowy ruch cząstki o masie m ze stałym przyspieszeniem opisany jest przez
$$x = x_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{1}{2}at^2, \quad p = p_0 + mat$$
   Pokaż, że transformacja od 'starych' zmiennych x, p do 'nowych' zmiennych x_0, p_0 jest transformacją kanoniczną. Skorzystaj z (a) nawiasów Poissona, (b) znajdź funkcję generującą $F_1(x, x_0, t)$.

4. Pokaż, że transformacje
$$Q = q\cos\theta - \frac{p}{m\omega}\sin\theta, \quad P = m\omega q\sin\theta + p\cos\theta$$
   są transformacjami kanonicznymi obliczając wartość $\{Q, P\}_{q,p}$. Znajdź funkcje generujące $F_1(q, Q, t)$ oraz $F_2(q, P, t)$.

5. Korzystając z transformacji z poprzedniego zadania, zapisz hamiltonian oscylatora harmonicznego $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$ w nowych zmiennych $\tilde{H}(Q, P, t)$ zakładając, że parametr θ jest funkcją czasu. Pokaż, że można dobrać $\theta(t)$ tak aby $\tilde{H} = 0$. Dla tego wyboru $\theta(t)$ rozwiąż nowe kanoniczne równania aby znaleźć zależność od czasu zmiennych Q i P. Wykorzystaj równania transformacji kanonicznych do znalezienia zależności od czasu zmiennych q i p.

6. Transformacje pomiędzy dwoma zestawami zmiennych dane są równaniami:
$$\begin{aligned} Q &= \ln(1 + \sqrt{q}\cos p) \\ P &= 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p \end{aligned}$$
   (a) Pokaż, że jeśli zmienne q, p są kanoniczne, to także kanoniczne są zmienne Q, P.
   (b) Znajdź funkcję $F_3(Q, p, t)$ generującą tę transformacje kanoniczną.

7. Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze q w polu energii potencjalnej $V(q) = \dfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$, a jej ruch dodatkowo jest tłumiony siłą $F_d = -2m\gamma\dot{q}$.
   (a) Znajdź lagranżjan i hamiltonian opisujące ruch cząstki.
   (b) Dla funkcji generującej $F_2(q, P, t) = \exp(\gamma t)qP$ znajdź hamiltonian $\tilde{H}(Q, P, t)$.
   (c) Pokaż, że w nowych zmiennych stałą ruchu jest $K = \dfrac{P^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 Q + \gamma QP$.
   (d) Zapisz równania Hamiltona w zmiennych Q, P, a następnie wykorzystując stałą ruchu znalezioną w (c) znajdź $q(t)$.